

Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů

7.2 Filosofie pravděpodobnosti v díle Emanuela Czubera

In: Magdalena Hykšová (author): Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů. (Czech). Praha: Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2011. pp. 205–212.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402281>

Terms of use:

© Hykšová, Magdalena

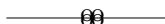
© Matfyzpress

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

7.2 FILOSOFIE PRAVDĚPODOBNOСТИ V DÍLE EMANUELA CZUBERA



7.2.1 Úvod

Emanuel Czuber vydal kromě recenzí více než 150 publikací.³⁷ První z nich úzce souvisely s jeho působením na místě asistenta u geodeta a kartografa Karla Kořistky; Czuber se zde věnoval zejména geodetickým měřením, matematickému zpracování výsledků měření a geometrii (viz např. práce [C1]–[C18], [C21] a [C22]). Od této problematiky se pak poměrně přirozeně dostal k pravděpodobnosti a statistice, které byly hlavním předmětem jeho odborného zájmu až do konce života a v nichž dosáhl světového věhlasu. Řada dalších publikací pak souvisí s jeho pedagogickým působením a živým celoživotním zájmem o problematiku vyučování matematice na vysokých i středních školách. Czuber vydal například rozsáhlé učebnice *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* [C31] a *Einführung in die höhere Mathematik* [C45] či spis [C47], zamýšlející se nad reformou technických vysokých škol; z časopiseckých článků zde uvedme alespoň pojednání [C29], [C33], [C35] a [C39], otištěná v *Zeitschrift für das Realschulwesen*.

Práce věnované teorii pravděpodobnosti a statistice

Základní přehled hlavních Czuberových publikací týkajících se pravděpodobnosti a statistiky lze nalézt v knize [225] K. Mačáka. Zde proto jen poznamenejme, že se Czuber zabýval jak teoretickými otázkami, tak i praktickými aplikacemi (vedle pojišťovnictví také například v oblasti zemědělství či sociologie), které prostupují téměř celým jeho dílem. Věnoval se rovněž historii, filosofii, didaktice a popularizaci uvedených disciplín. Patrně nejznámější je jeho kniha *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung* [C37] z roku 1903 (později rozdělena do dvou svazků, [C44] a [C46]), která byla první německy psanou učebnicí pravděpodobnosti od roku 1879, kdy Czuber vydal upravenou německou verzi [C19] Meyerových přednášek [238], a dočkala se dalších vydání ještě ve dvacátých letech 20. století, a dokonce i po Czuberově smrti. Její vliv nebyl omezen jen na oblast střední Evropy. S teorií pravděpodobnosti se jejím prostřednictvím seznámil například italský statistik B. de Finetti (viz část 1.3.3, str. 69); v anglické knize [193] ji cituje také J. M. Keynes (viz část 1.3.2, str. 65). Po svém

³⁷Podrobný seznam Czuberových publikací je uveden v Doležalově nekrologu [76], odkud jej převzal R. Einhorn (viz [86]). Chybí zde však česky psané práce [C1]–[C6], stejně jako články [C9] a [C10], vydané v časopise *Archiv matematiky a fyziky*.

penzionování pak Czuber vydal ještě učebnici *Die statistischen Forschungsmethoden* [C49]. Pevné místo v historii si jako první monografie v oblasti geometrické pravděpodobnosti získala rovněž kniha *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* [C23] z roku 1884, o níž jsme hovořili v části 6.3.1 (viz str. 191); dodejme, že 18 let po německém vydání vyšel tento spis také ve francouzském překladu [C36]. Praktickým aplikacím jsou vedle mnoha pojednání věnovány mj. knihy *Theorie der Beobachtungsfehler* [C28] a *Mathematische Bevölkerungslehre nach G. H. Knibbs* [C50], vydané v letech 1891 a 1923.

Czuberův zájem o dějiny teorie pravděpodobnosti dokládají četné historické poznámky v jeho odborných pracích i řada pojednání věnovaných výslovně historii pravděpodobnosti, statistiky a pojišťovnictví i obecněji historii matematiky. V roce 1894 si například pro svou rektorskou inaugurační přednášku zvolil téma *Aphorismen zur Entwicklungsgeschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert* [C30]; v roce 1899 vydal rozsáhlý spis *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen* [C34], který o století později historik pravděpodobnosti a statistiky Anders Hald označil za jednu z klasických prací, na které navazoval při psaní knihy [134]. Zmínit bychom zde měli také Czuberův okomentovaný překlad [C40] Moivreova spisu *Annuities upon Lives* [246].

V matematicky i historicky zaměřených pracích se Czuber rovněž zabíral filosofickými otázkami souvisejícími se základy teorie pravděpodobnosti. Na sklonku života na toto téma vydal monografii *Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [C51], vyjadřoval se k němu však již od doby, kdy vyučoval na střední škole.

7.2.2 První publikace: cesta k pravděpodobnosti

Práce vydané v českých časopisech

Na počátku své odborné kariéry Czuber publikoval čtyři česky psané články v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky (viz [C1], [C2], [C4] a [C6]); tři z nich vydala JČM také jako samostatné spisy ([C3], [C5], [C7]). Jejich charakter je vesměs popularizační a i když nejsou věnovány přímo pravděpodobnosti nebo statistice, do určité míry Czuberův zájem o tyto disciplíny předznamenávají. První z nich vyšel v roce 1873, nese název *Příspěvek k teorii nástrojů zrcadelných* [C1] a je věnován teoretickému pozadí principů geodetických a astronomických měření pomocí optických přístrojů, jejichž hlavní součástí je pohyblivé zrcadlo. Článek *O mírách původních* [C2] (viz též [C3]) z roku 1874 pojednává o historii měření délek a snah o uzákonění pevných jednotek ve Francii, Anglii, Prusku a Rakousku-Uhersku od 17. do 19. století. Hlavní důraz je kladen na vědeckou stránku a na opatření, jejichž účelem byla stálost míry. Práce *Poloměr setrvačnosti a centrální elipsa* [C4] (viz též [C5]) se zabývá existencí a polohou bodu s tou vlastností, že kdyby v něm byla soustředěna veškerá hmotnost tělesa, byl by jeho moment setrvačnosti roven momentu celého tělesa. Pro rovinné oblasti Czuber zkoumá geometrické místo těchto bodů a ukazuje, že je to vždy dvojice přímek, přičemž křivka, kterou přímky odpovídající různým polohám osy obalují, je elipsa. V roce 1874 bylo vydáno také rozsáhlé pojednání

O měření země [C6] (viz též [C7]), které podrobně rozebírá více či méně úspěšné pokusy o určení tvaru a velikosti Země od starověku až po 19. století. Pozornost je přitom věnována i matematickému a technickému pozadí těchto snah; Czuber například popisuje historii měřičství či vynález a využití logaritmů. O rok později byla zkrácená německá verze této práce otiskována ve výroční zprávě druhé německé státní vyšší reálky v Praze (viz [C8]). Na toto pojednání do určité míry navazuje článek *O zemském elipsoidu* [C9], který byl uveřejněn v prvním ročníku časopisu *Archiv matematiky a fyziky* z roku 1876 a který je věnován popisu zemského elipsoidu pomocí rovnic v zeměpisných a analytických souřadnicích. Ve stejném ročníku *Archivu* vyšel ještě německy psaný článek *Über Erzeugnisse geometrisch verwandter Punktreihen* [C10] s ryze geometrickou tematikou.

Jak je patrné ze seznamu literatury, Czuberovo příjmení bylo u článků otiskovaných v českých časopisech uvedeno ve tvaru Čubr, popř. Čuber. Všechny pozdější publikace jsou psány výhradně německy a autor je vždy podepsán jako Czuber. K tomu poznamenejme, že například Karel Málek v článku [228] Czuberovi vyčítá, že si své české příjmení postupně zkomolil z Čubra přes Čubera až po Czubera, navíc až jako dospělý muž, který již není pod vlivem rodičů. Jak však bylo uvedeno v předchozí části, v německém prostředí Czuber používal tento tvar příjmení již od dětského věku a stejně tak jej v řadě úředních dokumentů používal i jeho otec (viz pozn. 3 a 16 na str. 198 a 200).

V době svého pražského působení Czuber uveřejnil řadu dalších prací popularizačního charakteru, a to v časopisech *Technische Blätter* a *Archiv der Mathematik und Physik* (viz [C11]–[C18] a [C20]–[C22]). V prvním případě se jednalo o prakticky zaměřené články, jejichž cílem bylo seznámit čtenáře z okruhu inženýrů se správným statistickým zpracováním výsledků měření a určování chyb či s principy fungování nejnovějších planimetrů. Druhý z uvedených časopisů byl určený především učitelům vyšších gymnázií a reálků a Czuber v něm publikoval několik článků zaměřených na geometrii či geodézii a kromě toho dvě pojednání týkající se teorie pravděpodobnosti a tzv. *morální střední hodnoty* (v dnešní terminologii teorie užítku): *Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen* [C17] z roku 1878 a *Das Petersburger Problem* [C20] z roku 1882.

V roce 1879 Czuber připravil k tisku německé vydání přednášek *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung* [C19], které v letech 1849 až 1857 konal na univerzitě v belgickém Lutychu profesor vyšší matematiky Antoine Meyer (1801–1857). Czuber vyšel z původní francouzské verze [238], vydané posmrtně v roce 1874, uspořádání i zpracování látky však na mnoha místech více či méně výrazně pozměnil. Zásadně přepracoval a rozšířil zejména kapitoly věnovanou vyrovnávacímu počtu, tedy oboru, pro který se v roce 1876 habilitoval; téměř kompletně pak přepsal kapitolu pojednávající o aplikacích počtu pravděpodobnosti souvisejících s úmrtností. Zdá se, že práce na tomto díle měla podstatný vliv na další Czuberovo směřování. I když o jeho náklonnosti k pravděpodobnosti a statistice svědčí již dřívější publikace, po roce 1879 představovaly tyto obory hlavním předmětem jeho zájmu. Lze se také domnívat, že Meyerův spis byl přinejmenším významnou inspirací pro Czuberovy docentské přednášky na pražské technice.

7.2.3 Filosofické základy pravděpodobnosti

Z hlediska našeho tématu je zajímavý již samotný úvod k německému vydání [C19] Meyerových přednášek o pravděpodobnosti, zmíněnému na konci předchozí části, v němž jsou pro nezasvěceného čtenáře popsány základní pojmy a principy, podrobněji studované v následujících kapitolách. Pravděpodobnost je zde zavedena ve smyslu klasické definice; dále jsou pak rozlišovány tři druhy:

1. *Objektivní pravděpodobnost* plyne z vlastní povahy uvažovaného jevu (například pravděpodobnost, že při hodu symetrickou mincí padne líc).
2. *Subjektivní pravděpodobnost* závisí na stavu našich znalostí, a nemusí proto odpovídat skutečnosti. Tento pojem tedy odpovídá tzv. *epistemologické interpretaci pravděpodobnosti*.
3. *Posteriorní pravděpodobnost* se získá při velkém počtu opakování téhož pokusu jako relativní četnost výskytu uvažovaného jevu; uvedeným způsobem lze nalézt vždy jen přibližnou hodnotu pravděpodobnosti. Toto pojetí zřejmě odpovídá tzv. *četnostní interpretaci*.

Klasická definice pravděpodobnosti a její rozšíření

Nyní se obraťme k Czuberovým vlastním pracím. Samotných základů teorie pravděpodobnosti se v nich dotýká velmi často. Snahou o zobecnění klasické definice pravděpodobnosti je motivována monografie *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* [C23] z roku 1884, o níž jsme podrobněji hovořili v části 6.3.1. V jejím úvodu Czuber poznamenává, že v mnoha situacích tvoří příznivé a všechny možné případy nekonečné množiny (*Mannigfaltigkeiten*), jejichž prvky nemá smysl *počítat*, ale je třeba je nějakým způsobem *měřit*. Speciálně pak uvažuje množiny, které lze popsat pomocí jedné nebo více *spojitě proměnných veličin* (*stetig veränderliche Grössen*), jejichž meze jsou dány podmínkami konkrétní úlohy. I když se může jednat o veličiny nejrůznějšího druhu, lze je považovat za souřadnice bodů v n -rozměrném prostoru a daný problém tak převést na vyšetřování pravděpodobnosti týkající se určitých geometrických útvarů. Od klasické definice se tak Czuber dostává k pravděpodobnosti definované jako podíl *obsahů* daných *oblastí*, udaných obecně n -násobným [Riemannovým] integrálem $\iint \dots \int_K dx_1 dx_2 \dots dx_n$ (viz (6.22) na str. 191).

O stejné definici a o geometrické pravděpodobnosti hovořil také v přednášce ve společnosti Philosophische Gesellschaft na vídeňské univerzitě, konané dne 17. března 1898 a otištěné ve stejném roce pod názvem *Kritische Bemerkungen zu den Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [C32] v časopise *Zeitschrift für das Realschulwesen*. V souvislosti s nekonečnými množinami, jež lze reprezentovat geometrickými objekty, zde používá pojem *volný prostor* (*Spielraum*), který ve spise [199] zavedl Johannes von Kries (viz část 1.3.2, str. 65). Czuber podotýká, že tam, kde nelze hovořit o konečném počtu stejně možných případů, se může podařit stanovit *měřitelné prostory* (*messbare Spielräume*), příznivé a nepříznivé danému jevu; možnosti vymezení těchto prostorů a případné problémy s nejednoznačností řešení potom ilustruje na příkladu inspirovaném Bertrandovým paradoxem o tětivě: jaká je pravděpodobnost, že

délka náhodně zvolené tětivy dané kružnice je delší než poloměr r této kružnice? Czuber uvažuje stejné tři přístupy k *náhodné volbě* tětivy, jaké jsme viděli v části 6.3.1 na str. 193. Ve třetím případě, kdy se libovolně volí střed tětivy, představuje *možný prostor* celý kruh o poloměru r a *prostor příznivý* soustředný kruh o poloměru $r \cdot \sqrt{3}/2$; pravděpodobnost, že je tětiva delší než r , je pak rovna podílu obsahů těchto kruhů, tedy $3/4$. V případě, kdy je pevně zvolen koncový bod tětivy a potom je libovolně zvolen její směr, je příznivý a možný prostor *měřen* úhlem mezi tětivou a tečnou v uvažovaném koncovém bodě a hledaná pravděpodobnost je rovna $120/180 = 2/3$. Konečně v případě, že je nejprve zvolen směr tětivy a potom její poloha, je mírou možného prostoru průměr kruhu $2r$ a mírou prostoru příznivého dvojnásobek výšky rovnostranného trojúhelníka o straně r ; pravděpodobnost je pak rovna $(r \cdot \sqrt{3})/(2r) = \sqrt{3}/2$.

Je-li vyšetřovaný náhodný jev výsledkem nějakého známého zákonitého procesu, na jehož základě je možné pravděpodobnost daného jevu vypočítat, hovoří Czuber (jak bylo zvykem) o *apriorním stanovení pravděpodobnosti*. Tam, kde to možné není, jako například ve většině aplikací v přírodních vědách či pojišťovnictví, Czuber poukazuje na možnost odhadu pravděpodobnosti *a posteriori*, na základě zkušenosti či experimentu, kdy s narůstajícím počtem pokusů relativní četnosti *s rostoucí přesností vyjadřují vztah obsahů jim příznivých množin*. K tomu dodává, že v uvedeném výsledku lze spatřovat kořeny *vnitřního významu pojmu pravděpodobnosti jako míry očekávání (Maß der Erwartung)*. V článku se dotýká rovněž zákona velkých čísel a Bayesovy věty. Dodejme, že vedle citovaného Kriesova spisu [199] a prací řady dalších autorů Czuber cituje i knihu [115] Jakoba Friedricha Friese. Zatímco na Kriesovi oceňuje, že přistupuje s velkým důvtipem jak k základům teorie pravděpodobnosti, tak i k nejrůznějším oblastem jejích aplikací, a jistě ovlivní další vývoj předmětu, o Friesovi podotýká, že rozhodně nedosáhl tak radikální reformy, o jakou usiloval.

Základy teorie pravděpodobnosti se Czuber zabýval rovněž v kapitole *Wahrscheinlichkeitsrechnung* [C38], kterou na počátku 20. století napsal pro Meyero-rovu encyklopedii matematických věd. Stať je pojatá jako historický výklad základních pojmů a matematických výsledků teorie pravděpodobnosti; nalezneme zde podrobné odkazy na práce myslitelů od Galilea Galilei přes Laplace až po Czuberovy současníky. Po přehledu nejdůležitějších učebnic a monografií začíná slovy: *Předmětem počtu pravděpodobnosti jsou nejisté jevy, tedy (reálné nebo abstraktní) skutečnosti, jejichž přítomnost či výskyt nelze na základě daných premis či podmínek odvodit s jistotou, ale jen s nižším nebo vyšším stupněm opodstatněnosti. Podmínky (konstantní nebo proměnné), na nichž je založeno vyjádření stupně oprávnění či očekávání, tzv. pravděpodobnostní soud, se označují jako příčiny či šance; vycházejí z veškerého vědění o dané věci. Podmínky (proměnné), které se ve své neustálé proměnlivosti vymykají našim znalostem, představují to, čemu se říká náhoda. Proto se také jevy popsaneho druhu označují jako náhodné jevy.*³⁸

³⁸ Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind die ungewissen Ereignisse, das sind (reale oder abstrakte) Thatbestände, über deren Dasein oder Eintreffen auf Grund der Prämissen oder Bedingungen nicht mit Sicherheit gefolgert, sondern nur mit einem minderen oder höheren Grade der Berechtigung ausgesagt werden kann. Diejenigen (reale oder variabeln) Bedingungen,

Speciálně potom definuje *matematickou pravděpodobnost* jevu jako zlomek, v jehož čitateli je počet případů příznivých danému jevu a ve jmenovateli je počet všech stejně možných případů. Přitom upozorňuje na problémy s výrazem *stejně možné* a připomíná dva různé přístupy: laplaceovský *princip nedostatečného důvodu* (*Prinzip des mangelnden Grundes*), podle něhož se případy považují za stejně možné, není-li znám žádný důvod, proč by tomu tak nemělo být, a *princip přesvědčivého* či *dostatečného důvodu* (*Prinzip des zwingenden* nebo též *zureichenden Grundes*), zformulovaného J. von Kriesem, podle něhož musí být označení *stejně možné* či *rovnocenné* (*gleichwertige*) založeno na objektivní znalosti vylučující jakýkoli jiný předpoklad. I zde pak Czuber definici pravděpodobnosti rozšiřuje na podíl obsahů příslušných množin: *Matematická pravděpodobnost jevu je poměr obsahů množiny příznivých případů a množiny všech případů, o nichž se předpokládá, že jsou rovnocenné. Je-li množina diskrétní, jako je tomu u her, pak bude obsah stanoven sčítáním; je-li spojitá, pak je určen měřením (popřípadě ve vícerozměrném prostoru).*³⁹

Logická interpretace pravděpodobnosti

Czuber měl blízko také k tzv. logické interpretaci pravděpodobnosti, o níž jsme hovořili v části 1.3.2 (viz str. 56). V učebnici *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung* [C37] z roku 1903 připomíná, že již první průkopníci teorie pravděpodobnosti považovali tento pojem za míru oprávnění nějakého očekávání či domněnky, a podotýká, že novější filosofické práce na toto pojetí navazují. S odkazem na spis *Logika* [345] německého filosofa a logika Christopha von Sigwarta Czuber v úvodní kapitole píše, že za logický základ teorie pravděpodobnosti lze považovat tzv. *disjunktivní soud* (*disjunktives Urteil*), který je obvykle zformulován ve tvaru: *Nastane-li A, pak nastane buď B nebo C nebo D ...*; je-li disjunkce jednočlenná, hovoří se o tzv. *hypotetickém soudu* (*hypothetisches Urteil*). Podaří-li se souhrn relevantních podmínek rozdělit na takové disjunktivní části, že každá z nich je spojena s realizací jediného členu disjunkce $B \vee C \vee D \vee \dots$, a podaří-li se velikosti těchto oborů číselně ohodnotit, potom lze definovat pravděpodobnost úspěchu jako podíl velikosti oboru podmínek, jejichž uskutečnění nutně vede k uvažovanému úspěchu, a velikosti oboru všech podmínek.⁴⁰ Jsou-li pak speciálně množiny podmínek konečné, dostává Czuber klasickou definici *matematické pravděpodobnosti*.

auf welche die Bemessung des Grades der Berechtigung oder Erwartung, das Wahrscheinlichkeitsurteil, gegründet wird, bezeichnet man als die Ursachen oder Chancen des Thatbestandes; sie beruhen auf dem gesamten Wissen über die Materie. Diejenigen (variablen) Bedingungen, welche in ihrem beständigen Wechsel unserer Kenntnis sich entziehen, bilden das, was man als Zufall bezeichnet; auf sie bezieht sich das Nichtwissen. Daher waren Ereignisse von der gekennzeichneten Art auch als zufällige Ereignisse bezeichnet. ([C38], str. 734–735)

³⁹*Die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis aus dem Inhalt der Mannigfaltigkeit der ihm günstigen Fälle zu der Mannigfaltigkeit aller als gleichberechtigt vorausgesetzten Fälle. Ist die Mannigfaltigkeit diskret, wie bei den Spielen, so wird ihr Inhalt durch Zählung ermittelt; ist sie kontinuierlich, dann erfolgt seine Bestimmung durch Messung (eventuell im mehrdimensionalen Raume). ([C38], str. 753–754)*

⁴⁰V terminologii J. von Kriesa, jehož Czuber na jiných místech knihy také cituje, by tedy pravděpodobnost byla podílem měř přísušných *volných prostorů*.

Četnostní interpretace pravděpodobnosti

V části 1.3.4 jsme viděli, že Czuber přispěl k popularizaci pojmu *kolektiv*, jehož matematickým popisem i praktickým významem se zabýval například v pracích [C41]–[C43], nesoucích název *Die Kollektivmasslehre*, či v druhém vydání [C44] učebnice o pravděpodobnosti. V souvislosti s výsledky opakovaných pokusů či s popisem větších populací tedy Czuber uznával četnostní interpretaci pravděpodobnosti, zároveň však upozorňoval i na její omezení.

Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Filosofickými otázkami se Czuber zabýval také v historicky orientovaném spise [C34] z roku 1899. Vyvrcholení v této oblasti pak představuje monografie *Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [C51] z roku 1923, věnovaná výlučně filosofickým základům teorie pravděpodobnosti. Tato kniha začíná slovy: *V oblasti počtu pravděpodobnosti se setkávají dva směry: filosofický a matematický. Zpravidla však nekrácejí vedle sebe. Matematická stránka předmětu je oproti stránce filosofické výrazně napřed; klasičtí představitelé teorie pravděpodobnosti se sice filosofických otázek dotýkali a někdy je i podrobněji rozebírali, teprve novější doba je k nim však spravedlivější. [...] Užší spojení obou směrů je podle mého názoru v zájmu obou stran. Především by se měli matematikové lépe seznámit s výsledky filosofického výzkumu, protože matematické definice pojmů nevyčerpávají jejich obsah a k matematické formulaci vět patří věcné interpretace, které přinesou do povědomí jejich logickou hodnotu. [...] Snad nebude od věci pohlédnout na filosofické spisy o nauce o pravděpodobnosti z matematického hlediska, a to v první řadě s cílem vzít si to cenné, co umožní rozvoj matematického zpracování předmětu, jeho prohloubení a lepší ocenění jeho výsledků; v druhé řadě vyjádřit opačné stanovisko k některým názorům hájeným filosofy; v třetí řadě uvést na správnou míru neoprávněnou kritiku.*⁴¹

Citát neztrácí na aktuálnosti ani dnes. O téměř 90 let později je z teorie pravděpodobnosti plnohodnotná matematická disciplína, zatímco v oblasti jejích filosofických interpretací je názor stále nejednotný.⁴²

⁴¹*In der Wahrscheinlichkeitsrechnung begegnen sich zwei Richtungen: eine philosophische und eine mathematische. Sie sind zumeist nicht nebeneinander einhergegangen. Die mathematische Seite des Gegenstandes ist der philosophischen in der Entwicklung weit vorausgeeilt, die klassischen Vertreter der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wohl die philosophischen Fragen gestreift, sind auf sie mitunter auch näher eingegangen, aber erst die neuere Zeit ist ihnen in weiterem Umfange gerecht geworden. [...] Eine engere Verbindung der beiden Richtungen scheint mir im gegenseitigen Interesse zu liegen. Insbesondere sollte die mathematische Behandlung der Wahrscheinlichkeitslehre von den Ergebnissen der philosophischen Forschung in höherem Maße Kenntnis nehmen, als dies bisher zu geschehen pflegt. Denn die mathematischen Definitionen der Begriffe erschöpfen nicht deren Inhalt, und zu den mathematischen Formulierungen der Sätze gehören sachliche Auslegungen, die ihren logischen Gehalt zum Bewußtsein bringen. Tritt dann die Rechnung aus sich heraus, um sich den Anwendungen zuzuwenden, so sind dafür bessere Vorbedingungen vorhanden als bei ausschließlicher Betonung des Mathematischen.* ([C51], str. III–IV)

⁴²Pro ilustraci doplňme úryvek z knihy *Philosophical Theories of Probability* [120] D. Giliese z roku 2000: *Teorie pravděpodobnosti má stránku matematickou a stránku filosofickou, týkající se jejích základů. Zatímco v případě matematické stránky panuje téměř úplná shoda, u stránky filosofické se názory výrazně rozcházejí. Až na několik výjimek přijímají matematikové tutéž množinu axiomů pro matematickou teorii pravděpodobnosti, takže se všichni*

Monografie [C51] je koncipována jako historický výklad, který objasňuje různé přístupy k teorii pravděpodobnosti a ukazuje jejich důsledky i omezení. Kromě jiných prací jsou zde podrobně rozebrány knihy J. von Kriese [199] a A. Meinonga [234], s jejichž názory se Czuber převážně ztotožňuje, popřípadě je dále rozvíjí, a vedle toho například spisy O. H. Sterzingera [352] či K. Marbeho [229], k nimž naopak zaujímá odmítavé stanovisko. Cituje i jméno B. Bolzana, a to v souvislosti se zavedením pojmu *stupeň důvěry*, daného vztahem (2.14) (viz část 2.2.3, str. 109). V úvodní kapitole se Czuber kromě jiného dotýká otázky, zda jsou pravděpodobnostní soudy *subjektivní* nebo *objektivní*, tedy zda vycházejí z vnitřní zkušenosti subjektu, který je vyslovuje, anebo z okolností, jichž se týkají. Komentuje různé názory, které se v průběhu vývoje objevily, a přiklání se ke stanovisku A. Meinonga, který zaujal pozici uprostřed a oběma krajnostem pomáhal ukázat jejich opodstatnění.⁴³ V další kapitole se Czuber věnuje klasické definici pravděpodobnosti a jejím úskalím a omezením, pravděpodobnostní dedukci (a tedy logické pravděpodobnosti), zákonu velkých čísel, Bayesově větě, problému kauzality a indukce – zde dochází k závěru, že teorie pravděpodobnosti není pro indukci dostatečným logickým základem. Na závěr rozebírá vztah teorie pravděpodobnosti a přírodních věd a na různých příkladech dokládá souhlas teoretických výsledků se zkušeností, přičemž vyvrací Marbeovo tvrzení o zásadních neshodách mezi oběma sférami. Kniha končí výkladem o významu teorie pravděpodobnosti pro teoretickou fyziku.

Po vydání Czuberovy knihy vyšla podrobná a převážně příznivá recenze v referativním časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Její autor, P. E. Böhmer, práci ovšem vytýká, že v ní chybí odkazy na novější spisy G. Bohlmana, U. Broggiho, a R. von Misese, které na mnohé logické a filosofické otázky vrhají nové světlo. K tomu dodejme, že do nového vydání učebnice [C44] z roku 1924 Czuber zařadil rozsáhlý dodatek, v němž se věnuje Misesovu spisu [241] z roku 1919 a také například Keynesově knize [193] z roku 1921.

Celkově lze říci, že Czuber nebyl ostře vyhraněný pro některý z interpretačních směrů. Zastával názor, že každé pojetí má svůj význam a je užitečné za jiných okolností. Jedná-li se o opakované jevy, pak považoval za praktické použít četnostní přístup, v případě jedinečných neopakovatelných jevů se klonil k pravděpodobnosti logické. V souladu se svým celoživotním zájmem o aplikace matematiky, především pravděpodobnosti a statistiky, Czuber rovněž zdůrazňoval význam těchto věd pro epistemologii a přírodní filosofii.

shodují na tom, jaké platí věty. Avšak alespoň ve dvacátém století byly rozvinuty čtyři překvapivě odlišné interpretace tohoto matematického kalkulu, a každá z nich má dodnes své stoupence. ([120], str. 1)

⁴³ Objektivní pravděpodobnost, která by byla zcela nezávislá na osobě, která ji stanovuje, je ideálem, který je žádoucí, avšak většinou nedosažitelný. Czuber podotýká, že zejména v případě neopakovatelných jevů z reálného života závisí výsledná pravděpodobnost i při největší snaze o objektivitu do větší či menší míry na znalostech a zkušenostech konkrétní osoby, například lékaře, který odhaduje pravděpodobnost, že příznaky, pozorované u vyšetřovaného pacienta, byly způsobeny určitou příčinou. Poznamenejme, že Meinong hned na začátku zdůraznil, že vedle numerických pravděpodobností existují také pravděpodobnosti nenumerní; Czuber šel v tomto ohledu ještě dále a dodal, že to jsou právě nenumerní pravděpodobnosti, s nimiž člověk nejvíce operuje v praktickém a dokonce i ve vědeckém životě.