

Matematické listy Gerberta z Remeše

List 5: Pravidla počítání na abaku

In: Marek Otisk (author); Richard Psík (author); Gerbert of Reims (other): Matematické listy Gerberta z Remeše. (Czech). Praha: Centrum Vivarium FF OU, 2014. pp. 124–129.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402412>

Terms of use:

© Otisk, Marek

© Psík, Richard

© Matfyzpress

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

List 5¹

	Regulae de numerorum abaci rationibus²	1, 1
	Constantino suo Gerbertus scolasticus	6, 1
5	Vis amicitiae pene impossibilia redigit ad possibilis. Nam quomodo rationes numerorum abaci explicare contenderemus, nisi te adhortante, o mi dulce solamen laborum, Constantine? Itaque cum aliquot lustra jam transierint, ex quo nec librum, nec exercitium harum rerum habuerimus, quaedam repetita memoria, eisdem verbis proferimus, quaedam eisdem sententiis. Nec putet philosophus sine litteris haec alicui arti vel sibi esse contraria.	6, 5
10	Quid enim dicet esse digitos, articulos, minuta, qui auditor majorum fore dedignatur? <i>Vult tamen videri solus scire quod mecum ignorat</i> , ut ait Flaccus. Quid cum idem numerus modo simplex, modo compositus, nunc digitus, nunc constituatur ut articulus? Habes ergo, talium diligens investigator, viam rationis, brevem quidem	7, 1
15	verbis, sed prolixam sententiis, et ad collectionem intervallorum et distributionem in actualibus geometrici radii secundum inclinationem et erectionem, et in speculationibus et actualibus simul dimensionis coeli et terrae plena fide comparatam.	7, 5
		8, 1

¹ Tento dopis (podobně jako k němu přiložená *Pravidla*) je opětovně datován Gerbertovým remešským učitelským působením. Gerbert v něm zmiňuje, že se počítání na abaku již několik let nevěnuje, což dává tušit, že text vznikl zřejmě nedlouho před přesídlením do Bobbia (příp. před jeho cestou na slavnou disputaci do Ravenny – blíže viz kap. 1.2 úvodní studie této knihy), tzn. patrně v roce 980 (srov. [Bub], s. 6), k čemuž se (někdy s větší pravděpodobností pro první polovinu tohoto roku) přiklonili i překladatelé Gerbertovy korespondence – viz [GeEE], s. 45–46; [GeEC], s. 663 či [GeER], s. 186.

² Latinský text je převzat z [Bub], s. 1–8 (I, I, A, 1). Dnes všeobecně používaný název Gerbertova abacistického pojednání připojil k textu editor N. Bubnov. Zde publikovaný dopis tvoří průvodní list k vlastnímu Gerbertovu metodickému návodu.

³ V orig. *lustrum*, tj. období, které původně označovalo dobu mezi dvěma očistnými rituálními slavnostmi, které se praktikovaly v Římě již od královských časů. Termín se následně užíval obecně k označení doby (obvykle) pěti let. Gerbert zde hovoří o časovém odstupu několika luster, což by mohlo naznačovat buď dobu přibližně 10 let, kdy začal vyučovat v Remeši, pravděpodobnější se však zdá odkaz na dobu více než 10 let, kdy se mohl s abacistickými výpočty seznámit během svého pobytu na Pyrenejském poloostrově. Podrobněji k této životní fázi Gerbertova života viz kap. 1.1 a 1.2 úvodní studie této knihy.

⁴ Obtížně se určuje konkrétní spis, který zde mohl mít Gerbert na mysli. Blíže viz *Komentář* k tomuto dopisu.

⁵ Opětovně zde může být řeč o pobytu za Pyrenejemi, kde si Gerbert mohl osvojit praktickou schopnost počítat na abaku, ale stejně tak se může jednat o počátek učitelského působení v Remeši, kde fakticky tyto početní úkony předváděl a s největší pravděpodobností

Pravidla počítání na abaku

Učitel Gerbert svému Konstantinovi

Síla přátelství dokáže z nemožného učinit možné. Cožpak bychom se bez tvého naléhání, ó Konstantine, sladká útěcho v mém trápení, pustili do vysvětlování pravidel počítání na abaku? A tak, ačkoli už léta³ jsme k této problematice nic nečetli⁴ ani ji neprocvičovali,⁵ posíláme ti pravidla, některá doslova, jak nám utkvěla v paměti, u jiných zachováváme pouze stejný smysl.⁶

Ať se však nějaký polovzdělanec⁷ nedomnívá, že jsou tato pravidla v rozporu s jiným [svobodným] uměním nebo mezi sebou navzájem.⁸ Jak by totiž ten, kdo odmítá naslouchat starším autorům, vysvětlil, co je to *digitus, articulus, minuta*?⁹ *Jako by sám rozuměl tomu, co stejně jako já neví*, jak říká Horatius.¹⁰ Proč je totéž číslo jednou jednoduché, jednou složené,¹¹ někdy je použito jako *digitus*, jindy jako *articulus*?¹²

A tak mám pro tebe, jenž se tím usilovně zabýváš, rozsahem sice stručnou, ale na myšlenky bohatou, metodu počítání, kterou jsme v dobré víře sepsali pro praktické výpočty¹³ vzdáleností podle sklonu a postavení měřící tyče¹⁴ a zároveň pro teoretické i praktické určování rozměrů na nebi i na zemi.

si k těmto účelům rovněž vytvořil nezbytné propriety (početní desku a žetony se symboly číslic) – bližší viz kap. 1.2 a kap. 3 úvodní studie této knihy; srov. také [Rch], III, 54, s. 198.

⁶ Zde Gerbert pravděpodobně naráží na konkrétní spis, s nímž dříve pracoval a z něhož při psaní vlastního pojednání vycházel. Naznačuje, že někdy užívá stejných vět, pokud si je pamatuje, jindy látku vysvětluje vlastními slovy, přičemž věcný obsah zůstává nezměněn.

⁷ Podobně viz List 4. O možné identifikaci zmíněného polovzdělaného filosofa se vedou diskuse – viz *Komentář* k tomuto dopisu.

⁸ Patrně důsledek v dalších větách zmiňovaného nedostatečného rozlišování mezi *digit*y a *artikuly* a jejich role při vyjadřování číselných hodnot.

⁹ *Minuta* či *minutum* je tzv. menší číslo dělitele – podrobnější vysvětlení nabízí *Komentář* k Listu 5.

¹⁰ Srov. [Hor], II, 1, 87, s. 295: „... *quod mecum ignorat solus vult scire videri* ...“ Tento verš v českém překladu Rudolfa Mertlíka zní: [HoL], s. 259: „... *jako by rozuměl sám, co stejně jak mě je mu temné* ...“

¹¹ Vysvětlení pojmů *numerus simplex* a *numerus compositus* nabízí *Komentář* k tomuto listu.

¹² Podrobněji viz *Komentář* k Listu 5.

¹³ Slovní spojení *collectio intervallorum et distributio*, které může zahrnovat různé matematické operace, zde souhrnně překládáme jako „výpočty“.

¹⁴ Možná aluze na mnohá měření pomocí měřící tyče v [Ez], 41–44. Srov. také [Eri], III, 25, c. 725. Na možné výklady poslední věty tohoto Gerbertova dopisu viz *Komentář*.

Komentář

List 5 vykazuje velmi podobné členění látky jako předchozí Gerbertův dopis. I zde se odkazuje na vzájemné silné přátelství s Konstantinem, nazývá ho „sladkou útěchou svého trápení“ a označuje ho za hybnou příčinu svého záměru napsat *Pravidla počítání na abaku* (5, 3–5; 6, 3–5). Tentokrát také zmiňuje, že se aktivně abacistickému počtářství již nevěnuje (5, 5–7; 6, 6–8), ale ve shodě s *Listem 4* uvádí, že tato pravidla mají posloužit i těm, kteří mají o tomto počtářství pochybnosti, neboť jim chybí potřebné znalosti a především poznatky, které ve svých spisech zanechali dřívější učenci (5, 8–11; 7, 1–4). Bez těchto znalostí se totiž nedokáží zorientovat ve výpočtech na abaku, neboť nejenže nebudou vědět, co je to *digitus* či *articulus*, ale také nepochopí dělení na početní pomůcky či proměnlivost zaznamenávání číselných hodnot (5, 12–13; 7, 4–6). Na závěr – opět obdobně jako v *Listu 4* – se vrací ke Konstantinovi, připomíná jeho pracovitost a navíc dodává možné využití praktických výpočtů v učenecích kruzích, tzn. nikoli pouze jako kupecké počty (5, 13–18; 7, 6–8, 3).

5, 5–7 (6, 6–8):

Objevily se výkladové hypotézy, které předpokládaly, že v tehdejších centrech vzdělanosti bylo užíváno určité (svým původem zřejmě římské) pojednání o počítání na abaku, které mohlo poskytovat informace o provádění aritmetických operací na této početní tabulce.¹ Tento předpoklad by mohl vysvětlovat znalost abacistických výpočtů u Abbona z Fleury, jak je zpracoval ve svém komentáři ke spisu *Calculus* patrně z počátku 80. let.²

Jinou (a častěji preferovanou) možností je, že Gerbert se s texty o této problematice seznámil během svého přibližně tříletého katalánského pobytu (967–970), což by odpovídalo minimálně od počátku 12. století tradovanému výkladu, že Gerbert jako první přinesl na latinský křesťanský Západ znalosti o abaku od Saracénů.³

Gerbert zde hovoří o praktické i teoretické zkušenosti s prací na abaku a patrně se odkazuje na knihu o této problematice, z níž studoval. V polovině 80. let se ve své korespondenci dvakrát zmiňuje o spisu *De multiplicatione et divisione numerorum* blíže neznámého Josefa Španělského či Moudrého.⁴ Jelikož tyto dopisy byly adresovány do pyrenejské Gerony, resp. do Aurillacu, kde mu mělo být toto pojednání zanecháno a přepsáno, mohlo se jednat o stejný text, který zde Gerbert zmiňuje. Žádný traktát o tomto počtářství se ovšem nedochoval, takže vše zůstává na úrovni pouhé spekulace.

¹ Podrobněji tuto tezi rozpracoval zejména N. Bubnov – viz [Bu1] nebo [Bu2], s. 25–27.

² [AbC], s. 113–114.

³ Srov. např. [Wil], II, 167, s. 280.

⁴ [GeEW], 17, s. 40; resp. 25, s. 48.

5, 9 (7, 1):

Ani zde nelze s jistotou říci, koho má Gerbert na mysli. Často se předpokládá, že tímto polovzdělaným filosofem by mohl být Abbo z Fleury,⁵ jenž sice byl nazván *doctor abaci* (viz kap. 3.1 úvodní studie této knihy), ovšem jeho popis výpočtů na abaku zřetelně naznačuje, že se v látce orientoval znatelně méně než kupř. Gerbert. Ovšem přímé či nepřímé ztotožnění zde uvedeného polovzdělance s Abbonem se setkalo také s kritikou.⁶ Uvažovat lze také o britské tradici výpočtů na *mensa geometricalis*, což by mohlo naznačovat např. vyobrazení tzv. Abbonova abaku z oxfordského rukopisu St. John's College MS 17, které dokládá nepochopení struktury abacistické desky.⁷

Lze pouze předpokládat, že v poslední čtvrtině 10. století se začala v latinských křesťanských školách věnovat značně větší pozornost matematickým disciplínám, včetně opětovného užívání abacistické pomůcky, takže Gerbert mohl reagovat na dnes nedochovaný výklad práce na abaku, s nímž se zřejmě mohlo pracovat i ve Fleury, kde se k nim dostali Abbo i adresát Gerbertova dopisu Konstantin. Srov. také *Komentář k Listu 4*.

5, 10 (7, 2):

Abacisté raného středověku rozlišovali dva základní způsoby dělení na abaku: tzv. dělení s doplňkem (diferencí) a bez doplňku (diference).⁸ Zatímco dělení bez použití doplňku je principiálně velmi podobné způsobu, jakým dělíme dodnes, když používáme papír a tužku, tak v případě využití diference při dělení, které jako jediné uvádí samotný Gerbert,⁹ se jedná o výrazně odlišnou metodu zjištění podílu. Hlavní rozdíl tkví v tom, že se dělitel doplňuje o určité číslo, které upraví dělitele na takovou hodnotu, s níž se bude při dělení snadněji pracovat (např. dělit číslem 17 je komplikovanější než číslem 20, tudíž je-li dělitelem 17, navýší se tento o 3 a fakticky se bude dělit číslem 20).

Menší číslo dělitele (*minutum*) je v tomto způsobu úpravy dělitele digitus dělitele, k němuž se přičítá určitá hodnota (resp. které se od dělitele odčítá), aby výsledkem byla eliminace tohoto digitu.

Na konkrétním příkladu může abacistické dělení s doplňkem vypadat takto (obr. 34):

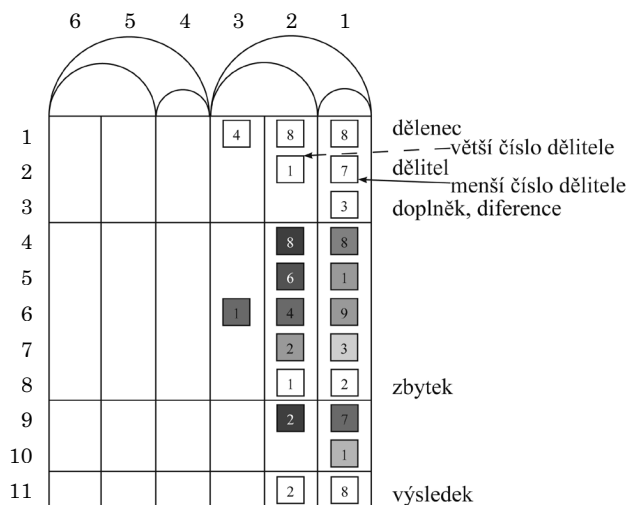
⁵ Viz např. [Bu1], s. 90–91.

⁶ Srov. kupř. [AbC], s. xxx.

⁷ Viz [OxA] nebo [Bub], s. 203; srov. např. [GeEE], s. 46.

⁸ Viz např. [Ber], 3, s. 50–72.

⁹ [Bub], s. 13–22.



Obr. 34 – Dělení na abaku s doplňkem

Průběh tohoto dělení přibližuje tab. 46:

1.	zápis příkladu 488 : 17	488 – dělenec	ř. 1
		17 – dělitel	ř. 2
2.	doplnění dělitele	$17 + 3 = 20$	
3.	stanovení doplňku	3 – doplňěk	ř. 3
4.	dělení I: dělení prvních dvou čísel dělenice zleva procesním dělitelem	$48 : 20 = 2$	ř. 9, s. 2
		zbytek 8	ř. 4, s. 2
5.	rozšíření zbytku po dělení I o součin doplňku s výsledkem dělení I	$3 \cdot 2 = 6$	ř. 5, s. 2
6.	stanovení nového dělenice po dělení I	$8 + 6 = 14$	<i>digitus</i> ř. 6, s. 2
			<i>articulus</i> ř. 6, s. 3
7.	dělení II: dělení nového dělenice procesním dělitelem	$148 : 20 = 7$	ř. 9, s. 1
		zbytek 8	ř. 4, s. 1
8.	rozšíření zbytku po dělení II o součin doplňku s výsledkem dělení II	$3 \cdot 7 = 21$	<i>digitus</i> ř. 5, s. 1
			<i>articulus</i> ř. 7, s. 2
9.	stanovení nového dělenice po dělení II	$(2)8 + 1 = (2)9$	<i>digitus</i> ř. 6, s. 1
10.	dělení III: dělení nového dělenice procesním dělitelem	$29 : 20 = 1$	ř. 10, s. 1
		zbytek 9	ř. 6, s. 1
11.	rozšíření zbytku po dělení III o součin doplňku s výsledkem dělení III	$3 \cdot 1 = 3$	ř. 7, s. 1
12.	stanovení zbytku celého dělení	$9 + 3 = 12$	<i>digitus</i> ř. 8, s. 1
			<i>articulus</i> ř. 8, s. 2
13.	stanovení výsledku celého dělení	$(2)7 + 1 = (2)8$	<i>digitus</i> , ř. 11, s. 1
			<i>articulus</i> ř. 11, s. 2
14.	výsledek dělení 488 : 17 je 28, zbytek 12		

Tab. 45 – Průběh dělení s doplňkem na abaku, příklad 488 : 17

5, 12–13 (7, 5–6):

Číslem složeným se na abaku rozumí takové číslo, které v sobě obsahuje *digitus* i *articulus*. Číslem složeným je proto např. 17, kde číslice 1 představuje *articulus* a číslice 7 *digitus*, takže chtěl-li počtář na abaku zaneš na desku pro výpočty číselnou hodnotu 17, umístil symbol pro číslo 7 do řádu pro jednotky (vyjádřil *digitus* daného čísla) a symbol pro číslo 1 do sloupce pro desítky (číslo lze rozdělit na 10 stejných dílů, proto se jedná o *articulus*).¹⁰

Obdobně je tomu např. s číslem 488, které by abacista rozdělil na *digitus* (8) a *articulus* (48), který je navíc rovněž složeným číslem, v němž je *digitus* (8) a *articulus* (4). Takto se také může stát, že jedna číslice bude jednou *digitus* a jindy *articulus*: např. u čísla 33 platí, že symbol pro číslici 3 umístěný v řádu jednotek je *digitus* a stejný symbol v řádu desítek je *articulus*.

Jednoduché číslo je takové, které lze na abaku vyjádřit s pomocí jediného symbolu čísla. Je zřejmé, že všechny hodnoty 1–9 jsou nesloženými čísly, ovšem pro abacisty za jednoduchá čísla někdy platily i takové číselné hodnoty, k jejichž vyjádření stačil jediný symbol, tedy kupř. i číslo 3000, které lze zaneš na abakus vložením symbolu pro číslo 3 do sloupce pro tisíce.¹¹

5, 15–18 (7, 8–8, 3):

Geometrické a astronomické využití abaku, přesněji usnadnění mnohdy komplikovaných a složitých měření a výpočtů v těchto disciplínách je zde Gerbertem prezentováno jako možné praktické uplatnění abacistického počtářství. To je v souladu s tím, co o Gerbertově důrazu na aktivní používání nejrůznějších (povětšinou pedagogických) pomůck napsal Richer z Remeše,¹² zároveň to však ukazuje na Gerbertovu snahu představit abakus jako všestranně využitelný nástroj, který má své uplatnění především v učenecském světě. Lze tedy říci, že je to jakási snaha zahrnout praktické počtářství do společenství uznávaných odborných disciplín.

Na Gerbertově popisu využití abaku je zajímavá zmínka o měření nebe i země podle určitého ukazatele. Mohlo jít o jistý typ gnómónu, ale také např. o pohyblivý ukazatel na zadní straně astrolábu zvaný *alhidáda*, s jehož pomocí se prováděla úhlová měření vesmírných objektů a určování jejich vzdáleností či drah, ale také výšky hor, hloubky propastí (měření země). Právě podobnost využití *alhidády* podle jejího popisu ve spise *De utilitatibus astrolabii*,¹³ jehož autorství bylo (a je) připisováno také Gerbertovi, vedlo N. Bubnova k domněnce, že zde Gerbert zmiňuje využitelnost abaku při výpočtech hodnot získaných při práci s astrolábem. V zásadě by tak mohlo jít o jedinou Gerbertovu zmínku o astrolábu, třebaže tento výklad není sám o sobě průkazný.¹⁴

¹⁰ Z mnoha textů viz např. [Bub], s. 251.

¹¹ Blíže viz např. [Bub], s. 251–252.

¹² Srov. kap. 1.2 úvodní studie této knihy.

¹³ [Bub], s. 123.

¹⁴ Podrobněji na diskuse v odborné literatuře, viz kap. 1.2 úvodní studie této knihy.