

## Geometria proiettiva differenziale. II

---

Georges Tzitzeica

Appendice I. Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales, les surfaces  $S$  et les réseaux  $R$

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author); Georges Tzitzeica (author); Alessandro Terracini (author); Enrico Bompiani (author): Geometria proiettiva differenziale. II. (Italian). , 1927. pp. [661]–668.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402551>

### Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# APPENDICI



## APPENDICE I<sup>a</sup>

---

### Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales, les surfaces $S$ et les réseaux $R$ .

Note de M. GEORGES TZITZEICA Prof. à l'Université de Bucarest (\*).

1. - Le point de départ de mes recherches a été un problème particulier de déformation de certaines surfaces tétraédrales.

Considérons le réseau des lignes de courbure d'une quadrique. Les normales de la quadrique forment une congruence conjuguée, au sens de M. GUICHARD, au réseau; elles découpent donc sur la quadrique, d'après un théorème de Ribaucour (\*\*), un autre réseau, qui est, avec celui des lignes de courbure, harmonique à une même congruence cyclique. Le réseau cyclique correspondant est à invariants tangentiels égaux, donc il reste invariable dans une déformation continue à un paramètre.

C'est cette déformation continue que j'ai tout d'abord étudiée et j'ai obtenu le résultat suivant:

*Toutes les surfaces*

---

(\*) L'illustre geometra rumeno ha cortesemente acconsentito ad esporre in questa nota, di carattere piuttosto storico, la serie delle idee che lo hanno guidato nei suoi studi sulle superficie  $S$  e le reti  $R$ . Queste idee, veramente originali, interesseranno certo moltissimo i lettori di questo libro.

(\*\*) DARBOUX, Th. des surfaces, II, p. 289, ou bien ma Géom. diff. proj. des réseaux, p. 92.

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= A(u+a)^{\frac{3}{2}}(v+a)^{\frac{3}{2}}, & y &= B(u+b)^{\frac{3}{2}}(v+b)^{\frac{3}{2}}, \\ z &= C(u+c)^{\frac{3}{2}}(v+c)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

pour les quelles les six constantes  $A, B, C, a, b, c$  sont telles que les cinq expressions

$$A^2 a^i + B^2 b^i + C^2 c^i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

ont des valeurs déterminées, sont applicables les unes sur les autres (\*).

2. - Après avoir essayé d'étudier le problème général de la déformation continue et de trouver la place qu'occupait le problème spécial précédent dans ce problème général, je suis revenu aux surfaces (1) dont l'équation cartésienne est

$$(2) \quad \alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1.$$

J'ai remarqué d'abord que dans la déformation continue précédente, la courbe  $u = v$ , qui est une ligne asymptotique sur chaque surface, reste invariable de forme. On a ainsi un exemple de la déformation continue d'une surface autour d'une ligne asymptotique. J'ai démontré que cette déformation peut se faire autour de chaque ligne asymptotique (\*\*).

Il résulte de là que les  $\infty^3$  surfaces (2) peuvent être groupées en  $\infty^1$  familles, chaque famille étant composée de  $\infty^2$  surfaces toutes applicables les unes sur les autres. Il s'agit maintenant de trouver la relation entre les coefficients de (2) qui caractérise chaque famille de surfaces applicables.

A cet effet j'ai posé

$$x = P^{\frac{3}{2}}, \quad y = Q^{\frac{3}{2}}, \quad z = R^{\frac{3}{2}}$$

où

(\*) *C. R.* de l'Ac. des Sc. 128 (1899)

(\*\*) *C. R.* 1902, le 21 avril 1902.

$$P = p_1 u + p_2 v + p_3, \quad Q = q_1 u + q_2 v + q_3, \quad R = r_1 u + r_2 v + r_3$$

et j'ai démontré (\*) qu'en faisant des transformations linéaires sur les variables  $u$  et  $v$ , on peut réduire l'élément linéaire de (2) à l'une des formes

$$(3) \quad ds^2 = v du^2 + 2n du dv + dv^2,$$

$$(4) \quad ds^2 = u du^2 + 2m du dv + v dv^2.$$

D'une manière plus précise, on obtient l'élément linéaire (3) si

$$\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}} = 0$$

et (4) si

$$\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{m^3}.$$

3. - Il restait à trouver toutes les surfaces admettant l'élément linéaire (3) ou (4), pour que le problème de la déformation des surfaces (2) fût complètement résolu. J'ai fait voir (\*\*) que la recherche des surfaces ayant l'élément linéaire (3) se ramène à celle des surfaces minima, tandis que la recherche des surfaces ayant l'élément linéaire (4) conduit à celle des surfaces  $S$  pour lesquelles on a

$$(5) \quad \frac{K}{p^4} = \text{const.},$$

où  $K$  est la courbure totale en un point  $M$  de  $S$  et  $p$  la distance d'un point fixe  $O$  au plan tangent en  $M$  à  $S$ .

(\*) *C. R.* le 18 juin, 1906.

(\*\*) *C. R.*, le 25 juin, 1906. Dans cette Note une faute de calcul, que j'ai corrigée implicitement dans les publications ultérieures, m'a fait dire que les surfaces d'élément linéaire (4) se ramènent à l'étude des surfaces à courbure totale constante.

C'est de cette manière que je suis arrivé à l'étude des surfaces  $S$  (\*). (Cfr. § 25 E et 28 D).

4. - J'ai commencé l'étude des surfaces  $S$  en démontrant que leur recherche conduit à l'étude des systèmes complètement intégrables de la forme (\*\*)

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{uu} = a\theta_u + b\theta_v, \\ \theta_{uv} = h\theta, \\ \theta_{vv} = a'\theta_u + b'\theta_v. \end{array} \right.$$

A partir de ce point deux voies se sont trouvées ouvertes devant moi. Je les ai suivies alternativement. Elles se sont réunies, comme on le verra dans la suite, dans la théorie des réseaux  $R$ .

Il résultait tout d'abord du système (6) que les surfaces  $S$  (\*\*\*) gardent la propriété (5) après une transformation affine et il n'est pas difficile de voir qu'il en est de même après une transformation par polaires réciproques. Il fallait expliquer ces résultats.

J'ai démontré qu'une transformation affine laisse, à un facteur constant près, le rapport  $\frac{K}{p^4}$  invariable, tandis que une transformation duale le remplace par son inverse.

(\*) Voir mon mémoire *Deformare a unei clase de suprafașe tetraedrale* publié en 1916 dans les Ann. de l'Ac. Roumaine

Il lettore noti che alla sesta riga di pag. 153 (§ 25 E) si deve leggere  $\sqrt{-K}$  e non  $\frac{1}{4\sqrt{-K}}$ , (come è scritto per un errore di stampa). Egli riconoscerà allora immediatamente che le superficie ivi studiate coincidono con quelle dello Tzitzeica.

(\*\*) *C. R.*, le 10 juin 1907, ou bien *Rend. del Cir. mat. di Palermo* (Tomo XXV et XXVIII, 1908 et 1909).

(\*\*\*) On les a d'abord désignées ainsi dans la littérature scientifique. Plus tard on a reconnu que ce sont des sphère affines. Quelques géomètres (M. JONAS et DEMOULIN) m'ont fait l'honneur de leur donner mon nom.

J'ai cherché ensuite une définition purement affine des surfaces  $S$ . Je l'ai trouvée d'abord pour les surfaces réglées, (\*) à savoir qu'elles ont leurs lignes flecnodales confondues à l'infini. Pour les surfaces  $S$  générales les surfaces réglées asymptotiques, c. à d. les surfaces réglées formées par les tangentes aux lignes asymptotiques d'une famille aux points où elles coupent une ligne asymptotique de l'autre famille, ont, comme développables asymptotiques, des cônes ayant tous le même sommet (\*\*). Cette définition s'applique aussi aux surfaces réglées.

5. — Comme les lignes asymptotiques jouent un rôle essentiel dans la théorie des surfaces  $S$ , j'ai été naturellement conduit à chercher une transformation de ces surfaces à l'aide des congruences  $W$ , analogue à celle des surfaces à courbure totale constante ou à celle des surfaces applicables sur une quadrique (\*\*).

J'ai abordé alors la théorie générale des congruences  $W$ , à l'aide d'un théorème remarquable de DARBOUX (\*\*\*\*), au quel j'ai donné une nouvelle démonstration à l'aide d'une interprétation géométrique dans un espace à cinq dimensions. J'ai fait voir (\*\*\*\*\*) qu'à toute congruence  $W$  il correspond un réseau tracé sur une variété à quatre dimensions dans un espace projectif à cinq dimensions et réciproquement. Aux deux complexes formés par les tangentes des deux surfaces focales d'une congruence  $W$  correspondent deux congruences, conjuguées au réseau précédent et formées par des droites appartenant à la variété quadratique. Les deux foyers d'un rayon d'une de ces congruences sont les images des deux tangentes asymptotiques de la surface focale correspondante.

6. — Revenons au système (6) et montrons la seconde voie que j'ai suivie en même temps que la précédente. On peut considérer ce système comme définissant les coordonnées projectives d'un réseau plan : c'est la perspective sur un plan des lignes

(\*) *C. R.*, le 9 déc. 1907; voir aussi *Atti del IV Congresso intern. dei Mat.* [Roma, 1908], et *Rend. del Circ. mat. di Palermo*, T. XXVIII (1909).

(\*\*) *C. R.* le 27 - I - 1908.

(\*\*\*) *C. R.*, le 18 avril 1910.

(\*\*\*\*) DARBOUX, *Th. des surfaces*, II, p. 345.

(\*\*\*\*\*) *C. R.*, le 28 - XI - 1910 et le 3 - I - 1911, ou bien *ma Géom. diff. proj.* p. 260.

asymptotiques d'une surface  $S$ . Cette perspective est, d'après un théorème de M. KOENIGS, un réseau à invariants égaux, ce qui est du reste visible sur le système (6).

J'ai été ainsi obligé d'étudier les réseaux à invariants égaux. J'ai complété un autre théorème de M. KOENIGS, concernant certaines coniques attachées à un réseau à invariants égaux et en revenant au réseau plan défini par (6) j'ai montré qu'il se reproduit après trois transformations de Laplace (\*).

De sorte qu'en faisant correspondre à une congruence  $W$  de notre espace un réseau quadratique d'un espace à cinq dimensions, j'ai été naturellement conduit à considérer d'une manière spéciale les congruences  $W$  dont l'image est un réseau à invariants égaux.

Un troisième théorème de M. KOENIGS, appliqué à un tel réseau et à une des deux congruences quadratiques conjuguées donne un nouveau réseau quadratique à invariants égaux, à partir duquel on peut continuer la même opération. En revenant à notre espace on obtient une suite de Laplace dont toutes les congruences sont  $W$ . Un réseau quelconque de la suite est ce qu'on appelle un réseau  $R$ . C'est de cette manière que je suis arrivé à l'étude des réseaux  $R$  (\*\*).

(\*) *C. R.* le 30 - XI - 1908. J'ai ajouté dans la même Note un second exemple de suite de Laplace périodique et je suis revenu plus tard. (en 1913) sur cette question. Voir le chap. VII de ma *Géom. diff. proj. des réseaux*.

(\*\*) *C. R.*, le 24 - IV et le 4 - XII - 1911, ou bien ma *Géom. diff. proj.* p. 263.

## UNA OSSERVAZIONE BIBLIOGRAFICA

---

Il lettore che desideri conoscere altre ricerche sulla teoria delle superficie  $R$  vegga, oltre a due note di G. FUBINI in corso di stampa nei *Rend. della R. Accademia dei Lincei* (2° Semestre 1926) i seguenti lavori fondamentali del Prof. A. DEMOULIN della Università di Gand :

*Sur les surfaces  $R$  et les surfaces  $\Omega$*  (Comptes Rendus; tome 153, p. 590, 705, 797, 927).

*Sur les congruences qui appartiennent à un complexe linéaire et sur les surfaces  $\Phi$*  (Bull. de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique; 4 mai 1920; pp. 215 - 232) (\*).

---

(\*) Risultati importanti sono contenuti nelle Note dello stesso A.: *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* (C. R. Juillet 1924).

*Sur les surfaces réglées* (C. R. jun 1908) *Sur la théorie des lignes asymptotiques* (C. R. août 1908). *Sur la quadrique de Lie* (C. R. Septembre 1908). *Sur quelques propriétés des surfaces courbes* (C. R. Sept. et Octobre 1908).

---