Počítání s neúplnými čísly

I. Pojem čísla neúplného

In: Karel Hruša (author): Počítání s neúplnými čísly. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1949. pp. 3–14.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403247

I. POJEM ČÍSLA NEÚPLNÉHO

1. Základní úvahy. Velkou většinu čísel, s nimiž provádíme početní operace, neznáme zcela přesně, nýbrž jenom více méně přibližně. Příčiny tohoto faktu jsou několikeré, zmíníme se podrobněji o několika z nich.

1,1. U mnohých čísel je sice znám předpis, podle něhož se lze k hodnotám těchto čísel přiblížiti s libovolnou předem danou přesností, ale k přesnému vyjádření takových čísel nemůžeme dospěti konečným počtem kroků. Jako příklad uvedeme číslo psané znakem $\sqrt{2}$, t. j. číslo, jehož druhá mocnina je rovna dvěma. K jeho výpočtu lze použíti výkonu zvaného odmocňování a stanoviti libovolný počet míst tohoto čísla, ale přesně je stanoviti nedovedeme. V tabulkách bývá uváděna jeho hodnota číslem 1,41421, ale to značí toliko, že

$$1{,}414205 < \sqrt{2} < 1{,}414215$$

a více nic. Ostatně snadným výpočtem shledáme, že $1{,}41421^2 = 1{,}9999899241$; odtud je vidno, že číslo 1,41421 není přesná hodnota čísla $\sqrt{2}$. Rozdíl obou čísel, mezi nimiž je $\sqrt{2}$, je 10^{-5}. Kdybychom pokračovali v odmocňování dále, podařilo by se nám lehko číslo $\sqrt{2}$ sevřít mezi dvě čísla o rozdílu ještě menším, ale nalézti desetinné číslo, jež by se přesně rovnalo $\sqrt{2}$, není možno. Obdobně číslo $\sqrt{3}$ je udáno v tabulkách hodnotou 1,73205, což znamená, že

$$1{,}732045 < \sqrt{3} < 1{,}732055.$$

Jestliže však nějaká úloha vede třebas k výpočtu čísla $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, nedovedeme tento výpočet číselně vůbec provést. Z napsaných nerovností vyplývá, že

$$3{,}14625 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}14627,$$

ale žádné z obou posledních čísel není rovno výrazu $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

V praxi ovšem nahrazujeme číslo $\sqrt{2}$ číslem 1,41421 a číslo $\sqrt{3}$ číslem 1,73205 a s těmito náhradními čísly provádíme výpočty, ale musíme si být jasně vědomi toho, že máme co činiti pouze s přibližným vyjádřením daných čísel a že proto také výsledek výpočtu je zase jen přibližný.

1,2. Většina praktických výpočtů vychází z čísel, jež jsme získali nějakým měřením. Každé měření je zatíženo spoustou chyb, spočívajících v nedokonalosti měřicích přístrojů a pozorovatelů, jež nikdy úplně vyloučiti nelze. Ale i kdyby se nám podařilo takové chyby vyloučiti, ani potom by nebylo lze žádné měření provésti zcela přesně. Stupnice každého měřicího přístroje obsahuje totiž určité nejmenší dílky, jejichž počet lze vyčísti přesně, ale můžeme tvrdit, že je naprosto nepravděpodobno, ne-li zcela vyloučeno, aby se krajní bod měřené veličiny přesně kryl s některou dělicí čárkou stupnice, a i kdyby to snad přece nastalo, pak bychom to vůbec nepoznali, neboť nemáme jistotu, nastalo-li opravdu přesné krytí, či je-li to působeno pouze naší nedostatečnou rozlišovací schopností. Můžeme tedy přesně zjistit pouze počet nejmenších jednotek nanesených na stupnici a jejich části můžeme pouze přibližně odhadovat. Užijeme-li jemněji dělené stupnice a dokonalejších pozorovacích method, změříme danou veličinu přesněji, ale i nejjemněji konstruovaný měřicí přístroj musí nutně obsahovati určité dílky jako nejmenší, takže měření dílků ještě menších již nelze provádět. Proto se musíme spokojit tím, že vyslovíme tvrzení, že měřená veličina je sevřena mezi dvěma spolehlivě zjištěnými údaji. Ježto žádná měřená veličina nemůže být změřena přesně, nemůže být ovšem také přesný výsledek, k jehož výpočtu jsme užili naměřených čísel.

1,3. Vedle toho je otázka, do jaké míry je vůbec měřená veličina definována. Měříme-li třeba vzdálenost dvou „bodů" v terénu, nejde nikdy o dva body v tom smyslu, jak tomuto názvu rozumíme v geometrii. Ve skutečnosti můžeme realisovati „bod" jen jako určitou plošku konečných, byť i malých rozměrů, při čemž nevíme, který bod této plošky je právě ten, ke kterému máme měřiti. Tím docházíme k určité hranici přesnosti měření, kterou překročiti nelze.

1,4. Často se setkáváme s čísly, která vyjadřují okamžitý stav nějaké veličiny proměnné. Byl-li na příklad při statistickém šetření zjištěn počet obyvatelů města Prahy o půlnoci ze dne 22. května na den 23. května 1947 číslem 922 284, nemáme nejmenšího důvodu pochybovat o správnosti tohoto čísla. Přece však je zpravidla nahrazujeme jednodušším a snadněji zapamatovatelným číslem jiným, třebas číslem 920 000, neboť počet obyvatelů města Prahy se od té doby dávno změnil, takže by vůbec nemělo smysl pamatovat si jeho přesnou hodnotu. Přitom ovšem víme, že přesná hodnota leží mezi čísly 915 000 a 925 000.

Z uvedených příkladů je patrno, že se s nepřesně stanovenými čísly setkáváme velice často, a to zejména při úvahách, jejichž účel je čistě praktický. Abychom však mohli náležitě zhodnotit význam takových čísel, musíme vědět, do jaké míry se liší od hodnot přesných a vzít to v úvahu při výpočtech.

V této knížce se budeme zabývati početními operacemi s čísly, jejichž hodnotu přesně neznáme nebo se o ni nezajímáme. Předpokládáme, že čtenáři jsou běžné základy matematiky asi v tom rozsahu, jak se probíraly na bývalé střední škole. Vedle toho budeme potřebovati některá pravidla o počítání s nerovnostmi a s absolutními hodnotami, jakož i některé základní věty z počtu diferenciálního asi v tom rozsahu, jak jsou uvedeny v informativní a dobře srozumitelné příručce prof. *E. Čecha*: Co je a nač je vyšší matematika?, která vyšla r. 1942 jako 20. svazek této sbírky a kterou budeme v dalším stručně označovati názvem Čech.

V české literatuře se počítání s čísly nepřesnými soustavně probírá v knize *V. Lásky* a *V. Hrušky*: Theorie a praxe numerického počítání, Praha 1934, JČMF, z níž jsou některé naše úvahy převzaty.

2. Chyba prostá a poměrná. Čísla, jimiž se budeme zabývati, označujeme názvem *čísla neúplná*. Rozumíme tím *dvojici čísel, z nichž jedno je menší a druhé větší než přesná hodnota*, kterou zpravidla neznáme nebo se o ni nezajímáme. Přitom vyslovujeme ještě požadavek, aby rozdíl obou čísel, jimiž je neúplné číslo stanoveno, byl poměrně malý vzhledem k přesné hodnotě neúplného čísla.

Přesnou hodnotu čísla budeme v dalším označovati velkým písmenem, přibližné hodnoty stejně znějícími písmeny malými. Obě daná čísla a_1, a_2, jimiž je neúplné číslo definováno, a pro něž platí

$$a_1 < A < a_2,$$

budeme nazývati *přibližnými hodnotami* čili *aproximacemi* čísla A, a to menší z nich a_1 aproximací *dolní*, větší z nich a_2 aproximací *horní*. Aritmetický průměr a dolní a horní aproximace budeme nazývati aproximací *střední*. Podle toho je

$$a = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

Rozdíl

$$A - a,$$

se nazývá *prostá (absolutní) chyba* čili *nepřesnost* střední aproximace neúplného čísla. Tuto chybu zpravidla udat nedovedeme, ježto neznáme přesnou hodnotu A, ale vzhledem k definici dolní a horní aproximace víme, že

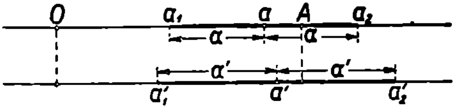
$$\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2) = a_1 - a < A - a < a_2 - a = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1).$$

Číslo $\frac{1}{2}(a_2 - a_1) = \alpha$ budeme nazývati *horní hranice prosté chyby* a budeme je označovati odpovídajícím písmenem řecké abecedy. Z předcházejícího je vidno, že

$$|A - a| < \alpha, \text{ takže } a - \alpha < A < a + \alpha.$$

Je tedy lhostejno, definujeme-li neúplné číslo jeho dolní a horní aproximací nebo střední aproximací a horní hranicí prosté chyby. Číslo α je podstatně kladné, nejvýše ještě připouštíme $\alpha = 0$, ale pak $A = a$, t. j. číslo A je dáno přesně.

Znázorníme-li vše na ose číselné (obr. 1), vidíme, že přesná hodnota A leží vždy uvnitř intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ o šířce 2α, jehož krajními body jsou dolní a horní aproximace a_1, a_2 a který je půlen střední aproximací a. Vzhledem k tomu, že o čísle A jinak nic nevíme, musíme připustit možnost, že jím může býti kterékoliv číslo, pro něž platí $a - \alpha < A < a + \alpha$, takže neúplné číslo je vlastně znázorněno *intervalem* $[a - \alpha, a + \alpha]$ a pravidla o počítání s neúplnými čísly, jež v dalším odvodíme, jsou vlastně pravidly o počítání s intervaly.



Obr. 1.

Z důvodů, které zakrátko vysvitnou, bude výhodné, když v napsaných nerovnostech připustíme na některé straně i znaménko $=$, takže přesná hodnota neúplného čísla by se v krajním případě mohla rovnat i své dolní nebo horní aproximaci, čili

$$a - \alpha \leqq A \leqq a + \alpha, \text{ t. j. } |A - a| \leqq \alpha,$$

kde ovšem $\alpha \geqq 0$. Tyto nerovnosti lze nahraditi rovnicí

$$A = a \pm \Theta\alpha, \text{ kde } 0 \leqq \Theta \leqq 1,$$

což se často méně přesně, avšak stručněji psává

$$A = a \pm \alpha.$$

Této rovnici jest vždy rozuměti tak, jak bylo právě uvedeno.

Nebude-li výslovně uveden opak, omezíme se ve svých úvahách výhradně na čísla kladná. Na počátku tohoto odstavce jsme uvedli požadavek, aby rozdíl mezi horní a dolní aproximací byl poměrně malý vzhledem k přesné hodnotě, čili aby interval, jímž je neúplné číslo definováno, byl dosti úzký. Proto budeme předpokládati, že tento interval obsahuje pouze kladná čísla t. j. že $a > \alpha$.

O tom, jakou úlohu hraje prostá chyba neúplného čísla, učiníme si jasnou představu teprve tehdy, porovnáme-li ji s velikostí některého z čísel, jimiž je neúplné číslo stanoveno. Proto zavádíme pojem *poměrné (relativní) chyby* čili *nepřesnosti*, kterou definujeme některým ze zlomků

$$\frac{A - a}{A}, \quad \frac{A - a}{a}, \quad \frac{A - a}{a - \alpha}, \quad \frac{A - a}{a + \alpha}.$$

Pro určitost můžeme nazývati první zlomek poměrnou chybou neúplného čísla *vzhledem k přesné hodnotě*, další pak poměrnými chybami *vzhledem k střední, dolní a horní aproximaci*. Ježto čitatele těchto zlomků zpravidla neznáme, zavedeme i tu *horní hranici poměrné chyby* vzhledem k přesné hodnotě nebo vzhledem k některé aproximaci, čímž rozumíme zlomky

$$\frac{\alpha}{A}, \quad \frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\alpha}{a - \alpha}, \quad \frac{\alpha}{a + \alpha}.$$

Podle výše vysloveného požadavku je čitatel každého z těchto zlomků proti jmenovateli poměrně malý, takže se hodnoty těchto zlomků navzájem liší jen nepatrně, a proto je celkem lhostejno, který z nich učiníme východiskem svých úvah. Pokud $\alpha > 0$, platí o horních hranicích poměrných chyb

$$\frac{\alpha}{a - \alpha} > \frac{\alpha}{a} > \frac{\alpha}{a + \alpha} \quad \text{a také} \quad \frac{\alpha}{a - \alpha} \geqq \frac{\alpha}{A} \geqq \frac{\alpha}{a + \alpha}.$$

Někdy místo napsaných zlomků bereme jejich stonásobné hodnoty, a pak hovoříme o horních hranicích poměrných chyb vyjádřených v procentech.

Vyslovíme toto pravidlo: Ze dvou neúplných čísel považujeme za přesnější to, jež má menší poměrnou chybu, případně její horní hranici.

Příklad. Měříme-li nějakou délku a shledáme-li že přesná její velikost je větší než třeba 52,3 cm a menší než 52,4 cm, vyjádříme její velikost neúplným číslem (52,35 $\pm$ 0,05) cm. Horní hranice poměrné chyby tohoto údaje vzhledem ke střední aproximaci je 0,05 : 52,35 čili asi 0,0009551; horní hranice poměrné chyby vzhledem k dolní aproximaci je 0,05 : 52,3, t. j. asi 0,0009560, a horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci je 0,05 : 52,4, t. j. 0,0009542. Tyto tři hodnoty se navzájem liší jen nepatrně, takže je lze zhruba vyjádřiti číslem 0,001, čili 0,1%. Naproti tomu údaj (5,26 $\pm$ $\pm$ 0,02) cm, jenž má menší horní hranici prosté chyby, totiž 0,02 cm, je méně přesný, neboť horní hranice jeho poměrné chyby třebas vzhledem ke střední aproximaci 0,02 : 5,26 dosahuje téměř 0,004, čili 0,4%.

Při zběžném odhadu se podaří cvičenému oku provésti tento odhad s poměrnou chybou asi tak 10^{-1}, při hrubém měření jednoduchými měřicími prostředky (jako na příklad měření a vážení v obchodech) zmenší se poměrná chyba asi na 10^{-2}, při přesnějším měření obyčejnými prostředky (viz výše uvedený příklad) snížíme poměrnou chybu asi na 10^{-3} a při velice jemném a pečlivě provedeném měření podaří se nám snížit poměrnou chybu nejvýše asi tak na 10^{-4}. Chceme-li dosáhnouti přesnosti ještě vyšší, třeba užít speciálních měřicích method a přístrojů, jakož i odborně vycvičených pozorovatelů. Je-li číslo určeno přesně, je $\alpha = 0$ a pak také jeho poměrná chyba je rovna nule.

Třeba si uvědomit, že horní a dolní aproximaci, a v důsledku toho i střední aproximaci a horní hranici prosté chyby, lze u neúplného čísla *volit* (aspoň do jisté míry) *libovolně*. To značí, že interval $[a - \alpha, a + \alpha]$, jímž je neúplné číslo $A = a \pm \alpha$ znázorněno, lze nahraditi intervalem jiným $[a' - \alpha', a' + \alpha']$, ovšem takovým, aby všecky hodnoty intervalu původního byly zahrnuty mezi hodnotami intervalu nového. Toho dosáhneme, když bude současně

$$\begin{aligned} a' - \alpha' &\leqq a - \alpha, \\ a' + \alpha' &\geqq a + \alpha. \end{aligned}$$

Platí-li znaménko rovnosti v obou řádcích současně, jsou oba intervaly totožné. Tohoto případu si nebudeme dále všímati.

Odečteme-li prvou nerovnost od druhé, dostaneme $\alpha' > \alpha$, takže nový interval je širší než byl interval původní. Z napsaných nerovností plyne

$$a' - a \leqq \alpha' - \alpha,$$
$$a - a' \leqq \alpha' - \alpha,$$

čili

$$|a' - a| \leqq \alpha' - \alpha,$$

neboť $\alpha' - \alpha$ je kladné, takže

$$\alpha' \geqq \alpha + |a' - a|.$$

Horní hranice prosté chyby se zvětší aspoň o absolutní hodnotu rozdílu středních aproximací, jak je názorně patrno na obr. 1. Znaménko rovnosti však nemůže platit pro $|a' - a| = 0$, neboť pak by oba intervaly byly totožné.

V dalším budeme často libovolně voliti střední aproximaci neúplného čísla i horní hranici jeho prosté chyby, abychom dostali jednoduché výsledky. Budeme se při tom snažit, aby byla splněna právě nalezená nerovnost.

Ježto $\alpha' > \alpha$, je také $\frac{\alpha'}{A} > \frac{\alpha}{A}$. Vzhledem k tomu, že $\alpha' \geqq \alpha + |a' - a|$, je také $\alpha' a - \alpha a' \geqq |a' - a| \,.\, a + \alpha(a - a')$. Mohou nastati dvě možnosti:

1. Buď je $a - a' = |a' - a|$ a pak je $\alpha' a - \alpha a' \geqq |a' - a| \,.\, (a + \alpha)$.
2. Nebo je $a - a' = -|a' - a|$ a pak je $\alpha' a - \alpha a' \geqq |a' - a| \,.\, (a - \alpha)$.

Vzhledem k požadavku, který jsme vytkli před chvilkou, je $a > \alpha \geqq 0$, takže pro $|a' - a| > 0$ je pravá strana vždy kladná a vedle toho pro $|a' - a| = 0$ nemůže platit znaménko rovnosti. Odtud následuje $\alpha' a - \alpha a' > 0$, čili

$$\frac{\alpha'}{a'} > \frac{\alpha}{a} \text{ a zároveň také}$$

$$\frac{\alpha'}{a' + \alpha'} > \frac{\alpha}{a + \alpha}, \quad \frac{\alpha'}{a' - \alpha'} > \frac{\alpha}{a - \alpha}.$$

To však znamená: *Nahradíme-li neúplné číslo znázorněné intervalem* $[a - \alpha, a + \alpha]$ *jiným neúplným číslem, které je znázorněno širším intervalem* $[a' - \alpha', a' + \alpha']$, *zvětší se tím horní hranice poměrné chyby.* To má podle předcházejícího za následek snížení přesnosti.

Cvičení. **1.** Československý národní prototyp metru má při 0° C délku 1 m + 0,1μ $\pm$ 0,1μ a československý národní prototyp kilogramu má hmotu 1 kg + 0,504 mg $\pm$ 0,002 mg. Stanovte horní hranice poměrných chyb a porovnejte přesnost obou měření. — [U kilogramu je asi 50krát větší.]

2. Podle našeho cejchovního řádu jsou povoleny u dřevěných měřítek horní hranice poměrných chyb ve výši 0,75‰. Jaká je horní hranice povolené prosté chyby u měřítka délky 1 m, 2 m, 4 m?

3. Zaokrouhlování čísel dekadických. Velká většina čísel, s nimiž počítáme, bývá vyjádřena v desítkové soustavě. Chceme-li je nahraditi přibližnými hodnotami, činíme tak několikerým způsobem.

3,1. Zaokrouhlování bez opravy. Z čísla ponecháme jen několik nejvyšších míst a ostatní vynecháme. Abychom naznačili, že některé číslice jsou vynechány, píšeme místo nich, je-li to za desetinnou čárkou, několik teček, a je-li to před desetinnou čárkou, nahrazujeme vynechané číslice malými nulami. Horní hranice prosté chyby takto zaokrouhleného čísla je rovna polovině jednotky posledního ponechaného místa. Je-li v zaokrouhleném čísle ponecháno n desetinných míst, je horní hranice prosté chyby $0{,}5 \cdot 10^{-n} = 5 \cdot 10^{-n-1}$.

Tak na příklad číslo π zaokrouhlujeme bez opravy na čtyři desetinná místa hodnotou 3,1415 ..., což znamená, že $\pi = 3{,}14155 \pm 0{,}00005$. Zaokrouhlený počet obyvatelů města Prahy, uvedený v odst. 1, lze zapsati znakem 92o ooo, což je totéž jako 925 000 $\pm$ 5000. Číslo $\sqrt{3}$ zaokrouhlené bez opravy na čtyři desetinná místa je 1,7320 .... Horní hranice prosté chyby tu je $5 \,.\, 10^{-5}$. Nulu na posledním místě vynechati nelze, neboť údaj 1,732 ... znamená $1{,}7325 \pm \pm 5 \,.\, 10^{-4}$, t. j. neúplné číslo, jehož horní hranice prosté, a tedy i poměrné chyby je desetkrát větší.

3,2. Zaokrouhlování s opravou. Z čísla ponecháme jen několik míst nejvyššího řádu a ostatní vynecháme, při čemž poslední ponechanou číslici:

a) necháme beze změny, je-li prvá z vynechaných číslic menší než 5 (zaokrouhlování sestupné) nebo

b) zvýšíme ji o 1, je-li prvá z vynechaných číslic pětka, za níž následuje (na kterémkoliv dalším místě) aspoň jedna číslice různá od nuly, nebo je-li prvá z vynechaných číslic větší než 5 (zaokrouhlování vzestupné).

Je-li prvá z vynechaných číslic pětka, za níž následují vesměs nuly, je lhostejno, kterého způsobu použijeme. Jestliže při zaokrouhlování vzestupném jedna nebo několik posledních ponechaných číslic jsou devítky, nahradíme je nulami a zvýšíme o 1 tu poslední číslici, jež je různá od devítky.

I tu je horní hranice prosté chyby rovna polovině jednotky posledního ponechaného místa. Je-li ponecháno n desetinných míst, je horní hranice prosté chyby $5 \,.\, 10^{-n-1}$. Abychom mohli zaokrouhliti i přesná čísla končící pětkou, připustili jsme v odst. 2, že přesná hodnota se může rovnat své dolní nebo horní aproximaci.

Tohoto způsobu zaokrouhlování se užívá častěji, neboť při stejné horní hranici prosté chyby jako při zaokrouhlování bez opravy je střední aproximace vyjádřena číslem, jež má o jednu číslici méně.

Čísla zaokrouhlená s opravou zpravidla neoznačujeme žádným zvláštním způsobem, toliko čísla celá zakončená nulami se doporučuje psát ve tvaru součinu, jehož jedním činitelem je celistvá mocnina deseti, aby nemohla vzniknout pochybnost, které z nul jest považovati za přesné. Že jde o zaokrouhlování s opravou, vyznačujeme tím, že mezi znaky, jimiž zapisujeme přesnou hodnotu, a mezi hodnotu zaokrouhlenou klademe rovnítko, nad něž děláme tečku. V tomto smyslu také budeme znaku $\doteq$ v celé této knížce užívat.

Podle toho je na příklad $\pi \doteq 3{,}1416$, což znamená $\pi = 3{,}1416 \pm 5 \cdot 10^{-5}$. Počet obyvatelů města Prahy lze zapsati číslem $9{,}2 \cdot 10^5$ nebo také $92 \cdot 10^4$, což obojí je $920\,000 \pm 5000$. Napíšeme-li, že $\log 2 \doteq 0{,}3010$, znamená to $\log 2 = 0{,}3010 \pm 5 \cdot 10^{-5}$, kdežto $\log 2 \doteq 0{,}301$ by znamenalo jen, že $\log 2 = 0{,}301 \pm 5 \cdot 10^{-4}$. Ani tu tedy nelze nulu na posledním místě vynechat.

Jakási potíž vzniká, máme-li znovu zaokrouhlovati číslo, jež bylo již jednou zaokrouhleno, a je-li pětka, jež stojí na posledním místě, tou číslicí, kterou máme vynechat. Tak na příklad podle pětimístné tabulky je $\sqrt{3} \doteq 1{,}73205$. Chceme-li tuto hodnotu zaokrouhlit na čtyři desetinná místa, jsme na rozpacích, máme-li psát 1,7320 či 1,7321, neboť nevíme, zda číslo 1,73205 vzniklo zaokrouhlením sestupným či vzestupným. Proto bývá zvykem pětku vzniklou vzestupným zaokrouhlením nějak označovati (Valouchovy tabulky logaritmické užívají znaku $\bar{5}$). Pak se tyto označené pětky zaokrouhlují sestupně a pětky neoznačené se zaokrouhlují vzestupně. Ježto je v tabulce uvedeno $\sqrt{3} \doteq 1{,}73205$, zaokrouhlíme na 1,7321. Naproti tomu $\operatorname{tg} 15° \doteq 0{,}2679\bar{5}$ zaokrouhlíme na 0,2679. Podobně je tomu, vyskytují-li se v zaokrouhleném čísle za pětkou vesměs nuly. Podle toho $\sqrt[3]{57} \doteq 3{,}84850$ zaokrouhlíme na 3,849 kdežto $\sqrt{39} \doteq 6{,}24\bar{5}00$ třeba zaokrouhliti na 6,24.*)

*) Při zaokrouhlování *přesných* čísel se ustálila v účetnické praxi tato konvence: Jestliže číslo končí pětkou a je-li předposlední číslice sudá, při vynechávání této pětky zaokrouhlujeme sestupně, je-li předposlední číslice lichá, zaokrouhlujeme vzestupně. Podle toho číslo 2,365 zaokrouhlíme na 2,36, kdežto 6,095 zaokrouhlíme na 6,10. Pro nás však toto pravidlo nemá žádný význam.

3,3. Při výpočtu horních hranic chyb třeba dbát toho, abychom zaokrouhlováním horní hranici nesnížili pod přípustnou hodnotu. Proto hranice chyb zpravidla zaokrouhlujeme vzestupně i tehdy, když poslední ponechaná číslice je menší než 5. Toliko tehdy, když sestupným zaokrouhlením horní hranici chyby snížíme jen nepatrně, lze připustiti zaokrouhlování sestupné. Tak na příklad číslo $47{,}262 \pm 0{,}034$ zaokrouhlíme na $47{,}26 \pm 0{,}04$, kdežto u čísla $1{,}35687 \pm 0{,}00112$ lze připustit zaokrouhlování hodnotou $1{,}357 \pm 0{,}001$. Vždy však je radno přezkoušet, zda se dolní a horní aproximace zaokrouhlením příliš nezmění. Viz nerovnosti na konci odst. 2.

Cvičení. **3.** Byla-li střední aproximace čísla A vypočtena tak, aby horní hranice prosté chyby byla menší než 10^{-n-1}, a byla-li vypočtená aproximace potom zaokrouhlena s opravou na n desetinných míst, stojí na posledním místě táž číslice, jako kdybychom číslo A přímo zaokrouhlili s opravou na n desetinných míst, s jedinou výjimkou, která může nastati, je-li na $(n+1)$ním desetinném místě ve střední aproximaci čtyrka nebo pětka. Dokažte! — [Posuďte, které číslice mohou být na $(n+1)$ním desetinném místě dolní a horní aproximace.]

4. Horní hranice poměrné chyby čísla zaokrouhleného na p cifer je menší než $5 \cdot 10^{-p} : a_0$, kde a_0 je nejvyšší číslice zaokrouhleného čísla. Dokažte!*)

*) Mluvíme-li o číslicích (cifrách), jimiž je nějaké číslo zapsáno, máme vždy na mysli pouze t. zv. *platné číslice*, k nimž nepočítáme nuly, které jsou na počátku čísla. První platnou číslici zleva budeme označovati názvem *nejvyšší číslice*. Jednotku stojící na místě p-té platné číslice zleva budeme nazývat *jednotka p-tého místa*.