

Determinanty a matice v teorii a praxi

3. Soustava homogenních lineárních rovnic

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v teorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 18–22.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403288>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

3. SOUSTAVA HOMOGENNÍCH LINEÁRNÍCH ROVNIC.

Budiž dána soustava m homogenních lineárních rovnic o n neznámých

$$f_i \equiv \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_{\nu} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

Rovnice tohoto systému nazýváme nezávislými, jsou-li nezávislé soustavy (1), t. j. soustavy jejich koeficientů; obecně nazýváme hodnot h matice koeficientů rovnic (18) hodnotí soustavy (18).

Budiž hodnota této soustavy h a ptejme se, jaký má tento fakt důsledek pro rovnice samotné. Podle věty 1. lze v matici $\|a_{ik}\|$ soustavy nalézt h řádků lineárně nezávislých, jichž jsou všechny ostatní lineárními kombinacemi. Upravíme-li pořadí rovnic (18) a neznámých v nich tak, aby h -řadový nenulový determinant, který v matici $\|a_{ik}\|$ jistě existuje, byl determinant A_h daný vztahem (5), existují tedy čísla $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1h}$, která nejsou všechna rovna nule, tak, že platí rovnice

$$a_{l\nu} = \sum_{k=1}^h c_{lk} a_{k\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad l = h+1, \dots, m. \quad (a)$$

Násobíme-li je po řadě $x_1, x_2, \dots, x_n$ a sečteme, dostáváme

$$\sum_{\nu=1}^n a_{l\nu} x_{\nu} = \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} \sum_{k=1}^h c_{lk} a_{k\nu} = \sum_{k=1}^h c_{lk} \sum_{\nu=1}^n a_{k\nu} x_{\nu} = \sum_{k=1}^h c_{lk} f_k,$$

t. j. rovnice

$$f_l = c_{11}f_1 + c_{12}f_2 + \dots + c_{1h}f_h, \quad l = h+1, \dots, m. \quad (b)$$

Je-li tedy hodnota soustavy (18) h , lze v ní nalézt (alespoň jedním způsobem) h rovnic navzájem lineárně nezávislých;

levé strany zbývajících $m - h$ rovnic jsou lineárními kombinacemi levých stran oněch prvních h rovnic. Každou soustavu h navzájem nezávislých rovnic nazýváme redukovanou. Je pak zřejmo, že se při vyhledávání řešení systému rovnic (18) můžeme omeziti na řešení soustavy redukované, t. j. v našem případě soustavy

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_h = 0. \quad (19)$$

Frobenius konstruoval systém $n - h$ navzájem nezávislých řešení soustavy (19), z nichž lze každé jiné řešení této soustavy — a tedy také systému (18) — lineárně zkombinovati. Tento „*fundamentální systém*“ řešení najdeme tím, že v n -řadovém determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1h}, & a_{1,h+1}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1}, & a_{h2}, & \dots, & a_{hh}, & a_{h,h+1}, & \dots, & a_{hn} \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 1 \end{vmatrix}, \quad (20)$$

který má hodnotu $A_h \neq 0$, napíšeme $n - h$ soustav doplňků prvků posledních $n - h$ řádků:

$$D_{q1}, D_{q2}, \dots, D_{qn}, \quad q = h + 1, \dots, n. \quad (20')$$

Každá z těchto soustav je řešením rovnic (19). Je totiž skutečně

$$f_k(D_{q1}, \dots, D_{qn}) = \sum_{v=1}^n a_{kv} D_{qv} = 0$$

$$\text{pro } k = 1, 2, \dots, h, \quad q = h + 1, \dots, n;$$

to plyne z formulí (12) v prvním dílu. Téměř na první pohled je patrné, že i každá lineární kombinace soustav (20') je řešením rovnic (19).

Dále jsou řešení (20') navzájem nezávislá v tom smyslu, jak jsme tento pojem definovali v odst. 1. Rovnice

$$\sum_{q=h+1}^n c_q D_{q\nu} = 0, \nu = 1, 2, \dots, n \quad (\text{a})$$

lze totiž splniti pouze tím, že položíme $c_{h+1} = c_{h+2} = \dots = c_n = 0$. Označíme-li totiž σ -tou ($\sigma = h+1, \dots, n$) řádku determinantu D řadou $d_{\sigma 1}, d_{\sigma 2}, \dots, d_{\sigma n}$ (jsou to samé nuly, až na jediný prvek rovný 1) a sečteme rovnice (a) znásobené po řadě těmito čísly $d_{\sigma\nu}$, najdeme

$$0 = \sum_{\nu=1}^n d_{\sigma\nu} \sum_{q=h+1}^n c_q D_{q\nu} = \sum_{q=h+1}^n c_q \sum_{\nu=1}^n d_{\sigma\nu} D_{q\nu} = c_\sigma D = c_\sigma A_h,$$

tedy (protože je $A_h \neq 0$) nutně

$$c_\sigma = 0, \sigma = h+1, \dots, n. \quad (\text{b})$$

Zbývá ještě ukázati, že libovolné řešení $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ systému (19) lze z lineárně nezávislých řešení (20') lineárně zkombinovati, t. j., že lze nalézt konstanty λ_q ($q = h+1, \dots, n$) tak, že platí rovnice

$$\xi_\nu = \sum_{q=h+1}^n \lambda_q D_{q\nu}, \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{c})$$

Tyto konstanty určíme z požadavku, aby výrazy $\xi_\nu - \sum_{q=h+1}^n \lambda_q D_{q\nu}$

byly všechny (t. j. pro $\nu = 1, 2, \dots, n$) řešením oněch $n - h$ homogenních rovnic, které mají posledních $n - h$ řádků determinantu (20) za matici svých koeficientů, tedy rovnice

$$d_{\sigma 1}x_1 + d_{\sigma 2}x_2 + \dots + d_{\sigma n}x_n = 0, \sigma = h+1, \dots, n. \quad (\text{d})$$

Musí tudíž platit

$$0 = \sum_{\nu=1}^n d_{\sigma\nu} (\xi_\nu - \sum_{q=h+1}^n \lambda_q D_{q\nu}) = \sum_{\nu=1}^n d_{\sigma\nu} \xi_\nu - \sum_{q=h+1}^n \lambda_q \sum_{\nu=1}^n d_{\sigma\nu} D_{q\nu} = \xi_\sigma - \lambda_\sigma D,$$

t. j. pro λ_σ máme vztahy

$$\lambda_\sigma = \frac{\xi_\sigma}{D} = \frac{\xi_\sigma}{A_h}, \sigma = h+1, \dots, n. \quad (\text{e})$$

Výsledky, k nimž jsme tu dospěli, vyslovíme souborně větou 6. Soustavu m lineárních homogenních rovnic o n neznámých a hodnoti h řešíme tak, že vyhledáme h rovnic lineárně nezávislých a podle vzorce (20') stanovíme fundamentální systém řešení. Z nich pak lze všechna řešení dané soustavy lineárně zkombinovati.

Příklady.

10. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &+ 3x_4 = 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Hodnost soustavy jest (v. př. 1.) rovna $h = 2$. Redukovaná soustava jest

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &+ 3x_4 = 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a determinant D pak:

$$D = \begin{vmatrix} 5, & -2, & 0, & 3 \\ 7, & 6, & -4, & 7 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Jednoduchý výpočet vede k hodnotám

$$\begin{aligned} D_{31} &= 8, \quad D_{32} = 20, \quad D_{33} = 44, \quad D_{34} = 0; \\ D_{41} &= -32, \quad D_{42} = -14, \quad D_{43} = 0, \quad D_{44} = 44. \end{aligned}$$

Fundamentální systém se skládá ze dvou lineárně nezávislých řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= 8, & x_2 &= 20, & x_3 &= 44, & x_4 &= 0 \\ x_1 &= -32, & x_2 &= -14, & x_3 &= 0, & x_4 &= 44, \end{aligned} \quad (21')$$

z nichž lze každé jiné řešení soustavy (21) lineárně zkombinovati. Má tedy soustava (21) nekonečně mnoho řešení, jež lze všechna vyjádřiti vzorci

$$x_1 = 8(\lambda_3 - 4\lambda_4), \quad x_2 = 2(10\lambda_3 - 7\lambda_4), \quad x_3 = 44\lambda_3, \quad x_4 = 44\lambda_4; \quad (21'')$$

v nich jsou λ_3, λ_4 libovolná čísla reálná.

11. Příklad $n - 1$ homogenních rovnic o n neznámých a hodnoti $h = n - 1$.

Rovnice tvoří zřejmě redukovanou soustavu. Označíme-li znakem A_ν determinant matice, která vznikne z matice soustavy vynecháním ν -tého sloupce, má fundamentální systém (20') tvar

$$D_{n\nu} = (-1)^{n+\nu} A_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

takže lze řešení psát ve tvaru

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = A_1 : -A_2 : \dots : (-1)^{n+1} A_n. \quad (22)$$