

Determinanty a matice v teorii a praxi

6. Formy bilineární

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v teorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 34–43.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403291>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

6. FORMY BILINEÁRNÍ.

Bilineární forma dvou řad proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ je součtem n^2 sčítanců tvaru $a_{ik}x_iy_k$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$, a_{ik} reálná), tedy

$$f = \sum_{i,k} a_{ik}x_iy_k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (42)$$

Na označení proměnných ovšem nezáleží, všechny vlastnosti bilineární formy f jsou dány jedinečně maticí $\mathbf{A}$ jejich koeficientů. Proto také mluvíme někdy o bilineární formě $\mathbf{A}$. Hodnost h matice $\mathbf{A}$ je hodností formy, rozeznáváme formy regulární a singulární a vůbec přenášíme na formy bilineární (a také na kvadratické, viz odst. 7.) vyjadřování obvyklé v theorii matic. V tomto smyslu pak můžeme k formě (42) konstruovati reciprokou, transponovanou a kontragredientní.

Protože je f homogenní funkcí 1. stupně proměnných x_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$), lze na ni aplikovati známou identitu *Eulerovu* a psáti

$$f = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \sum_{k=1}^n a_{\nu k} y_k.$$

Nyní však víme, že výraz $\sum_{k=1}^n a_{\nu k} y_k$ stojí na prvním místě

ν -tého řádku matice $\mathbf{A}y$ a že všechny ostatní elementy tohoto řádku jsou nuly. Utvoříme-li tudíž součin matice $\bar{\mathbf{x}}$ (tedy transponované k $\mathbf{x}$) a matice prve zmíněné, dostaneme matici, jež má první hlavní element rovný právě f , všechny ostatní pak nulové. Tuto matici

$$\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}y \quad (43)$$

budeme pokládati za maticový tvar formy (42).

Tak na př. určuje matice prvních tří sloupců soustav (3) bilineární formu

$$f = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 + 7x_2y_1 + 6x_2y_2 - 4x_2y_3 - x_3y_1 - 4x_3y_2 + 2x_3y_3 \quad (44)$$

o hodnoti $h = 2$, tedy formu singulární. Čtenář nechť si vypočítá pro tento případ součin (43).

Doporučuji čtenáři dobře si rozvážit fakt, že výraz (43) se nesmí žádným způsobem ztotožňovati s formou (42) — to plyne už z té okolnosti, že forma f je polynom, kdežto výraz (43) matice, tedy matematický útvar docela jiné povahy (matice nejsou veličiny, nýbrž pouhá schemata, systémy čísel). Součin (43) je spíše jakýmsi „maticovým obrazem“ bilineární formy f . Pro uvedené „maticové obrazy“ forem bilineárních (a také jiných; tento pojem je zřejmě schopen rozšíření a zobecnění) platí ovšem obvyklá aritmetika a algebra matic (jak jsme podali její počátky v odst. 9. prvního dílu). Zajímavá je otázka, co se děje s „maticovými obrazy“ forem, transformací a pod., když s jejich „originály“ $f_1, f_2, \dots$ (a to jsou v případech, které zde máme na mysli, pouhé polynomy) provádíme různé operace matematické. Není bohužel možno zabývati se zde blíže těmito věcmi, protože by tím jednak rozsah spisku neúměrně vzrostl a za druhé nejsou zatím příslušné úvahy technicky důležité.

V každém případě je však nutno si uvědomiti, že už v celém odst. 5. vlastně pracujeme s „maticovými obrazy“. Čtenář, který chce výklad dokonale pochopit, učiní dobře, když si ověří jednotlivé jeho fáze na konkrétních numerických příkladech a pod.

V další úvaze se ovšem přidržíme obvyklého postupu a budeme se symbolem (43) a s příslušnou formou f (jejich vzájemné přiřazení je, theoreticky vzato, jednojednoznačné) pracovati podle pravidel již dříve odvozených (pouze pojmenování „maticový obraz“, nebo „obraz“ budeme občas používati).

Transformujme formu (42) transformací

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}_1 \mathbf{X}, \mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}; \quad (45)$$

dostáváme její obraz ve tvaru (dokažte si napřed formuli $\overline{AB} = \overline{BA}$)

$$\overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{C}}_1 \mathbf{A} \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}, \quad (46)$$

z něhož je patrné, že transformovaná forma je opět bilineární v nových proměnných X_ν, Y_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$), avšak s maticí $\overline{\mathbf{C}}_1 \mathbf{A} \mathbf{C}_2$. Odtud a z př. 1, str. 86 části plyne jednoduchý (avšak důležitý) důsledek, že se hodnota formy (42) nemění regulárními transformacemi proměnných.

Budiž na př. předložena úloha transformovati formu (44) do nových proměnných X_ν, Y_ν ($\nu = 1, 2, 3$) substitucemi (obě jsou regulární)

$$\mathbf{C}_1 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 2 \\ -1, & 1, & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{vmatrix} -2, & 4, & 3 \\ 5, & 1, & -1 \\ -3, & 0, & 2 \end{vmatrix}.$$

Podle vzorce (46) dostaneme novou bilineární formu s maticí

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{C}}_1 \mathbf{A} \mathbf{C}_2 &= \begin{vmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \\ -1, & 2, & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5, & -2, & 0 \\ 7, & 6, & -4 \\ -1, & -4, & 2 \end{vmatrix} \\ &\cdot \begin{vmatrix} -2, & 4, & 3 \\ 5, & 1, & -1 \\ -3, & 0, & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 32, & 60, & 19 \\ -24, & -8, & 5 \\ 76, & 50, & -3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

tedy formu

$$F = 32X_1Y_1 + 60X_1Y_2 + 19X_1Y_3 - 24X_2Y_1 - 8X_2Y_2 + 5X_2Y_3 + 76X_3Y_1 + 50X_3Y_2 - 3X_3Y_3. \quad (47)$$

Potvrďte si tento výsledek přímým dosazením nových proměnných do výrazu (44) a také to, že forma (47) má zase hodnotu $h = 2$.

Nyní si dokážeme tuto základní větu o bilineárních formách:

Věta 9. Bilineární formu (42) o hodnotě $h < n$ je možno regulárními lineárními transformacemi uvést na bilineární formu dvou řad po h proměnných.

Důkaz. Za daného předpokladu má soustava

$$\sum_{v=1}^n a_{iv} x_v = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (a)$$

$n - h$ nezávislých řešení. Najdeme je a označíme

$$\xi_{1q}, \xi_{2q}, \dots, \xi_{nq}, \quad q = h + 1, \dots, n; \quad (b)$$

za dovoleného předpokladu, že $(n - h)$ -řadový nenulový determinant se dá sestavit z posledních $n - h$ sloupců soustav (b) (to znamená eventuelně jen přechíslování druhé řady proměnných v dané bilineární formě), konstruuje n -řadovou matici (dokažte, že je regulární)

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0, & \xi_{1,h+1}, & \dots, & \xi_{1n} \\ 0, & 1, & \dots, & 0, & \xi_{2,h+1}, & \dots, & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 1, & \xi_{h,h+1}, & \dots, & \xi_{hn} \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & \xi_{h+1,h+1}, & \dots, & \xi_{h+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & \xi_{n,h+1}, & \dots, & \xi_{nn} \end{vmatrix}. \quad (48)$$

Transformujeme-li pak proměnné y v dané bilineární formě lineární substitucí

$$y = B_1 Y \quad (49)$$

dostaneme novou v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$; $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ a s maticí AB_1 , která má obecný prvek $(b_{ik}, i, k = 1, 2, \dots, n$ jsou prvky matice $B_1)$

$$p_{ik} = \sum_{v=1}^n a_{iv} b_{vk} = a_{ik} \quad \text{pro } k \leq h, \\ p_{ik} = \sum_{v=1}^n a_{iv} b_{vk} = \sum_{v=1}^n a_{iv} \xi_{vk} = 0 \quad \text{pro } k \geq h + 1. \quad (c)$$

Má tudíž nová bilineární forma matici, jejichž prvních h sloupců je stejných, jako u matice původní, posledních pak $n - h$ sloupců je tvořeno samými nulami. Tato nová matice má ovšem stejnou hodnotu h jakou měla původní.

Rovnice

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu\kappa} x_{\nu} = 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots, h \quad (d)$$

mají fundamentální systém řešení

$$\eta_{q1}, \eta_{q2}, \dots, \eta_{qn}, \quad q = h + 1, \dots, n. \quad (e)$$

Za předpokladu, že opět lze nenulový determinant sestavit z $n - h$ posledních sloupců soustav (e) (to znamená v případě nutnosti jenom přechíslování prvé řady proměnných v původní bilineární formě), sestrojíme regulární matici

$$B_2 = \begin{vmatrix} 1, 0, \dots, 0, \eta_{h+1,1}, & \dots, \eta_{n1} \\ 0, 1, \dots, 0, \eta_{h+1,2}, & \dots, \eta_{n2} \\ \dots & \dots \\ 0, 0, \dots, 1, \eta_{h+1,h}, & \dots, \eta_{nh} \\ 0, 0, \dots, 0, \eta_{h+1,h+1}, & \dots, \eta_{n,h+1} \\ \dots & \dots \\ 0, 0, \dots, 0, \eta_{h+1,n}, & \dots, \eta_{nn} \end{vmatrix} \quad (50)$$

a podrobíme také ještě proměnné x lineární transformaci

$$x = B_2 X. \quad (51)$$

Tím přechází částečně již transformovaná bilineární forma v konečný tvar — bilineární formu s maticí $\bar{B}_2 A B_1$ a s obecným prvkem $(\beta_{ik}, i, k = 1, 2, \dots, n$ je obecný element matice $B_2)$

$$q_{ik} = \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu i} p_{\nu k} = \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu i} a_{\nu k} = a_{ik} \quad \text{pro } i, k \leq h, \quad q_{ik} = 0 \\ \text{pro } k \geq h + 1, \quad q_{ik} = 0 \quad \text{pro } i \geq h + 1, \quad k \leq h. \quad (f)$$

Úhrnem tedy můžeme říci: Dvěma regulárními lineárními transformacemi (49), (51) se nám podařilo transformovat původní bilineární formu (42) na tvar

$$\sum_{i,k} a_{ik} X_i Y_k, \quad i, k = 1, 2, \dots, h, \quad (52)$$

o němž mluví věta 9.

Proveďme tento postup numericky pro formu (44) o hodnotě $h = 2$. Systém (a) jest zde

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a řešení (b) — zde jediné — je podle vzorce (22) dáno úměrou

$$\xi_{13} : \xi_{23} : \xi_{33} = 8 : 20 : 44 = 2 : 5 : 11;$$

volíme

$$\xi_{13} = 2, \quad \xi_{23} = 5, \quad \xi_{33} = 11.$$

Matice (48) má pak tvar

$$\mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & 11 \end{vmatrix}.$$

Systém (d) bude:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a jeho řešení (e)

$$\eta_{31} : \eta_{32} : \eta_{33} = -22 : 22 : 44 = -1 : 1 : 2;$$

položíme ovšem

$$\eta_{31} = -1, \quad \eta_{32} = 1, \quad \eta_{33} = 2.$$

Matice (50) pak jest

$$\mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 2 \end{vmatrix}.$$

Transformacemi

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 - X_3, & y_1 &= Y_1 + 2Y_3 \\x_2 &= X_2 + X_3, & y_2 &= Y_2 + 5Y_3 \\x_3 &= 2X_3, & y_3 &= 11Y_3\end{aligned}$$

musí tedy forma (44) přejíti ve tvar

$$5X_1Y_1 - 2X_1Y_2 + 7X_2Y_1 + 6X_2Y_2. \quad (53)$$

Přesvědčte se, že tomu tak skutečně jest a vypočítejte také matici $\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{A}\mathbf{B}_1$.

Jest zřejmé, že při formě o hodnoti h je počet proměnných h (pro x i pro y) nejmenší počet, na který lze formu redukovat. Kdyby existoval počet nižší než h , musila by příslušná transformovaná forma, ježto povstala z dané regulárními transformacemi, míti hodnotu opět h — to ovšem není při počtu proměnných menším než h možno.

Dále jsme získali prostředek, jak libovolnou matici $\mathbf{A}$ o hodnoti h převést násobením regulárními maticemi $\mathbf{B}_1$ zprava a $\bar{\mathbf{B}}_2$ zleva na tvar, který z ní dostaneme prostě tím, že ty prvky a_{ik} , jichž aspoň jeden index je větší než h , nahradíme nulami, ostatní pak ponecháme. Nahlédneme opět snadno, že tato redukce je nejvyšší možná.

Bilineární forma (52) je už regulární s maticí $\mathbf{A}_1 = \|a_{ik}\|$, $i, k = 1, 2, \dots, h$. Lineární regulární transformací (všechny matice jsou zde h -řadové, což je odchylkou od úmluvy v odst. 9. první části)

$$\mathbf{X} = (\bar{\mathbf{A}}_1)^{-1}\mathbf{x}', \quad \mathbf{Y} = \mathbf{y}' \quad (54)$$

přechází v bilineární formu s obrazem

$$\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{y}' = \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{y}', \quad (55)$$

t. j. ve formu

$$x_1'y_1' + x_2'y_2' + \dots + x_h'y_h'. \quad (56)$$

Toto jest t. zv. *normální tvar*, na který tedy lze každou

bilineární formu o hodnotě h uvést. Tak máme v případě formy (53):

$$A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}, \quad (A_1)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{6}{44} & -\frac{7}{44} \\ \frac{2}{44} & \frac{5}{44} \end{vmatrix},$$

takže zde vede k cíli substituce

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{6}{44}x_1' - \frac{7}{44}x_2', & Y_1 &= y_1' \\ X_2 &= \frac{2}{44}x_1' + \frac{5}{44}x_2', & Y_2 &= y_2'. \end{aligned}$$

Potvrďte skutečným výpočtem, že převádí formu (53) na normální tvar

$$x_1'y_1' + x_2'y_2'.$$

Na konec se ještě zmíníme o jistém druhu vyjádření bilineárních forem, kteréžto je východiskem při studiu jejich souvislosti s vyššími komplexními (hyperkomplexními) čísly.

Budiž F_{ik} n -řadová matice s jediným nenulovým prvkem, který stojí v i -tém řádku na jeho k -tém místě a má hodnotu 1; ostatní elementy této matice buďtež nulové. Pro násobení takových speciálních matic platí vzorec :

$$F_{ik}F_{lm} = \delta_{kl}F_{im}, \quad i, k, l, m = 1, 2, \dots, n. \quad (57)$$

Označíme-li totiž obecný element prvního faktoru na levé straně této rovnice znakem f_{re} , obecný element druhého faktoru pak symbolem φ_{re} ($r, e = 1, 2, \dots, n$), má součin na levé straně obecný prvek

$$p_{rs} = \sum_{e=1}^n f_{re}\varphi_{es},$$

takže je zřejmé $p_{rs} = 0$ pro $r \neq i$, $s \neq m$. Jediný úvahy-hodný prvek tedy je

$$p_{im} = \sum_{e=1}^n f_{ie}\varphi_{em};$$

protože však jest $f_{iq} = \delta_{iq}$, $\varphi_{qm} = \delta_{qm}$, máme dále

$$p_{im} = \sum_{q=1}^n \delta_{iq} \delta_{qm} = \delta_{im}.$$

Je tudíž součin na levé straně rovnice (57) roven n -řadové matici s elementy p_{im} , vesměs nulovými až na prvek p_{im} , který má hodnotu δ_{im} (δ_{im} je stále Kroneckerův symbol). To však je právě matice stojící na pravé straně vzorce (57).

Bilineární forma s maticovým obrazem $\bar{\mathbf{x}} \mathbf{F}_{ik} \mathbf{y}$ je velmi jednoduchá, totiž $x_i y_k$, takže lze každou bilineární formu

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

zobraziti také ve tvaru

$$\sum_{i,k} a_{ik} \mathbf{x} \mathbf{F}_{ik} \mathbf{y} \quad (58)$$

a nezáleží-li nám právě na tom, jaké má forma proměnné, lze ji zobraziti i ve tvaru

$$\sum_{i,k} a_{ik} \mathbf{F}_{ik}. \quad (58')$$

Tento druhý způsob psaní už přímo vede k souvislosti bilineárních forem s vyššími čísly komplexními. Stačí, abychom výrazy $\mathbf{F}_{ik}$ interpretovali jako n^2 nezávislých jednotek komplexního čísla.

Funkce (85) resp. (87) první části se jmenuje *charakteristickou funkcí dané formy bilineární*, rovnice vzniklá tím, že tuto charakteristickou funkci položíme rovnu nule, jest pak charakteristickou rovnicí dané formy. Seznámíme se s ní blíže v pojednání o formách Hermiteových (v odst. 12.).

Poznámka. Je-li matice bilineární formy (42) *souměrná* (t. j. platí-li $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$), nazýváme *formu souměrnou*. Transformujeme-li v ní obě řady proměnných toutéž lineární substitucí $\mathbf{C}$, dostaneme opět formu bilineární

souměrnou. Výsledná forma bude totiž míti podle vzorce (46) matici $\bar{\mathbf{C}}\mathbf{A}\mathbf{C}$, jejíž obecný prvek γ_{ik} má tvar

$$\gamma_{ik} = \sum_{q=1}^n c_{qi} \sum_{v=1}^n a_{qv} c_{vk} = \sum_{q,v} c_{qi} a_{qv} c_{vk} = \sum_{v,q} c_{vk} a_{vq} c_{qi} = \gamma_{ki},$$

$$i, k = 1, 2, \dots, n;$$

transformovaná forma je tedy vskutku souměrná.

Jde-li na př. o formu s maticí

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0, & 3, & -1 \\ 3, & 2, & 1 \\ -1, & 1, & 0 \end{vmatrix}$$

a je-li dále

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 2 \\ -1, & 1, & 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \\ -1, & 2, & 0 \end{vmatrix},$$

dostáváme po krátkém počítání matici transformované formy

$$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 8, & 0, & 4 \\ 0, & 0, & 3 \\ 4, & 3, & -4 \end{vmatrix};$$

ta pak je vskutku souměrná.