Cremonovy transformace

In: Dana Trkovská (author): Historický vývoj geometrických transformací. (Czech). Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2015. pp. 51–67.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/403410`

3. Cremonovy transformace

Národní obrození Itálie (italské *Risorgimento*) v letech 1848 až 1860 znamenalo též obrození italské matematiky. Řada matematiků se v této době zapojila do bojů proti rakouské nadvládě a přispěla k italské nezávislosti vedoucí až ke sjednocení Itálie po roce 1860. Jedním z aktivních účastníků války za italskou svobodu byl Luigi Cremona, matematik, jenž položil základy teorie biracionálních transformací projektivního prostoru. Tyto transformace, jež jsou po něm pojmenovány, mají velký význam v algebraické geometrii.

Od 60. let 19. století se velká pozornost v matematice soustředila zejména na studium algebraických křivek. Objevovaly se snahy složitější křivky nejprve transformovat s cílem zjednodušit popis jejich vlastností a vzájemných poloh. K tomu lze velmi dobře využít právě biracionální transformace, neboť umožňují zmenšit míru singularity dané křivky. Cremonovy transformace se však brzy z pomocného nástroje staly samostatným objektem matematického zkoumání a podnítily rozvoj nové ucelené oblasti algebraické geometrie. Věnujme se proto nejprve jejich autorovi.

Cremonovy životní osudy jsou podrobně popsány v několika publikacích.[1] Připomeneme proto jen základní životopisné a bibliografické údaje, které nám umožní zařadit jeho práce a výsledky do dobového i odborného kontextu.

3.1 Luigi Cremona

Luigi Cremona[2] se narodil 7. prosince 1830 v Pavii (Lombardie, dnešní Itálie) jako nejstarší ze čtyř dětí právníka Gaudenzia Cremony. Z jeho sourozenců se dospělého věku dožil pouze bratr Tranquillo Cremona (1837–1878), významný italský malíř, další bratr a sestra zemřeli v raném mládí. L. Cremona absolvoval s výborným prospěchem gymnázium v Pavii, poté ho politické události revolučního roku 1848 přiměly další studia přerušit. Jako vášnivý italský vlastenec se aktivně zapojil do hnutí za svobodnou Itálii. Zúčastnil se mimo jiné ozbrojené obrany Benátek před vpádem rakouského vojska, a ačkoliv 24. srpna 1849 Italové rakouskému vojsku podlehli, mohli město opustit se ctí. L. Cremona se poté vrátil do Pavie a na tamní univerzitě vystudoval pozemní stavitelství a architekturu. Z profesorů ho nejvíce ovlivnil Francesco Brioschi (1824–1897).

V srpnu 1854 se L. Cremona oženil s Elisou Ferrari, která v té době působila jako ředitelka mateřské školy v Gênes.[3] Společně vychovali tři děti, syna Vittoria a dcery Elenu a Italu.

---

[1] Např. [Bt], [Lo2], [LC] a [Pr], str. 116–143; relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Cremona.html.

[2] Celým jménem Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona.

[3] L. Cremona se s Elisou Ferrari „seznámil“ prostřednictvím dopisů, jež Elisa posílala svému bratrovi Nicolovi Ferrari, který se společně s L. Cremonou zúčastnil v letech 1848 až 1849 boje proti rakouské nadvládě.

V této době došlo ke změně vlády v Piemontu. Nová vláda pod vedením Camilla Benso di Cavoura[4] iniciovala sjednocení Itálie, avšak Lombardie zůstávala stále pod nadvládou Rakouska. L. Cremona, který proti rakouské okupaci bojoval se zbraní v ruce, tak neměl šanci získat oficiální učitelské místo, a proto působil jako soukromý učitel u několika rodin v Pavii. Přitom se věnoval matematickému bádání a v září 1855 sepsal svůj první článek *Sulle tangenti sfero-coniugate*,[5] který zřejmě ovlivnil jeho další působení. Rozhodnutím ze dne 22. listopadu 1855 získal povolení učit na přechodnou dobu fyziku na gymnáziu, kde sám dříve studoval. V květnu 1856 sepsal další matematický článek *Intorno ad un teorema di Abel*,[6] který mu spolu s pověstí výborného učitele umožnil získat dne 17. prosince 1856 místo mimořádného profesora na gymnáziu v Pavii. O měsíc později, dne 17. ledna 1857, byl jmenován řádným profesorem na gymnáziu v Cremoně, kde setrval necelé tři roky.

Cremonovo působení na obou školách však nebylo nijak jednoduché. Jeho pozice na gymnáziu v Pavii byla nejistá, na gymnáziu v Cremoně zase učil matematiku v šesti ročnících, což týdně obnášelo celkem 17 hodin. Navíc v této době stále chyběly kvalitní italsky psané učebnice, proto L. Cremona pro své žáky ve volných chvílích ještě sepisoval pomocné učební texty.

Roku 1859 se Itálie s pomocí Francie vymanila z rakouského vlivu,[7] Lombardie byla odstoupena a připojena k Piemontu. L. Cremona již proto nemusel z politických důvodů zůstávat v ústraní. Dne 28. listopadu 1859 nastoupil jako profesor na *Liceo S. Alessandro* v Miláně, dne 10. června 1860 byl na základě královského výnosu jmenován řádným profesorem vyšší geometrie na univerzitě v Bologni. Navzdory časově náročné výuce na gymnáziu L. Cremona ještě před svým jmenováním univerzitním profesorem publikoval 18 matematických prací věnovaných zejména studiu křivek pomocí metod projektivní geometrie.

Na univerzitě v Bologni setrval až do října 1867. Během této doby publikoval 45 prací[8] a rozvinul teorii biracionálních transformací, později známých jako tzv. *Cremonovy transformace*. Jeho nejvýznamnější práce věnované transformacím rovinných křivek pocházejí z let 1863 až 1865. Roku 1866 za ně získal tzv. Steinerovu cenu (*the Steiner Prize*).[9]

---

[4] Camillo Benso di Cavour (1810–1861), italský politik, zakladatel italské liberální strany, dne 4. listopadu 1852 byl zvolen předsedou vlády Piemontu. Stal se historicky prvním předsedou italské vlády, od 23. března do 7. června 1861 zastával funkci ministra zahraničních věcí a námořnictva. Byl autorem několika reforem, založil politické noviny *Il Risorgimento* (Turin, 1847). Zemřel necelé tři měsíce po vyhlášení spojeného italského království.

[5] Viz Annali di scienze matematiche e fisiche 6(1855), 382–392.

[6] Viz Annali di scienze matematiche e fisiche 7(1856), 99–105.

[7] Italská válka za nezávislost byla ukončena podepsáním míru ve Villafranca dne 11. července 1859. Spojené italské království bylo oficiálně vyhlášeno dne 17. března 1861.

[8] Dodejme, že mezi těmito pracemi je mimo jiné 16 článků věnovaných řešení úloh uveřejněných v časopise *Nouvelles Annales*, 8 knih přehledového charakteru a 4 historické články sepsané na podporu výzkumu v oblasti geometrie.

[9] Cena byla pojmenována na počest významného švýcarského matematika Jacoba Steinera (1796–1863), který se věnoval zejména syntetické a projektivní geometrii a většinu života vyučoval na berlínské univerzitě. Podle jeho poslední vůle měla být udělována Berlínskou akademií věd každé dva roky za nové výsledky v oblasti syntetické geometrie. Byla dotována částkou 24 000 německých marek, což v té době představovalo částku vyšší než byl průměrný roční

V říjnu 1867 byl L. Cremona na Brioschiho doporučení novým královským výnosem povolán přednášet vyšší geometrii na *Regio Istituto Tecnico Superiore di Milano* (nyní *Politecnico di Milano*), kde mu byl v listopadu 1872 udělen titul řádného profesora. Toto období je v jeho životě považováno za vysoce tvůrčí. Sepsal řadu původních článků věnovaných kuželosečkám, rovinným křivkám, rozvinutelným plochám, plochám třetího a čtvrtého stupně, projektivní geometrii i statice.

Roku 1873 bylo L. Cremonovi nabídnuto místo generálního tajemníka nově ustavené italské vlády. Ačkoliv si této nabídky jako oddaný italský vlastenec velmi vážil, odmítl ji, neboť se chtěl věnovat matematickému bádání. Dne 9. října 1873 přesídlil do Říma, kde byl královským výnosem jmenován ředitelem a profesorem nově založené školy *Scuola degli ingegneri in Roma*. Pokud doufal, že odmítnutí vstupu do politiky mu umožní pokračovat ve vědecké práci, brzy shledal, že ho administrativní a učitelské povinnosti, zejména řízení nové školy, plně zaměstnávají a na vlastní práci v matematice mu nezbývá skoro žádný čas. Proto souhlasil s návrhem, jehož autory byli Enrico Betti (1823–1892) a Ulisse Dini (1845–1918) a který podpořil také Eugenio Bertini (1846–1933), aby přešel na stolici vyšší geometrie na univerzitu v Pise. Avšak tehdejší ministr školství nechtěl přijít o Cremonovu spolupráci během jeho působení v Římě, proto se zasadil o to, aby byl v listopadu 1877 přijat na stolici vyšší matematiky na univerzitě v Římě.

L. Cremona však cítil, že by měl přeci jen vstoupit do politiky. Dne 16. března 1879 byl zvolen senátorem, a tím jeho matematické bádání skončilo. V následujících letech působil ve funkci ministra školství, jeho zásluhou byla projektivní geometrie v bohaté hodinové dotaci zařazena do výuky na italských vysokých školách matematicko-fyzikálního a technického zaměření. Svou politickou kariéru zakončil jako viceprezident senátu. Zemřel na infarkt 10. června 1903 v Římě.

Během života se mu dostalo několika ocenění, byl členem řady vědeckých společností. V roce 1879 byl jmenován dopisujícím členem Královské společnosti v Londýně a roku 1883 členem Královské společnosti v Edinburghu. Dále byl generálním tajemníkem královské Lombardské akademie věd v Miláně, členem italské společnosti „čtyřiceti“, členem akademií a učených společností v Bologni, Neapoli, Göttingen, Lisabonu, Benátkách i v Praze, mimo jiné od roku 1871 prvním zahraničním čestným členem Jednoty českých mathematiků.

L. Cremona svými pracemi významně ovlivnil nejen italskou geometrii, byl jedním ze zakladatelů nové italské matematické školy. Měl pověst výborného přednášejícího, vychoval několik žáků, kteří se sami později úspěšně věnovali geometrii.[10] Je autorem více než stovky vědeckých prací. Věnoval se zejména projek-

příjem učitele. Poprvé byla udělena roku 1866, kdy ji získal L. Cremona společně s Rudolfem Sturmem (1841–1919), jenž se věnoval projektivní reprezentaci kubických ploch. L. Cremona tuto cenu obdržel ještě v roce 1874 jako ocenění vlastních geometrických výsledků. V některých letech cena udělena nebyla, neboť Berlínská akademie neobdržela žádné vyhovující práce. Od roku 1890 byla cena na návrh Leopolda Kroneckera (1823–1891) udělována jednou za pět let a bylo rozhodnuto, že v případě, že žádná z obdržených prací nebude shledána vyhovující, bude cena udělena významné práci z oblasti geometrie sepsané během posledních deseti let. Dodejme ještě, že roku 1900 byl jedním ze tří oceněných David Hilbert (1862–1943), který cenu získal za svou práci *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899.

[10] Byli mezi nimi např. Eugenio Bertini, Giuseppe Veronese (1854–1917) a Giovanni Battista Guccia (1855–1914).

tivní a algebraické geometrii, diferenciálnímu a integrálnímu počtu. Odvodil mimo jiné vlastnosti projektivně sdružených útvarů, přepracoval a dokázal řadu tvrzení syntetické geometrie. Objevil navíc grafické metody řešení problémů statiky, tzv. *grafostatiky*. Své práce publikoval zejména v časopisech *Annali di scienze matematiche e fisiche* a *Annali di matematica pura ed applicata*. Druhý z časopisů, jenž v roce 1859 založil F. Brioschi, od roku 1867 pomáhal redigovat. Cremonovy články se objevily i v matematických časopisech ve Francii, Německu a Anglii, některé jeho významné práce byly přeloženy do dalších jazyků. Jmenujme jeho nejvýznamnější geometrické práce: *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*,[11] *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*[12] věnovaná Cremonovým transformacím, *Preliminari di una teoria geometrica della superficie*,[13] *Elementi di geometria projettiva*[14] a *Elementi di calcolo grafico*[15].

Obr. 31: Luigi Cremona

Podstatná část Cremonovy pozůstalosti zahrnující mimo jiné jeho pracovní i osobní korespondenci je uložena v Mazziniho institutu v Janově.[16] V souvislosti se studiem, podrobnou analýzou a tříděním dochovaných dokumentů byla

[11] Tipi Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1862, 128 stran; též viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 12(1862), 305–436.

[12] Viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 2(1863), 621–630, 5(1865), 3–35. Část I. též viz Annali di matematica pura ed applicata 6(1864), 153–168; nebo Giornale di matematiche 1(1863), 305–311. Část II. též viz Giornale di matematiche 3(1865), 269–280, 363–376.

[13] Tipi Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1866, 99 stran; též viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 6(1867), 91–136, 7(1867), 29–78.

[14] G. B. Paravia e comp., Torino, 1873, 184 stran.

[15] Stamperia reale di G. B. Paravia e c., Torino, 1874, 77 stran.

[16] *Istituto Mazziniano di Genova*, fond *Legato Itala Cremona Cozzolino*. Otcovu pozůstalost janovskému institutu darovala Cremonova dcera Itala Cremona Cozzolino. Více viz Brigaglia A., Di Sieno S., *The Luigi Cremona Archive of the Mazzini Institute of Genoa*, Historia Mathematica 38(2011), 96–110; základní informace viz [Be3], str. 63–64.

v rámci výzkumného projektu zprovozněna webová stránka[17] obsahující soupis stěžejních příspěvků o Cremonově životě a díle, včetně odkazů na elektronické verze některých jeho prací.

3.2 Cremonovy (biracionální) transformace

Ve 2. polovině 19. století ve světě vrcholilo studium geometrických transformací, zájem matematiků se v této době obrátil k transformacím vyšších stupňů, speciálně se důraz kladl na tzv. biracionální transformace.

Biracionální transformací pro dvě nehomogenní souřadnice rozumíme transformaci ve tvaru

$$x' = \phi(x, y), \quad y' = \psi(x, y),$$

kde ϕ a ψ jsou racionální funkce proměnných x a y, které lze vyjádřit racionálními funkcemi proměnných x' a y'. V homogenních souřadnicích x_0, x_1 a x_2 mají biracionální transformace tvar

$$x'_i = F_i(x_0, x_1, x_2), \text{ pro } i = 0, 1, 2;$$

k nim inverzní transformace jsou pak tvaru

$$x_i = G_i(x'_0, x'_1, x'_2), \text{ pro } i = 0, 1, 2,$$

kde F_i a G_i jsou homogenní polynomy n-tého stupně v příslušných proměnných.[18]

Cremonovou transformací rozumíme každou biracionální transformaci projektivního prostoru nad tělesem K. Cremonovy transformace daného prostoru tvoří grupu, kterou nazýváme *Cremonovou grupou*. Z pohledu Kleinova Erlangenského programu[19] můžeme algebraickou geometrii jednoduše charakterizovat jako teorii invariantů algebraických křivek při biracionálních transformacích.

Nejjednodušším netriviálním příkladem Cremonovy transformace je kruhová inverze v rovině, která bodu X přiřazuje bod X' na přímce SX podle vztahu $|SX| \cdot |SX'| = r^2$, kde S je střed a r je poloměr zadané kružnice. Pokud zvolíme počátek soustavy souřadnic ve středu S dané kružnice a označíme-li $X = [x, y]$ a $X' = [x', y']$, získáme analytické vyjádření kruhové inverze ve tvaru

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Při kruhové inverzi se zobecněné kružnice (přímky nebo kružnice) zobrazí opět na zobecněné kružnice. Kruhová inverze byla první netriviální geometrickou transformací, která byla v souvislosti s biracionálními transformacemi studována.

[17] Viz http://www.luigi-cremona.it/.

[18] Termín *biracionální transformace* se někdy používá i v obecnějším smyslu, a to v případě, kdy transformace bodů nějaké křivky na jinou křivku je sice biracionální, ale není biracionální v celé rovině. Např. transformace $x' = x^2$, $y' = y$ není sice vzájemně jednoznačná v celé rovině, ale libovolnou křivku napravo od osy y zobrazuje na jinou křivku vzájemně jednoznačně.

[19] O Erlangenském programu je podrobně pojednáno v kapitole 4 této monografie.

Jiným příkladem Cremonových transformací jsou tzv. *kvadratické biracionální transformace roviny*, které lze v nehomogenních souřadnicích x, y vyjádřit jako lineární lomená zobrazení daná předpisem

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \quad y' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3}{a_4 x + b_4 y + c_4}.$$

Z nich je speciální pozornost věnována tzv. *standardní kvadratické transformaci*, kterou lze zapsat ve tvaru

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{y},$$

nebo v homogenních souřadnicích

$$x_0' = x_1 x_2, \quad x_1' = x_0 x_2, \quad x_2' = x_0 x_1.$$

Jak kruhová inverze, tak kvadratické biracionální transformace roviny jsou transformacemi 2. stupně.[20] L. Cremona se ve své práci *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*[21] z let 1863 a 1865 zabýval problematikou konstrukce obecné geometrické transformace libovolného stupně, tj. řešil otázku, jak sestrojit transformaci, která přímky zobrazí obecně na křivky libovolného stupně. Při té příležitosti odvodil základní rovnice, které musí splňovat počty bodů společných všem takovým křivkám.

In questo breve scritto mi propongo di mostrare direttamente la possibilità di trasformazioni geometriche di figure piane, nelle quali le rette abbiano per corrispondenti delle curve di un dato ordine qualsivoglia. Stabilisco dapprima due equazioni che devono aver luogo fra i numeri de' punti semplici e multipli comuni a tutte le curve che corrispondono a rette. Poi dimostro come, per mezzo di raggi appoggiati a due linee direttrici, si possano projettare i punti di un piano sopra un secondo piano, e così trasformare una figura data in quello, in un'altra figura situata in questo.

Obr. 32: L. Cremona – *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*[22]

Uvažujme dva geometrické útvary, jeden v rovině P, druhý v rovině P', a mezi nimi vzájemně jednoznačnou transformaci, tj. transformaci, která každému bodu útvaru P přiřadí právě jeden bod útvaru P' a naopak. Zajímá nás, jaké křivky jednoho útvaru odpovídají při takovéto transformaci přímkám druhého útvaru.

Označme písmenem n stupeň křivky, která v útvaru P' odpovídá libovolné přímce útvaru P. Každá přímka útvaru P je jednoznačně určena dvěma body, proto je křivka n-tého stupně, která je jejím obrazem v uvažované transformaci,

[20] Stupněm transformace rozumíme stupeň křivky, na niž se při dané transformaci zobrazí obecná přímka.

[21] Viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 2(1863), 621–630, 5(1865), 3–35. Část I. též viz Annali di matematica pura ed applicata 6(1864), 153–168; nebo Giornale di matematiche 1(1863), 305–311. Část II. též viz Giornale di matematiche 3(1865), 269–280, 363–376.

[22] Úryvek viz Giornale di matematiche 1(1863), str. 305.

jednoznačně určena obrazy těchto dvou bodů. Křivky útvaru P' odpovídající přímkám útvaru P tedy tvoří geometrickou síť n-tého stupně (libovolnými dvěma body útvaru P' prochází jediná křivka).

Křivka n-tého stupně je obecně určena $\frac{n(n+3)}{2}$ nezávislými podmínkami. Křivky útvaru P' příslušející přímkám útvaru P tedy musí splňovat $\frac{n(n+3)}{2} - 2 = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$ společných podmínek. Dvě přímky útvaru P mají společný právě jeden bod (v případě rovnoběžných přímek uvažujeme nevlastní bod), jeho obraz tak bude průsečíkem jim odpovídajících křivek n-tého stupně. Dvě křivky n-tého stupně však mají obecně společných n^2 bodů (včetně násobnosti), z čehož plyne, že zbývajících $n^2 - 1$ průsečíků těchto křivek musí být společných všem křivkám uvažované sítě.

Označme symbolem x_r počet r-násobných bodů společných všem křivkám uvažované sítě. Protože r-násobný, dvěma křivkám společný bod zastupuje r^2 jednoduchých průsečíků, musí platit

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + \ldots + (n-1)^2 x_{n-1} = n^2 - 1. \tag{1}$$

Body společné všem křivkám sítě, jejichž počet je $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}$, tak představují výše uvedených $\frac{(n-1)(n+4)}{2}$ společných podmínek. Přitom r-násobný bod má při určování algebraických křivek hodnost $\frac{r(r+1)}{2}$ jednoduchých podmínek. Musí proto platit

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} x_{n-1} = \frac{(n-1)(n+4)}{2}. \tag{2}$$

L. Cremona v této souvislosti poznamenal, že stejné podmínky (1) a (2) pro počty r-násobných bodů společných všem křivkám sítě získáme, když místo přímek v útvaru P budeme uvažovat obecně křivky libovolného stupně.

Tím je dokázáno, že křivky příslušející přímkám jednoho útvaru při Cremonově transformaci, které tvoří tzv. *homaloidní síť transformace*, musí mít společný jistý počet (jednoduchých i vícenásobných) bodů, které nazýváme *fundamentálními body* uvažované transformace. Počet fundamentálních bodů přitom musí vyhovovat rovnicím (1) a (2). Tyto rovnice mají obecně více řešení – počet řešení je tím větší, čím větší je číslo n. Každé řešení rovnic (1) a (2) pak určuje zvláštní transformaci.

Odečtením rovnic (1) a (2) získáme rovnici

$$x_2 + 3x_3 + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2} x_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \tag{3}$$

ze které vyplývá, že musí být $x_{n-1} = 0$ nebo $x_{n-1} = 1$. V případě, že $x_{n-1} = 1$, z rovnic dále plyne, že $x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-2} = 0$ a $x_1 = 2n - 2$.

Vidíme tak, že mezi všemi transformacemi odpovídajícími dané hodnotě n je obsažena jedna, kterou bychom mohli nazvat „nejjednodušší“. Při ní mají křivky n-tého stupně odpovídající přímkám společný pouze jeden $(n-1)$-násobný bod a dále $2n-2$ jednoduchých bodů. Tato transformace se nazývá *de Jonquièresova transformace.*[23] Obecně ji lze vyjádřit ve tvaru

$$x' = x, \quad y' = \frac{P(x)\,y + Q(x)}{R(x)\,y + S(x)}\,,$$

kde $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ jsou polynomy neurčité x nad tělesem K.

Pro ilustraci uveďme několik příkladů.

Pro $n = 2$ přecházejí rovnice (1) a (2) v jedinou rovnici $x_1 = 3$. Přímkám útvaru P tedy v útvaru P' odpovídají křivky 2. stupně (kuželosečky), které vesměs procházejí třemi pevnými body (jsou opsány pevnému trojúhelníku). Tato transformace se nazývá *transformace konická.*

Pro $n = 3$ plynou z rovnic (1) a (2) rovnosti $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Přímkám útvaru P tedy v útvaru P' odpovídají křivky 3. stupně mající společný jeden dvojnásobný pevný bod a čtyři pevné jednoduché body.

Pro $n = 4$ mají rovnice (1) a (2) tvar $x_1+4x_2+9x_3 = 15$, $x_1+3x_2+6x_3 = 12$. Tyto rovnice mají dvě řešení: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ a $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Cremonovu transformaci lze získat rovněž složením libovolné posloupnosti kolineací (tj. lineárních transformací) a standardních kvadratických transformací. Obecné kvadratické transformace mají přitom v teorii Cremonových transformací fundamentální význam. Podle tzv. *Noetherova faktorizačního teorému*[24] totiž platí:

> *Je-li těleso K algebraicky uzavřené, lze každou Cremonovu transformaci projektivní roviny nad tělesem K složit z konečné posloupnosti kvadratických transformací.*

Noetherův důkaz[25] je založen na skutečnosti, že každý svazek racionálních křivek n-tého stupně lze pomocí kvadratické transformace převést na svazek racionálních křivek nižšího stupně. Konečnou posloupností kvadratických transformací lze tedy každý svazek racionálních křivek převést na svazek přímek.

---

[23] Ernest de Jonquières (1820–1901), francouzský námořní důstojník, jenž se věnoval geometrii.

[24] Max Noether (1844–1921), německý matematik, jeden ze zakladatelů algebraické geometrie. Úryvky z několika německy psaných dopisů, jež M. Noether roku 1871 zaslal L. Cremonovi, jsou v anglickém překladu otištěny v článku Menghini M., *Notes on the Correspondence between Luigi Cremona and Max Noether*, Historia Mathematica 13(1986), 341–351. M. Noether se v nich na L. Cremonu nejčastěji obracel s dotazy na přesné důkazy některých Cremonových tvrzení; v několika případech namítal, že Cremonovy důkazy nejsou přesvědčivé a postačující, že využívají pouze nepřímou metodu dedukce. Originály dopisů jsou uloženy v *Istituto Matematico „Guido Castelnuovo“ Università di Roma.* Více viz Israel G., Nurzia L., *Correspondence and manuscripts recovered at the Istituto Matematico „G. Castelnuovo“ of the University of Rome*, Historia Mathematica 10(1983), 93–97.

[25] Viz Noether M., *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Mathematische Annalen 3(1870), 161–227; Noether M., *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen*, Mathematische Annalen 5(1872), 635–639.

Nezávisle na M. Noetherovi faktorizační teorém objevili i William K. Clifford (1845–1879) a Jacob Rosanes,[26] jenž navíc dokázal, že každá vzájemně jednoznačná algebraická transformace roviny musí být Cremonovou transformací.[27]

V roce 1901 italský matematik Corrado Segre (1863–1924) ve svém článku upozornil na nedostatky v důkazu Noetherova faktorizačního teorému.[28] Italský matematik Guido Castelnuovo (1865–1952) publikoval ještě téhož roku nový důkaz tohoto teorému, v němž nejprve obecnou rovinnou Cremonovu transformaci rozložil do de Jonquièresových transformací a tyto transformace dále rozložil do kvadratických transformací.[29] Ve své době byl tento postup považován za první korektní a kompletní důkaz Noetherova faktorizačního teorému.

Roku 1916 americký matematik James W. Alexander (1888–1971) proti výše uvedenému důkazu G. Castelnuova protestoval a předložil vlastní důkaz využívající přímo kvadratické transformace.[30] Názory na oba důkazy se mezi matematiky různí. Někteří autoři Castelnuovův důkaz plně uznávají a Alexanderovy námitky přičítají jeho chybnému pochopení chování systémů křivek a množin nekonečně blízkých bodů.

V roce 1939 publikoval nový důkaz Noetherova faktorizačního teorému německý matematik Heinrich W. E. Jung (1876–1953). Ve svém článku *Zusammensetzung von Cremonatransformationen der Ebene aus quadratischen Transformationen*[31] dokázal tvrzení, že každou Cremonovu transformaci roviny lze složit z konečného počtu tzv. záměnných a fundamentálních transformací. Záměnnou transformací (v originále *die Vertauschungstransformation*) rozuměl transformaci

$$x' = y, \quad y' = x,$$

která navzájem zamění obě proměnné. Fundamentální transformace (v originále *die Fundamentaltransformation*) jednu proměnnou zachovává, její obecné analytické vyjádření má tvar

$$x' = x, \quad y' = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy}{b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy} = \frac{f_0}{f_\infty},$$

kde a_i, b_i jsou konstanty, polynomy f_0, f_∞ jsou nesoudělné a podíl $\frac{f_0}{f_\infty}$ není konstantní, ani nezávisí jenom na proměnné x.

---

[26] Jacob Rosanes (1842–1922), německý matematik, věnoval se algebraické geometrii a teorii invariantů; byl také šachovým mistrem.

[27] Viz Rosanes J., *Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 73(1871), 97–110.

[28] Viz Segre C., *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni Cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche*, Atti della reale Accademia delle scienze di Torino 36(1901), 645–651.

[29] Viz Castelnuovo G., *Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino 36(1901), 861–874.

[30] Viz Alexander J. W., *On the factorization of Cremona plane transformations*, Transactions of the American Mathematical Society 17(1916), 295–300.

[31] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 180(1939), 97–109.

V teorii Cremonových transformací lze rovněž dokázat, že libovolný biregulární automorfismus afinního prostoru nad tělesem K lze rozšířit na Cremonovu transformaci. Grupa všech automorfismů afinního prostoru je totiž podgrupou Cremonovy grupy. Grupa všech automorfismů afinní roviny nad tělesem K je generována podgrupou afinních transformací a podgrupou transformací tvaru

$$x' = ax + b, \quad y' = cy + Q(x),$$

kde a, b, $c \in K$, přitom a, $c \neq 0$, a $Q(x)$ je polynom neurčité x nad tělesem K. Struktura grupy všech automorfismů afinního prostoru dimenze n nad tělesem K není pro $n \geq 3$ obecně dosud známa.

Cremonovy transformace obecně nezachovávají stupeň[32] ani třídu[33] algebraických křivek, avšak zachovávají jejich rod[34]. Využívají se proto k redukci singularit rovinných algebraických křivek.

Závěrem připojme alespoň několik slov o Cremonových transformacích vícedimenzionálních prostorů, které jsou složitější než transformace roviny. Hlavním důvodem je skutečnost, že zatímco Cremonova transformace roviny je stejného stupně jako její inverze, v prostoru již Cremonova transformace a její inverze nemusí být nutně stejného stupně. L. Cremona ve své práci uvedl jako příklad kvadratickou transformaci, jejíž inverzí je transformace kubická. Nejvýznamnějším obecným výsledkem týkajícím se Cremonových transformací v trojrozměrném prostoru je tzv. *Hudsonové faktorizační teorém*:[35]

> *V trojrozměrném prostoru neexistuje konečná množina typů Cremonových transformací, z nichž by bylo možno složit libovolnou Cremonovu transformaci tohoto prostoru.*

Ve vícedimenzionálních prostorech tedy obdoba Noetherova faktorizačního teorému neplatí.

3.3 Cremonův vliv ve světě

Luigi Cremona svými pracemi významně přispěl k dalšímu rozvoji algebraické geometrie. Jako první obecně vyřešil problematiku existence vzájemně jednoznačného zobrazení mezi dvěma rovinami. Ve svém pojednání *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* odkázal na dva články, jež před ním sepsali německý

[32] Stupněm algebraické křivky rozumíme maximální možný počet průsečíků této křivky s obecnou přímkou.

[33] Třídou algebraické křivky rozumíme maximální možný počet tečen této křivky jdoucích jedním bodem.

[34] Rodem rovinné algebraické křivky n-tého stupně rozumíme číslo p nabývající hodnot $p \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right\}$. Toto číslo závisí na počtu a druhu singularit; pro daný stupeň n odpovídá maximální možná hodnota rodu p regulární křivce, tj. křivce bez jakýchkoliv singularit.

[35] Hilda Phoebe Hudson (1881–1965), anglická matematička, věnovala se teorii Cremonových transformací. Viz Hudson H. P., *Cremona Transformations in Plane and Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927, 454 stran.

matematik Ludwig I. Magnus (1790–1861) a italský astronom Giovanni V. Schiaparelli (1835–1910). Oba studovali analytická vyjádření takové geometrické transformace, při níž libovolnému bodu jednoho rovinného útvaru odpovídá jediný bod jiného rovinného útvaru a naopak.

L. I. Magnus ve svém článku *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie*[36] jako první analyticky zkoumal obecné kvadratické Cremonovy transformace a odvodil jejich základní vlastnosti.

G. V. Schiaparelli ve své práci *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica*[37] pojal problematiku transformací obecněji. Uvažoval transformaci mezi dvěma rovinami (x, y) a (η, ν) definovanou pomocí funkcí $f(x, y, \eta, \nu) = 0$ a $g(x, y, \eta, \nu) = 0$, která bodu (x, y) jedné roviny přiřazuje jeden, dva nebo dokonce nekonečně mnoho bodů (η, ν) druhé roviny, a to v závislosti na použitých funkcích f, g. Dále však zkoumal pouze případy, kdy každému bodu (x, y) jedné roviny odpovídá opět pouze jeden bod (η, ν) druhé roviny a naopak. Takovou transformaci nazval transformací prvního řádu (*trasformazione di primo ordine*) a rozšířil ji i do trojrozměrného prostoru. Pro obecnou transformaci prvního řádu pak uvažoval tři kvadratické funkce popisující tři kuželosečky, které procházejí třemi pevně zvolenými body. Tímto způsobem dospěl ke kvadratické Cremonově transformaci.

L. Cremona poukázal na chybnou úvahu svých předchůdců, kteří pracovali s předpokladem, že kvadratická transformace je nejobecnější biracionální transformací mezi dvěma rovinami.[38] Uvedl na pravou míru, že složením dvou nebo více kvadratických transformací získáme obecně transformaci vyššího stupně.

Cremonova autorita a světové uznání přispěly k tomu, že se biracionální transformace přeměnily z pomocného nástroje v samostatný objekt matematického zkoumání. Koncem 19. a na počátku 20. století bylo předními matematiky sepsáno několik prací, které teorii Cremonových transformací shrnuly nebo i dále rozvíjely.

Arthur Cayley podal roku 1870 přehled teorie Cremonových transformací ve svém pojednání *On the rational transformation between two spaces*.[39] Je v něm bez důkazu uvedena i věta, kterou nezávisle na základě indukce odvodil William K. Clifford. Týká se rozkladu Cremonovy transformace na transformace kvadratické a je na ní založen algoritmus umožňující schematické znázornění všech Cremonových transformací.

Alfred Clebsch (1833–1872) ve svém článku *Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen*[40] dokázal, že přímé transformaci i transformaci k ní inverzní odpovídá stejný počet rovnocenných fundamentálních bodů, může se změnit pouze jejich pořadí. Důkaz této věty L. Cremona ve své práci pouze naznačil.

[36] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 8(1832), 51–63.

[37] Stamperia reale, Torino, 1862, 95 stran. Též viz Memorie della reale Accademia delle scienze di Torino 21(1864), 227–319.

[38] L. Cremona tuto domněnku sám rovněž dříve zastával, a to v letech 1861 až 1862.

[39] Viz Proceedings of the London Mathematical Society 3(1870), 127–180.

[40] Viz Mathematische Annalen 4(1871), 490–496.

Rudolf Sturm (1841–1919) v článku *Beispiele zu den Cremona'schen ebenen Transformationen*[41] uvedl několik příkladů rovinných Cremonových transformací, u nichž jsou obě homaloidní sítě rozdílné. Dospěl k nim na základě využití jiného vzájemně jednoznačného zobrazení kubické plochy na rovinu.

Problematika Cremonových transformací zůstávala v centru zájmu některých matematiků i na počátku 20. století.[42]

3.4 Cremonův vliv v českých zemích

Pro vývoj české matematiky 2. poloviny 19. století je charakteristický zesílený zájem o geometrickou problematiku, někdy hovoříme o tzv. *české geometrické škole*. Tato škola působila téměř sto let, její vliv doznίval ještě po 2. světové válce. Pozornost matematiků byla zpočátku věnována především deskriptivní geometrii, později byly zkoumány otázky projektivní a konstruktivní syntetické geometrie, v závěru se pozornost této matematické školy obrátila k řešení geometrických problémů s využitím analytických a algebraických metod. Česká geometrická škola byla na rozdíl od zahraničních vědeckých škol[43] specifická tím, že nebyla organizačně ani vědecky vedena žádnou výraznou matematickou osobností, která by určovala její vědecký program, a nebyla ani vázána pouze na jedno vědecké pracoviště. Tematika prací sepsaných touto matematickou skupinou se přitom výrazně odlišuje od tematiky prací českých matematiků 1. poloviny 19. století.

Koncem 60. let 19. století začalo v českých zemích docházet k nárůstu počtu vědeckých publikací z oblasti geometrie. Podstatné rozšíření publikačních možností v této době představoval *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, který byl založen roku 1872. Od poloviny 19. století zde navíc existovala možnost publikovat odborné matematické výsledky ve výročních zprávách středních škol. Zvýšení produkce matematických prací v českých zemích lze sledovat i v *Pojednáních Královské české společnosti nauk* [Abhandlungen der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften] založených roku 1775.[44]

Problematikou biracionálních transformací se v českých zemích zabývalo několik matematiků. Velké zásluhy na tom má zejména Emil Weyr.

[41] Viz Mathematische Annalen 26(1886), 304–308.

[42] Viz např. Jung H. W. E., *Über die Cremonasche Transformation der Ebene*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 138(1910), 255–318.

[43] V 19. století docházelo ke vzniku vědeckých geometrických škol po celé Evropě. Ve Francii se již koncem 18. století utvořila geometrická škola vycházející z prací Gasparda Monge a později Jeana Victora Ponceleta, od 40. let 19. století zde působila vědecká škola rozvíjející geometrické dílo Michela Chaslese. V Německu vznikly po roce 1820 současně dvě významné geometrické školy, a to syntetická projektivní škola vycházející z prací Jacoba Steinera a Christiana von Staudta (1798–1867) a analyticko-algebraická škola rozvíjející ideje Julia Plückera. Italskou školu algebraické geometrie od 60. let 19. století kromě L. Cremony reprezentovali Francesco Brioschi, Eugenio Beltrami (1835–1900) a Enrico Betti.

[44] Počet publikovaných matematických prací rostl od konce 60. let 19. století až do konce století celkem lineárně. Zatímco v předchozím období byly publikovány ročně průměrně pouze dvě matematické práce, bylo v letech 1870 až 1890 publikováno ročně průměrně více než 11 prací. Geometrické práce přitom v tomto období tvořily téměř 60 procent všech publikovaných matematických prací. Viz Folta J., *Česká geometrická škola – Historická analýza*, Studie Československé akademie věd 9, Academia, Praha, 1982.

Emil Weyr

Emil Weyr (1848–1894), významný český matematik 2. poloviny 19. století, se geometrií začal zabývat kolem roku 1868, kdy ještě během studia začal pracovat jako asistent profesora J. H. K. Durège (1821–1893) na pražské polytechnice. V roce 1869 získal doktorát filozofie v Lipsku, roku 1870 byl jmenován soukromým docentem novější geometrie na pražské univerzitě. O rok později získal místo mimořádného profesora matematiky na české polytechnice v Praze. Roku 1875 byl povolán jako řádný profesor na vídeňskou univerzitu, aby tam přenesl a rozšířil novou geometrii úspěšně rozvíjenou právě v Praze.[45]

Obr. 33: Emil Weyr

Emil Weyr se zpočátku zajímal o jedno-víceznačné geometrické transformace, k nimž dospěl rozšířením principu korespondence naznačeného v Chaslesově *Aperçu historique*[46] z roku 1837. V obsáhlých, německy psaných monografiích[47] ukázal, že vedle bijektivního vztahu vyjadřujícího jedno-jednoznačnou projektivní transformaci existují mezi dvěma útvary také zobrazení, která danému prvku jednoho útvaru přiřazují více prvků útvaru druhého a naopak. Navíc poukázal na skutečnost, že zobrazení jedno-dvojznačná jsou v úzké souvislosti s teorií křivek 3. stupně s jedním dvojným bodem, resp. třetí třídy s jednou dvojnou tečnou a s teorií přímkových ploch 3. stupně. Ve svých pracích se Emil Weyr snažil omezovat použití analytické geometrie a v co největší míře, pokud to bylo možné, používat ryze syntetické metody.

[45] O Emilu Weyrovi viz Pánek A., *O životě a působení Dr. Emila Weyra*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 24(1895), 161–224; Bečvář J., *Sto let od smrti Emila Weyra*, Pokroky matematiky, fysiky a astronomie 39(1994), 102–107.

[46] Viz Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*, M. Hayez, imprimeur de l'Académie Royale, Bruxelles, 1837, 851 stran.

[47] Weyr E., *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse*, Teubner, Leipzig, 1869, 156 stran; Weyr E., *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung*, Teubner, Leipzig, 1870, 175 stran.

Ve školním roce 1870/71 Emil Weyr absolvoval studijní pobyt v Miláně, při kterém navázal pracovní i přátelské vztahy s L. Cremonou. Navštěvoval zde jeho přednášky, diskutovali spolu o geometrických otázkách.[48] Byl prvním českým matematikem, jenž pochopil zásadní význam Cremonových geometrických prací a jeho biracionálních transformací pro další rozvoj projektivní geometrie. Dvě nejvýznamnější Cremonovy práce proto přeložil do češtiny.[49] Své překlady s L. Cremonou konzultoval jednak při svých pobytech v Itálii, jednak v korespondenci.[50] V Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky vyšlo v roce 1874 v rámci literárního věstníku následující oznámení:[51]

> *Konečně oznamujeme, že dokončen jest již český překlad klassického spisu Úvod do geometrické theorie křivek rovinných, jejž sepsal dr. Ludvík Cremona a do češtiny převedl Emil Weyr. Zvláštního odporučení spis tento nepotřebuje; patříť mezi spisy světové. Mimo to není snad jediného čtenáře těchto listů, který by si překlad tento nebyl zjednal; podle vlastního seznání ustálil se tedy zajisté u každého našeho čtenáře jistý úsudek, o němž nepochybujeme, že jest na nejvýš pochvalný i pro spisovatele pro překladatele i pro vydavatele.*

V dubnu 1873 pobýval Emil Weyr opět v Itálii. Jedním z motivů této cesty byly konzultace s L. Cremonou a úřední jednání týkající se překladu druhé Cremonovy knihy.

Emil Weyr je společně se svým bratrem Eduardem Weyrem (1852–1903) autorem první česky psané učebnice projektivní geometrie nazvané *Základové vyšší geometrie*, jež vycházela od roku 1871 ve třech pokračováních jako příloha časopisu Živa.[52] Byla napsána s využitím francouzských a německých zdrojů, obsahuje

[48] Poznamenejme, že Emil Weyr původně zamýšlel podniknout studijní cestu do Paříže, avšak z důvodu vypuknutí prusko-francouzské války dne 2. srpna 1870 se nakonec rozhodl odjet do Itálie. V Archivu AV ČR (fond František Weyr) je uložen deník, jenž si Emil Weyr během svého italského pobytu vedl. Popisoval v něm setkání s italskými matematiky a atmosféru tehdejší Itálie. Zpočátku psal deník německy, později přešel do češtiny, která obsahuje řadu chyb. Viz Bečvář J., Bečvářová M., Škoda J., *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, edice Dějiny matematiky, svazek 28, ČVUT, Praha, 2006, 166 stran.

[49] Weyr E., *Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných*, Živa, sborník vědecký Musea království Českého, odbor přírodovědecký a mathematický č. X, nákladem Musea království Českého, Praha, 1872, 47 stran; *Úvod do geometrické theorie křivek rovinných*, sepsal Dr. Ludvík Cremona, české, spisovatelem rozmnožené a opravené vydání, jež uspořádal Emil Weyr, majetkem a nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1873, 176 stran. S opravami gramatických a tiskových chyb Emilu Weyrovi pomáhali fyzik a astronom Augustin Seydler (1849–1891) a matematik Karel Zahradník (1848–1916).

[50] Celkem 27 dopisů Emila Weyra zaslaných L. Cremonovi v letech 1870 až 1891 je uloženo v Dipartimento di Matematica Istituto „Guido Castelnuovo“, Università degli Studi di Roma „La Sapienza“. Převzato z [Be2], str. 264.

[51] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 3(1874), str. 291.

[52] Viz Weyrové Em. a Ed., *Základové vyšší geometrie*, díl I. *Theorie promítavých útvarů prvořadých*, díl II. *Theorie křivek stupně druhého*, díl III. *O přímočarých plochách druhého stupně a o vztahu kollineárném a reciprokém základních útvarů druhořadých a třetiřadých*, Živa, sborník vědecký Musea království Českého, odbor přírodovědecký a mathematický č. VIII, XI, XII, nákladem Musea království Českého, Praha, 1871, 1874, 1878, 114 + 186 + 167 stran. Recenze viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 8(1879), 141–143.

základní i speciální látku doplněnou o vlastní vědecké výsledky a ve své době výrazně přesáhla úroveň tehdejší české odborné literatury.

Po návratu z Itálie se Emil Weyr dále věnoval studiu speciálních typů jednovíceznačných transformací, které nazval involucemi vyšších stupňů a tříd. Za involuci n-tého stupně a k-té třídy považoval takový vztah mezi prvky nějakého útvaru rodu nula, při kterém je volbou určitého počtu k prvků stanoveno dalších $n - k$ prvků ($n > k$) tohoto útvaru tak, že pro ně platí tzv. úplná záměnnost, tj. že kterýchkoliv k prvků daného útvaru lze považovat za prvky určující všechny ostatní prvky tohoto n-členného útvaru.[53] Těchto transformací Emil Weyr využíval ke studiu křivek rodu nula. Řadu svých pojednání z této problematiky shrnul v práci *Beiträge zur Curvenlehre*,[54] kterou značně přispěl k vybudování teorie racionálních křivek a ploch.

Další matematici v českých zemích

Ve stejné době jako Emil Weyr se Cremonovými transformacemi v českých zemích zabývalo i několik dalších matematiků.

Soukromý docent německé univerzity v Praze Seligmann Kantor (1857–1902) ve své práci věnované biracionálním transformacím vyřešil úlohu zadanou neapolskou akademií, a to nalézt v rovině periodické Cremonovy transformace, které po n-násobném užití převádí geometrický objekt sám v sebe.[55] S. Kantor tuto úlohu vyřešil zcela obecně, do té doby byly popsány pouze některé speciální případy.

Česká matematická komunita byla koncem 19. a na počátku 20. století s Cremonovými geometrickými pracemi i díky Emilu Weyrovi poměrně dobře seznámena. Alois Strnad[56] některé Cremonovy výsledky využil ve svém pojednání *Úvod do theorie kvadratických transformací rovinných*.[57] V Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky je v rámci literárního věstníku uveden mimo jiné tento popis a hodnocení:[58]

> *Pan spisovatel vykládá v první části svého pojednání pojem transformace vůbec, zmiňuje se po několika historických poznámkách krátce o transformaci lineárné a přechází potom k vlastnímu předmětu svého*

[53] Weyrovu definici involuce se snažili bratři Josef Silvestr (1848–1922) a Matěj Norbert (1859–1922) Vaněčkové kolem roku 1882 rozšířit též na útvary prostorové. Jejich snaha však skončila uvedením definice a několika speciálních, nepříliš náročných příkladů. Roku 1884 publikovali sérii tří krátkých, francouzsky psaných článků; viz Vaněčkové J. S. a M. N., *Sur l'involution des dimensions supérieures*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Paris 99(1884), 742–744, 856–857, 909–911.

[54] Alfred Hölder, K. k. Hof- und Universitätsbuchhändler Wilhelm Braumüller, Wien, 1880, 64 stran.

[55] Viz Kantor S., *La trasformazione birazionale. Relazione di E. Caporali*, Napoli, 1883. S. Kantor se však touto problematikou zabýval již v několika článcích z roku 1880.

[56] Alois Strnad (1852–1911), český matematik, od roku 1873 asistent deskriptivní geometrie na české polytechnice v Praze. V letech 1876 až 1891 vyučoval na reálce v Hradci Králové, poté pět let působil na reálce v Praze. V roce 1896 byl jmenován ředitelem reálky v Kutné Hoře. Věnoval se zejména projektivní geometrii, je autorem několika středoškolských učebnic.

[57] Viz Výroční zpráva c. k. vyšší realné školy v Hradci Králové za školní rok 1886–87.

[58] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 17(1888), 140–141.

pojednání. ... všímá si z těchto transformací bedlivěji kvadratické inverse a v ní obsažené inverse kruhové; mimo to zavádí novou neinvoluční transformaci, obecnější než inverse kvadratická, jíž nazývá transformací pomocí čtyř bodů kuželosečky. ... Pojednání toto stává se cenným již volbou důležitého předmětu, o němž nebylo dosud u nás soustavně pojednáno. Mimo to vyniká jasným výkladem a přehledným látky uspořádáním, kteréž vlastnosti náleží k přednostem všech prací páně Strnadových.

Na výše uvedené Strnadovo pojednání se později odvolával Bedřich Procházka,[59] jenž v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky uveřejnil článek *O křivosti křivky odvozené transformací kvadratickou.*[60] S využitím kinematické geometrie poukázal na možnost konstrukce tečen a středu křivosti křivek, jež získáme kvadratickou transformací libovolné křivky. Ve stejné době publikoval v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky Karel Zahradník[61] ve třech částech pojednání *O jisté birationální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek.*[62]

Cremonův vliv u nás pak dozníval ještě po 1. světové válce, konkrétně v několika pracích Bohumila Bydžovského[63]. Na téma Cremonových transformací sepsal celkem 13 článků, z toho 6 česky a 7 francouzsky.[64] Ještě před 1. světovou válkou, v roce 1909, publikoval článek *O jisté nekonečné grupě Cremonových transformací*,[65] v němž zkoumal, zda vzájemně jednoznačným transformacím v rovině, které zachovávají kubickou křivku, neodpovídají vzájemně jednoznačné transformace celé roviny. Z dalších česky psaných prací jmenujme např. články *O některých grupách Cremonových transformací v rovině*[66] a *O zvláštním druhu grup Cremonových involucí v rovině*[67]. O grupách Cremonových transformací přednášel i na 8. mezinárodním kongresu matematiků v Bologni v září 1928.[68]

[59] Bedřich Procházka (1855–1934), český matematik, od roku 1876 asistent deskriptivní geometrie na německé a po roce na české technice. Vyučoval matematiku a deskriptivní geometrii na několika středních školách v Praze, později si učitelskou aprobaci rozšířil o fyziku. Roku 1884 se habilitoval na české technice v Praze, avšak ani titul soukromého docenta mu nezajistil místo na žádné vysoké škole. V následujících letech působil na středních školách v Chrudimi, v Pardubicích a v Praze. Roku 1897 byl jmenován ředitelem nově založené reálky v Náchodě. V roce 1904 získal místo profesora deskriptivní geometrie na české technice v Brně, roku 1908 přešel na českou techniku do Prahy, kde byl v následujícím roce zvolen rektorem.

[60] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 35(1906), 32–36.

[61] Karel Zahradník (1848–1916), český matematik, od roku 1872 asistent na české technice v Praze. V letech 1876 až 1899 působil jako řádný profesor matematiky na chorvatské univerzitě v Záhřebu. V roce 1899 se stal prvním rektorem české vysoké školy technické v Brně.

[62] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 34(1905), 105–123, 329–341; 38(1909), 6–25. Poznamenejme pro úplnost, že druhá a třetí část mají v názvu slovo „biracionální“ místo „birationální“. O práci podrobně viz Bečvářová M., Čižmár J., *Karel Zahradník (1848–1916), Praha – Záhřeb – Brno*, edice Dějiny matematiky, svazek 46, Matfyzpress, Praha, 2011, 194–205.

[63] Bohumil Bydžovský (1880–1969), profesor matematiky na pražské univerzitě. O jeho životě a díle viz Francová L., *Život a dílo Bohumila Bydžovského*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2001; Olejníčková J., *Vědecké dílo Bohumila Bydžovského*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2005.

[64] Některé z prací se však tematicky překrývají, nebo se jedná o překlady mezi oběma jazyky.

[65] Viz Rozpravy II. třídy České Akademie věd a umění 18(1909), 8 stran.

[66] Viz Zprávy sjezdu československých přírodozpytců a lékařů, 1928.

[67] Viz Zprávy sjezdu matematiků zemí slovanských, Varšava, 1929, 314–317.

[68] Viz Bydžovský B., *Remarque sur les groupes finis de transformations de Cremona*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 3–10 Settembre 1928, Tomo IV, 43–44.

Největší pozornost věnoval tzv. kvadratickým involucím n-rozměrného prostoru. V článku *Kvadratické involuce v prostoru n-rozměrném*[69] odvodil ve vhodně zvolené soustavě souřadnic rovnice obecné kvadratické Cremonovy transformace. Ocitujme úvodní odstavec, v němž B. Bydžovský shrnul obsah svého článku:[70]

> *V tomto metodickém příspěvku k teorii Cremonových transformací v obecném prostoru projektivním jsou odvozeny nutné podmínky pro homaloidní soustavu kvadratických nadploch a z toho vyvozeny (známé) rovnice nejobecnější kvadrokvadratické*[71] *transformace Cremonovy ve vhodně volené soustavě souřadné. Odtud snadno plynou rovnice pro kvadratickou involuci; je-li tato involuce inversí, lze ji vyjádřiti velmi jednoduše i pro obecnou soustavu souřadnou. Ke konci je odvozena podmínka pro to, aby dvě inverse složeny dávaly opět kvadratickou involuci.*

B. Bydžovský ve svém článku dospěl k závěru, že k dané inverzi existuje nekonečně mnoho inverzí, které jsou s ní záměnné a jejichž složením s uvažovanou inverzí získáme kvadratickou involuci. Každá taková inverze je určena svým středem, jenž je však libovolný. V několika dalších pracích pak B. Bydžovský výše uvedené transformace použil jako pomocný nástroj ke zkoumání algebraických křivek.

Můžeme konstatovat, že ve druhé polovině 19. století byla problematika geometrických transformací, řešitelná prostředky syntetické geometrie, uzavřenou oblastí. Témata zvládnutelná čistě konstrukčními prostředky již byla vyčerpána. Zájem matematiků se proto přirozeně obrátil ke složitějším otázkám, jejichž řešení spočívalo ve využití metod a výsledků dalších matematických disciplín. Studium Cremonových transformací do tohoto celosvětového trendu přesně zapadá, neboť vyžaduje velké nároky na geometrickou představivost a užití algebraických metod.

---

[69] Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 60(1931), 214–224.

[70] Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 60(1931), str. 214.

[71] B. Bydžovský užíval termín kvadrokvadratická transformace pro transformaci „kvadratickou v obou směrech“.