VII. KAPITOLA

VNĚJŠKOVĚ ROVINNÉ GRAFY

V této kapitole budeme mluvit o jisté speciální třídě rovinných grafů, a to o tzv. vnějškově rovinných grafech.

Definice VII.1. Nechť G je rovinný graf. Existuje-li rovinná representace $\mathscr{R}(G)$ grafu G, v níž některá oblast je incidentní se všemi uzly grafu, graf G se nazývá *vnějškově rovinný*.

Termín „vnějškově rovinný graf" nezní příliš pěkně, ale zatím nebyl nalezen termín vhodnější. Vyjadřuje skutečnost, že rovinnou representaci takového grafu lze nakreslit tak, aby všechny uzlové body byly na hranici její vnější oblasti (oblasti, jejíž obsah je nekonečný).

Uvedeme si některé vlastnosti těchto grafů. Nejprve však budeme definovat další pojem.

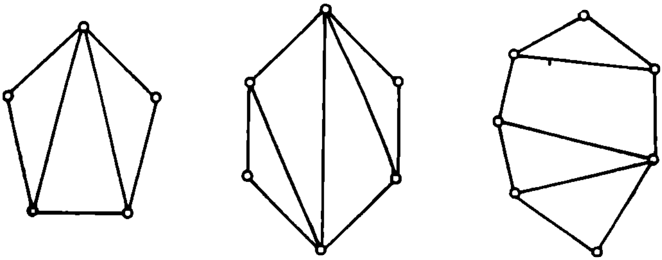
Definice VII.2. Kružnice v grafu G se nazývá *Hamiltonova kružnice*, jestliže obsahuje všechny uzly grafu G.

Nyní uvedeme větu.

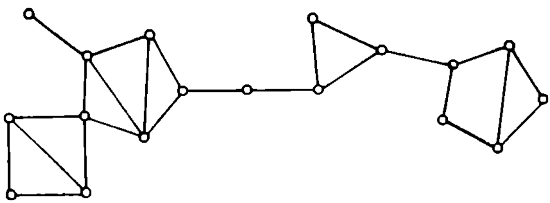
Věta VII.1. *Nechť G je vnějškově rovinný graf, $\omega(G) \geqq 2$. Pak graf G obsahuje Hamiltonovu kružnici.*

Tvrzení plyne přímo z definice VII.1 a z věty IV.2.

Na obrázku VII.1 vidíme rovinné representace několika vnějškově rovinných grafů, jejichž uzlový stupeň souvislosti je větší nebo roven dvěma. Je nyní zřejmé, že každá takováto representace může být nakreslena jako mnohoúhelník s některými úhlopříčkami. Příklad rovinné representace grafu o uzlovém stupni souvislosti rovném jedné je na obrázku VII.2.



Obr. VII.1



Obr. VII.2

Věta VII.2. *Budiž G rovinný graf. Budiž $\tilde{G}$ graf vzniklý z G přidáním nového uzlu x a spojením tohoto uzlu hranami se všemi uzly grafu G. Graf G je vnějškově rovinný právě tehdy, je-li graf $\tilde{G}$ rovinný.*

Důkaz. Nechť G je vnějškově rovinný, nechť $\mathcal{R}(G)$ je jeho rovinná representace, v níž existuje oblast f incidentní se všemi uzly grafu G. Za uzlový bod odpovídající uzlu x zvolíme některý vnitřní bod oblasti f. Tento bod lze spojit oblouky se všemi uzlovými body representace $\mathcal{R}(G)$ tak, že vnitřní body těchto oblouků leží v oblasti f. Dostaneme tak rovinnou representaci grafu $\tilde{G}$ a graf $\tilde{G}$ je tedy rovinný. Nyní předpokládejme, že $\tilde{G}$ je rovinný graf. Budiž $\mathcal{R}(\tilde{G})$ jeho rovinná representace. Rovinnou representaci $\mathcal{R}(G)$ grafu G dostaneme z $\mathcal{R}(\tilde{G})$ odstraněním uzlového bodu odpovídajícího uzlu x a všech oblouků odpovídajících hranám incidentním s x. Takto vznikne oblast, jejíž body jsou všechny body oblastí incidentních s x, bod odpovídající uzlu x a vnitřní body všech oblouků odpovídajících hranám incidentním s x. Tato oblast je oblastí representace $\mathcal{R}(G)$ incidentní se všemi uzly grafu G. Tedy graf G je vnějškově rovinný.

Tato věta nám umožní dokázat analogii věty Kuratowského pro vnějškově rovinné grafy.

Věta VII.3. *Graf G je vnějškově rovinný právě tehdy, neobsahuje-li jako podgraf graf K_4 nebo $K_{2,3}$ nebo graf získaný z některého z těchto grafů postupným půlením hran.*

Důkaz. Sestrojme ke grafu G graf $\tilde{G}$ z věty VII.2. Obsahuje-li G jako podgraf graf K_4 nebo graf získaný z něho postupným půlením hran, pak $\tilde{G}$ obsahuje jako podgraf graf K_5 nebo graf z něho získaný postupným půlením hran. Tento graf se skládá ze zmíněného podgrafu grafu G, z uzlu x a z hran spojujících uzel x s uzly tohoto podgrafu, které mají stupeň 3. Pak graf $\tilde{G}$ není rovinný a podle věty VII.2 graf G není vnějškově rovinný. Podobně obsahuje-li G jako podgraf graf $K_{2,3}$ nebo graf získaný z něho postupným půlením hran, obsahuje $\tilde{G}$ jako podgraf graf $K_{3,3}$ nebo graf z něho získaný postupným půlením hran a také není rovinný, tedy G není vnějškově rovinný. Nyní předpokládejme, že G neobsahuje jako podgraf graf K_4 ani $K_{2,3}$ ani graf vzniklý z některého z těchto grafů postupným půlením hran. Pokud by G nebyl vnějškově rovinný, graf $\tilde{G}$ by nebyl rovinný a obsahoval by jako podgraf graf K_5 nebo $K_{3,3}$ nebo graf vzniklý z některého z těchto grafů postupným půlením hran. Potom by však G obsahoval podgraf získaný z některého takového podgrafu odstraněním jednoho uzlu. Snadno dokážeme, že takovýto graf obsahuje jako podgraf K_4 nebo $K_{2,3}$ nebo graf získaný z některého z nich postupným půlením hran. Tento graf by byl také podgrafem grafu G, což by byl spor s předpokladem.

Věta VII.4. *Budiž G vnějškově rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech. Pak existuje vnějškově rovinný graf G' o stejné množině uzlů jako graf G takový, že existuje jeho rovinná representace $\mathcal{R}(G')$, v níž všechny oblasti kromě jedné mají stupeň 3. Počet hran grafu G' je $2n - 3$, počet oblastí libovolné jeho rovinné representace je $n - 1$.*

Důkaz. Použijeme opět grafu $\tilde{G}$ z věty VII.2. Podle věty V.3 existuje graf triangulace $\tilde{G}'$ o stejné množině uzlů jako $\tilde{G}$. V libovolné representaci $\mathcal{R}(\tilde{G}')$ grafu $\tilde{G}'$ všechny oblasti mají stupeň 3. Počet uzlů grafu $\tilde{G}'$ je $n + 1$, počet jeho hran je $3(n + 1) - 6 = 3n - 3$, počet oblastí jeho rovinné representace je $2(n + 1) - 4 =$

$= 2n - 2$. Graf G' bude graf vzniklý z $\tilde{G}'$ odstraněním uzlu x. Všechny oblasti grafu G' mají stupeň 3 kromě jedné, která je incidentní se všemi uzly grafu G' a jejíž stupeň je tedy n. Odstraněním uzlu x z grafu $\tilde{G}'$ se počet hran zmenší o n, tedy G' obsahuje $2n - 3$ hrany. Z Eulerova vzorce bychom určili počet oblastí libovolné rovinné representace grafu G'; je to $n - 1$.

Grafům popsaným v této větě budeme říkat maximální vnějškově rovinné grafy.

Analogicky jako větu V.4 bychom dokázali následující větu.

Věta VII.5. *Maximální počet hran vnějškově rovinného grafu o n uzlech je $2n - 3$, maximální počet oblastí libovolné jeho rovinné representace je $n - 1$.*

V kapitole V jsme poznali, že každý rovinný graf obsahuje alespoň jeden uzel stupně menšího než šest. Podobnou větu lze dokázat i pro vnějškově rovinné grafy.

Věta VII.6. *Nechť G je vnějškově rovinný graf. Pak v grafu G existuje uzel u, pro nějž $\varrho_G(u) \leqq 2$.*

Důkaz. Věta zřejmě platí pro grafy o méně než čtyřech uzlech. Podle věty VII.4 každý vnějškově rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech lze přidáváním hran doplnit na maximální vnějškově rovinný graf o stejné množině uzlů. Proto stačí, dokážeme-li tvrzení pro maximální vnějškově rovinné grafy; pak bude platit pro všechny vnějškově rovinné grafy. Je-li G maximální vnějškově rovinný graf, pak $\omega(G) \geqq 2$, protože pro odpovídající graf $\tilde{G}$

(vzniklý přidáním jediného uzlu) je $\omega(\tilde{G}) \geqq 3$. Mějme nyní rovinnou representaci grafu G, v níž existuje oblast f incidentní se všemi uzly grafu G. Podle věty VII.1 hranicí této oblasti je Hamiltonova kružnice K. Protože $n \geqq 4$, zřejmě existují hrany grafu G nepatřící kružnici K. Budiž d nejmenší vzdálenost dvou uzlů spojených takovouto hranou na kružnici K (to jest délka nejkratší možné cesty, která spojuje takovéto dva uzly a je podgrafem kružnice K). Kdyby bylo $d \geqq 3$, tato nejkratší cesta spolu s hranou spojující zmíněné uzly by tvořila kružnici, která by byla hranicí oblasti stupně většího než 3 a různá od f (žádné dva uzly této kružnice by nebyly spojeny hranou nepatřící této kružnici, protože jinak by tato cesta nebyla nejkratší cestou dané vlastnosti). Je tedy $d = 2$ a existují uzly u, v, w tak, že uv a vw jsou hrany kružnice K a uw je hrana grafu G nepatřící do K. Uzel v nemůže být spojen hranou s uzlem grafu G různým od u a w, protože oblouk odpovídající takové hraně by protínal oblouk odpovídající hraně uw nebo by procházel oblastí f, což nelze. Tedy $\varrho_G(v) = 2$.

Z této věty a z věty II.6 plyne důsledek analogický větě V.8.

Věta VII.7. *Nechť G je vnějškově rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech. Pak $\omega(G) \leqq 2$.*

Pomocí věty VII.6 můžeme dokázat i větu o chromatickém čísle vnějškově rovinného grafu.

Věta VII.8. *Nechť G je vnějškově rovinný graf. Pak $\chi(G) \leqq 3$.*

Důkaz. Budeme větu dokazovat matematickou indukcí podle počtu uzlů grafu G. Je-li tento počet menší nebo roven třem, věta zřejmě platí. Budiž k přirozené číslo, $k \geqq 4$, a předpokládejme, že věta platí pro všechny vnějškově rovinné grafy o $k - 1$ uzlech. Nechť počet uzlů grafu G je k. Podle věty VII.6 existuje uzel v grafu G takový, že $\varrho_G(v) \leqq 2$. Budiž G' graf získaný z G odstraněním uzlu v. Graf G' je zřejmě vnějškově rovinný graf a má $k - 1$ uzlů. Existuje tedy přípustné obarvení uzlů grafu G' třemi barvami. Protože $\varrho_G(v) \leqq 2$, existuje mezi těmito třemi barvami alespoň jedna, kterou není obarven žádný z uzlů, jež jsou v G spojeny hranami s uzlem v. Touto barvou obarvíme uzel v a získáme tak přípustné obarvení grafu G třemi barvami.

Cvičení

1. Nakreslete maximální vnějškově rovinný graf o 10 uzlech.

2. Je-li G rovinný graf o n uzlech a obsahuje-li tento graf uzel stupně $n - 1$, pak $\chi(G) \leqq 4$. Dokažte.

3. Dokažte, že maximální vnějškově rovinný graf o $n \leqq 4$ uzlech má uzlový stupeň souvislosti rovný dvěma.

4. Nakreslete vnějškově rovinný graf o 8 uzlech, který je sudý a má tu vlastnost, že přidáním libovolné hrany z něho vznikne graf, který buď není sudý, nebo není vnějškově rovinný.

5. Dokažte, že vnějškově rovinný sudý graf o lichém počtu uzlů má uzlový stupeň souvislosti nejvýše 1.