3 Anatolij Dvurečenskij: Začiatky teórie kvantových logík na Slovensku[3]

V školskom roku 1969/70 ma na vtedajšej Prírodovedeckej fakulte UK začali učiť mladí docenti: doc. RNDr. Tibor Neubrunn, CSc., a doc. RNDr. Beloslav Riečan. Doc. Neubrunn nám prednášal teóriu množín a teóriu miery a integrálu a doc. Riečan zase teóriu pravdepodobnosti. Obaja nás upútali svojim prednesom, zápalom a jasnosťou výkladu. Takže nečudo, že som neskoršie požiadal doc. Riečana o vhodnú tému na diplomovú prácu a on mi vybral Poincarého vetu o rekurentnosti na kvantových logikách. Vtedy som netušil, že kvantové logiky sa stanú odborom, ktorému sa budem venovať vyše 40 rokov.

Čo to teda sú kvantové logiky a akú úlohu v nich zohral prof. T. Neubrunn? V roku 1933 sa objavila útla monografia A. N. Kolmogorova [8] o matematických základoch teórie pravdepodobnosti. Základným postulátom bolo, že čo potrebujeme poznať pri opise pravdepodobnostnej situácie, je trojica $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, kde Ω je neprázdna množina, $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožín množiny Ω a P je σ-aditívna pravdepodobnostná miera na $\mathcal{S}$. Teória pravdepodobnosti sa vďaka tejto axiomatike stala pevnou súčasťou matematiky. A aj dnes po vyše 83 rokoch sa na kurzoch z teórie pravdepodobnosti začína prednášať študentom známa trojica $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a tento model sa stal teoretickou základňou pre matematickú štatistiku.

Avšak už hneď po objave Kolmogorovho modelu teórie pravdepodobnosti sa ukázalo, že sú oblasti, kde tento model nie je vhodný. Takouto oblasťou bola tzv. nová fyzika, ktorú dnes nazývame kvantová mechanika. Známym v tomto smere sa stal Heisenbergov princíp neurčitosti, ktorý hovorí, že ak meriame polohu a moment kvantovo-mechanickej častice, tak súčin ich disperzií v každom stave je väčší alebo rovný ako kladná nenulová konštanta. V klasickej mechanike, používajúcej Kolmogorovov model, to nie

[3] Tento text vznikol s podporou projektov APVV-0178-11, VEGA 2/0069/16 a GAČR 15-15286S. Text bol publikovaný v článku A. Dvurečenskij: *Tibor Neubrunn a začiatky kvantových logík na Slovensku*. Obzory mat. fyz. inform. 45 (2016), 69–72.

je možné, pretože tento súčin konverguje k nule. Heisenbergov princíp neurčitosti vlastne hovorí, že pri kvantovo mechanickom meraní sa stáva, že existujú pozorovateľné, ktoré nie je možné zmerať s vopred zadanou presnosťou. Ináč povedané, kvantovo-mechanické udalosti netvoria Boolovskú σ-algebru, ale všeobecnejšiu štruktúru, ktorá sa od čias G. Birkhoffa a J. von Neumanna nazýva *kvantová logika* [1]. Dnes sa zvykne hovoriť aj o kvantových štruktúrach, pretože sa rozšírila kategória zaujímavých modelov nie len o ortomodulárne zväzy a posety, ale dnes sa aktívne študujú ortoalgebry, D-posety, efektové algebry, MV-algebry, pseudo MV-algebry, atď.

Záujem o teóriu kvantových logík vzrástol vo svete v 60-tych rokoch, keď sa objavili práce V. S. Varadarajana, S. P. Guddera, P. Suppesa, pozri [16], [17], [6], [15], a iných. Je potešiteľné, že aj Slovensko zachytilo tento trend a práve jedným z prvých pionierov u nás sa stali prof. Neubrunn a tiež prof. Riečan. Ďalšie slovenské centrum bolo na Ústave teórie merania SAV, kde vznikol seminár z kvantovo-mechanických meraní pod vedením profesora A. Pázmana.

Väčšinou pod kvantovou logikou sa rozumie poset L, ktorý je vybavený ortokomplementáciou, je uzavretý na tvorbu spočítateľných suprém navzájom ortogonálnych prvkov a platí preň ortomodulárny zákon, čo je slabšia forma distributívneho zákona. Pripomínam, že dva prvky a, b z L sú ortogonálne, ak a je menšie alebo rovné ako ortogonálny komplement prvku b. V kvantovej mechanike sa používa najdôležitejší model $L(H)$, kde H je Hilbertov priestor a $L(H)$ je systém všetkých uzavretých podpriestorov priestoru H. $L(H)$ je úplný zväz, nie je to Boolovská algebra ani distributívny zväz. Druhým najdôležitejším modelom je tzv. σ-trieda, čo je systém podmnožín množiny Ω, uzavretý na množinové komplementy a spočítateľné zjednotenia navzájom disjunktných množín. σ-trieda je prirodzeným zovšeobecnením σ-algebry množín.

Základným problémom je tzv. kompatibilita, t. j. vlastnosť, že dva prvky a a b sa dajú rozštepiť tak, že existujú také tri navzájom ortogonálne prvky a_1, b_1, c, že $a = a_1 + c$, $b = b_1 + c$. Kvantová logika je Boolovská algebra vtedy a len vtedy, keď každé dva prvky sú kompatibilné. Dá sa ukázať, že kvantová logika sa dá pokryť tzv. blokmi, ktoré sú Boolovské algebry.

Pojmy ako pravdepodobnostná miera alebo náhodná premenná sa študujú v teórii kvantových logík ako stavy a pozorovateľné, kde pozorovateľná sa chápe ako σ-homomorfizmus z Borelovských množín do logiky a kompatibilita je nástroj, ako vyjadriť jednu pozorovateľnú ako funkciu od druhej pozorovateľnej.

V práci [16] sa študovala ako hlavná otázka kompatibilita pozorovateľných, čo sa prevádzalo na otázku súmerateľnosti, t. j. kedy sa dve Boolovské podalgebry dajú vnoriť do jednej spoločnej Boolovej podalgebry. No ukázalo sa, že v práci [16] je chyba, ak sa predpokladá, že logika je poset a nie zväz, tak ako sa to už správne predpokladalo v monografii [17]. Preto vzrástol záujem odborníkov vyšetriť súmerateľnosť pre logiky, čo nie sú zväzmi.

Typickým prípadom nezväzovej logiky je vo všeobecnosti σ-trieda. V prípade, že kvantová logika je σ-trieda, tak sa dá ukázať, že dve udalosti sú kompatibilné práve vtedy, keď ich množinový prienik padne do σ-triedy. Profesor Neubrunn sa hneď začal venovať problematike kompatibility a v práci [10] začal študovať otázku, kedy σ-podtrieda generovaná podmnožinou A v σ-triede je σ-algebra podmnožín. Autor prezentoval dve nutné a postačujúce podmienky a v prípade, že A je tvorené otvorenými podmnožinami topologického priestoru, generovaná σ-podtrieda je σ-algebrou podmnožín. T. Katriňák a T. Neubrunn v práci [7] zavádzajú tzv. n-kompatibilitu a aplikujú ju úspešne na problematiku súmerateľnosti v σ-triedach.

Pre všeobecnejšie logiky, t. j. tie, ktoré sa nedajú reprezentovať ako σ-triedy, postačujúcou podmienkou je regularita, t. j. ak a, b, c sú navzájom kompatibilné, potom a je kompatibilné so suprémom b a c. Veľmi všeobecnú podmienku pre súmerateľnosť zaviedol T. Neubrunn v [11], ktorá sa volá L_0-kompatibilita: Podmnožina A kvantovej logiky L je L_0-kompatibilná, ak pre každé dva kompatibilné prvky a, b z A, prvky rozkladu a_1, b_1, c patria do L_0, kde L_0 je podlogika logiky L generovaná množinou A. Tento výsledok sa potom aplikoval na pozorovateľné. Príbuznými otázkami súmerateľnosti sa autor zaoberal aj v práci [13].

Článok [12] pojednáva o tom, že ak máme dve σ-triedy, aký je vzťah merateľnosti vzhľadom na súčin týchto dvoch σ-tried.

V práci [4], ktorá bola jedna z posledných prác prof. Neubrunna, sa študovala otázka σ-aditivity stavov. Podarilo sa zovšeobecniť Alexandrovovu vetu o σ-aditívnych stavoch na určitú triedu logík. Aplikovaním toho výsledku sa podarilo ukázať kritérium úplnosti predhilbertovského priestoru, ktoré hovorí, že predhilbertovský priestor S je úplný, ak systém $E(S)$, systém všetky uzavretých podpriestorov priestoru S, kde platí Pytagorova veta, obsahuje aspoň jeden regulárny stav, t. j. stav, z ktorého hodnoty $s(M)$ sa dajú aproximovať zdola hodnotami na konečno rozmerných podpriestoroch priestoru M z $E(S)$.

Poznamenávame, že konečnú formu kompatibility pre ortomudulárne posety, t. j. otázku, kedy množinu prvkov posetu je možné vnoriť do Boolovej podalgebry, sa podarilo definitívne vyriešiť v prácach [2], [3].

Je potešiteľné, že na začiatku teórie kvantových štruktúr na Slovensku bol doc. RNDr. T. Neubrunn, CSc. Neskoršie sa táto matematická teória rozvinula a slovenská škola kvantových logík sa stala celosvetovým fenoménom a jej hlavnými predstaviteľmi sa stali S. Pulmannová, B. Riečan, Z. Riečanová a autor týchto riadkov a ich študenti. V deväťdesiatych rokoch slovenskú školu obohatili František Kôpka a Ferdinand Chovanec z Vysokej vojenskej školy v Liptovskom Mikuláši, ktorí prišli s veľmi všeobecným pojmom D-posety, [9], kde primárnym pojmom je rozdiel dvoch porovnateľných udalostí. Tento úspešný model má aj ekvivalentnú formuláciu ako efektové algebry zavedené Američanmi D. Foulisom a M. K. Bennetovou, pozri [5], kde hlavným pojmom je súčet navzájom sa vylučujúcich udalostí. Pripomínam, že D-posetom je venovaná aj monografia [14].

Literatúra

[1] Birkhoff, G., von Neumann, J.: *The logic of quantum mechanics.* Ann. Math. 37 (1936), 823–843.

[2] Brabec, J., Pták, P.: *On compatibility in quantum logics.* Found. Phys. 12 (1982), 207–212.

[3] Brabec, J.: *Compatibility in orthomodular posets.* Čas. pěst. mat. 104 (1983), 149–153.

[4] Dvurečenskij, A., Neubrunn, T., Pulmannová, S.: *Finitely additive states and completeness of inner product spaces*. Found. Phys. 20 (1990), 931–938.

[5] Foulis, D. J., Bennett, M. K.: *Effect algebras and unsharp quantum logics.* Found. Phys. 24 (1994), 1331–1352.

[6] Gudder, S. P.: *Quantum probability spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 296–302.

[7] Katriňák, T., Neubrunn, T.: *On certain generalized probability domains.* Matem. čas. 23 (1973), 209–215.

[8] Kolmogorov, A.N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Julius Springer, Berlin, 1933.

[9] Kôpka, F., Chovanec, F.: *D-posets.* Math. Slovaca 44 (1994), 21–34.

[10] Neubrunn, T.: *A note on a quantum probability spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 672–675.

[11] Neubrunn, T.: *On certain generalized random variables*. Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 29 (1974), 1–6.

[12] Neubrunn, T.: *Compatibility in logics and product measurability.* In Ergod. Theory and Relat. Topic., Proc. Conf. Vitte, Oct. 19–23, 1981, Akademie Verlag, Berlin 1982, 147–152.

[13] Neubrunn, T., Pulmannová, S.: *On compatibility in quantum logics.* AMUC 42-43 (1983), 153–168.

[14] Riečan, B., Neubrunn, T.: *Integral, Measure, and Ordering.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Ister Science, Bratislava, 1997.

[15] Suppes, P.: *The probabilistic argument for non-classical logic of quantum mechanics.* Phil. Scien. 33 (1966), 14–21.

[16] Varadarajan, V. S.: *Probability in physics and a theorem on simultaneous observability.* Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 189–217, correct. loc. cit 18 (1965), 757.

[17] Varadarajan, V. S.: *Geometry of Quantum Theory*. Vol. 1, van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1968.