Úvod

Tato publikace je systematickým a podrobným popisem postavení a významu goniometrických funkcí v elementární matematice. Výklad je podán v ucelené podobě, jakou jsme v bohaté literatuře věnované jednotlivým aspektům dané problematiky nenašli. Odvíjí se od otázek rovinné trigonometrie, té oblasti elementární matematiky, ve které se dotyčné funkce zrodily a nalezly nejvýznamnější praktické uplatnění (vedle teorie Fourierových řad, kterou však řadíme do vyšší matematiky). Ostatně česká matematická terminologie patří k těm výjimečným, ve kterých se ujal návrh významného matematika, fyzika a didaktika Felixe Kleina (1849 – 1925), který na počátku 20. století prosazoval změnu, aby se tyto funkce nazývaly *goniometrické*. V drtivé většině jazyků jim však dodnes (a patrně natrvalo) zůstal přívlastek *trigonometrické*.

V tomto krátkém vstupním textu popíšeme, jak je naše dílo sestaveno. Skládá se z šesti výkladových kapitol, které jsou doplněny o část nazvanou Závěr a závěrečný seznam použité literatury, jenž čítá na pět desítek položek rozdělených na historické práce, učebnice, různé druhy knih, sbírky úloh, články, příspěvky ve sbornících a internetové zdroje. Věnujme se nyní obsahové náplni jednotlivých kapitol.

Kapitola 1 poskytuje podrobný historický přehled vývoje poznatků o goniometrických funkcích. Z období starověku věnujeme největší pozornost Ptolemaiovým výpočtům délek tětiv. Neomezujeme se přitom pouze na popis postupu, jakým Ptolemaios své tabulky sestavoval, nýbrž podáváme detailní zdůvodnění jednotlivých kroků a důkazy potřebných teoretických výsledků, jakými je především Ptolemaiova věta o velikosti stran a úhlopříček obecného tětivového čtyřúhelníku. V druhé části historické kapitoly se obdobně věnujeme trigonometrickým výsledkům středověkých indických a arabských matematiků, kterým vděčíme za vznik dnešních goniometrických funkcí. Na tyto výsledky navázali evropští matematikové epochy renesance způsobem, který popisujeme ve třetí části kapitoly. Její čtvrtá, závěrečná část je celá věnována významným změnám v učení o goniometrických funkcích, za které vděčíme Leonhardu Eulerovi a které daly této disciplíně její novodobou podobu. Protože tento patrně nejgeniálnější matematik všech dob nahlížel na goniometrické funkce z pohledu rodící se matematické analýzy, v našem textu se při popisu dotyčných Eulerových výsledků nevyhneme nekonečným součtům a součinům, které přesahují celkově elementární rámec našeho textu.

Vlastní teorii goniometrických funkcí v oboru reálných čísel budujeme postupně v kapitolách 2, 3 a 4. V první z nich na základě geometrické podobnosti pravoúhlých trojúhelníků zavádíme obvyklým způsobem goniometrické funkce ostrého úhlu. Běžné školské poznatky doplňujeme o výklad některých obtížnějších otázek (například důkaz správnosti konstrukce pravidelného pětiúhelníku) a také o méně známé diagramy, podle kterých je možné názorně zdůvodnit součtové a rozdílové vzorce (v oboru ostrých úhlů).

V kapitole 3 postupně odvozujeme základní výsledky z rovinné trigonometrie (z nichž současní absolventi gymnázií bohužel znají pouze sinovou a kosinovou větu). Vycházíme přitom důsledně z vět o průmětech dvou stran trojúhelníku do směru třetí strany a do směru k němu kolmého. Ukazujeme, že požadavek univerzální platnosti těchto vět vede k přirozenému způsobu zavedení goniometrických funkcí tupého úhlu a že sinová i kosinová věta jsou přímými důsledky těchto vět (takže kosinovou větu lze odvodit bez užití Pythagorovy věty). Odvozujeme rovněž dnes již pozapomenutou tangentovou větu a Mollweidovy vzorce. Věnujeme se i důkazům součtových a rozdílových vzorců (tentokrát již v oboru konvexních úhlů), jejichž platnost využijeme v kapitole 4 při budování teorie goniometrických funkcí v oboru reálných čísel.

Posledně zmíněná kapitola 4 je z celé práce nejrozsáhlejší. Na bezmála osmdesáti stranách v ní nejprve obvyklým postupem zavádíme goniometrické funkce orientovaného úhlu pomocí kartézských souřadnic bodu na jednotkové kružnici. Poté se věnujeme po etapách odvozování široké palety základních goniometrických vzorců. Nejprve užitím planimetrických souměrností a rotace o 90° zdůvodňujeme převodní vzorce pro sinus a kosinus, které nám pak pomohou k rozšíření součtových a rozdílových vzorců z oboru $(0, \pi)$ na obor $\mathbb{R}$. Z nich už pak běžnou cestou odvozujeme všechny ostatní potřebné goniometrické vzorce.

V další části kapitoly 4 se pak věnujeme významnému praktickému úkolu – řešení goniometrických rovnic a nerovnic. Výklad vedeme původním postupem, při kterém nově vyčleňujeme některé typy rovnic, zejména u substituční metody řešení. Obecnou teorii ilustrujeme průběžně řešenými příklady. Podrobně řešené příklady tvoří i zbývající části kapitoly 4, jež pojednávají o goniometrických soustavách rovnic a četných goniometrických identitách a rovnostech, které se nám podařilo z dostupné literatury nashromáždit. Souborem rozmanitých příkladů je ostatně ukončena nejen kapitola 4, ale i předchozí kapitoly 2 a 3. Tyto příklady bohatě ilustrují a někdy i rozšiřují poznatky a metody z výkladu dotyčné kapitoly. Ve srovnání s běžnými školními učebnicemi a sbírkami jsou námi vybrané příklady méně standardní, a proto je i jejich řešení zpravidla náročnější. U zadání převzatých příkladů jsou v poznámkách pod čarou uvedeny odkazy na literaturu.

Zvláštní postavení v celé práci má kapitola 5, která je pojata jako „encyklopedický“ výklad rozmanitých rovností a nerovností, které platí pro goniometrické hodnoty na vnitřních úhlech α, β, γ (či jejich násobcích) libovolného trojúhelníku. K tomu účelu jsme vypracovali postup, který nám umožnil množství těchto výsledků (nepřehledně rozptýlených v literatuře) podat na dvaceti stranách textu v uspořádané a logicky provázané podobě.

Závěrečná výkladová kapitola 6 přesvědčivě dokládá, že sama trigonometrie není jedinou oblastí elementární matematiky, v níž lze úspěšně a účelně goniometrické funkce využít. V její první části se zabýváme goniometrickými substitucemi při řešení různých algebraických rovnic a jejich soustav, úloh o rekurentních posloupnostech a při dokazování algebraických nerovností. Druhá část kapitoly je věnována užití goniometrických funkcí při výpočtech s komplexními čísly, přitom v ukázkách se výhradně věnujeme situacím, v jejichž popisu komplexní čísla vůbec nevystupují. Konečně v třetí části kapitoly 6 se zabýváme významem goniometrických funkcí pro matematickou kartografii, prakticky navýsost užitečné disciplíně s bohatou zajímavou historií, o níž v textu rovněž stručně pojednáváme. Myslíme si, že tím dobře dokreslujeme nedocenitelný význam trigonometrie či šířeji celé goniometrie, jak jsme ho prvotně načrtli v historicky zaměřené kapitole 1.

Publikace, kterou držíte ve svých rukou, je knižní podobou Ph.D. práce [49], vypracované autorkou v letech 2004 – 2011 na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity pod vedením jejího pedagoga docenta *Jaromíra Šimši*. Jemu patří autorčin dík za odborné vedení, četné koncepční náměty, rady a připomínky, které rozhodujícím způsobem ovlivnily obsah, formu i kvalitu provedení výsledného díla.

Velký dík patří také Mgr. Petru Liškovi, který se podílel na tvorbě obrázků v celé práci.