Centrální pojem teorie potenciálu: vymetání

Ivan Netuka

Abstract. Since the time of Poisson and Green it has been known that a charge placed inside a ball can be replaced by a charge distributed on the sphere S in such a way that the potentials of the original charge and of the *swept out* charge on S coincide outside the ball. More generally, given a domain in $\mathbb{R}^3$ bounded by a sufficiently smooth surface S and a mass or charge μ inside S, Gauss pointed out in 1839 that μ can be swept out onto S, that is, a distribution μ' on S can be found such that the Newtonian potentials of μ and μ' coincide outside the domain. Such a transformation of mass is called *balayage*.

This contribution, *The central notion of potential theory: balayage*, is a survey of the role played by balayage in the historical development of potential theory with particular emphasis on the first half of the 20th century. In particular, we discuss connections with the Dirichlet problem and notions such as capacity, harmonic measure, energy, exceptional sets, thinness etc. We also mention the place of balayage in probabilistic potential theory related to Brownian motion and in abstract potential theory.

Key words. Potential theory, balayage of measures, balayage of superharmonic functions, potential, capacity, energy, Dirichlet problem, Brownian motion, harmonic space, balayage space.

1. Úvod

Kořeny teorie potenciálu vycházejí z problémů fyziky a astronomie souvisejícími s gravitační přitažlivostí těles, později s elektrostatikou a elektromagnetickou teorií nebo šířením tepla. Potenciálem silového pole se rozumí funkce, jejíž parciální derivace určují komponenty síly ve směru souřadnicových os.

Podstatné výsledky teorie potenciálu jsou spojeny se jmény slavných matematiků 18. a 19. století: Lagrange, Euler, Legendre, Laplace, Poisson, Thomson, Green, Gauss, Dirichlet, Riemann, Schwarz, C. Neumann, Poincaré a Hilbert.

Za počátek *matematické* teorie potenciálu bývá považována práce *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs – und Abstossungs-Kräfte*, kterou Gauss publikoval v roce 1839; viz [Ga]. Obsah práce je oproštěn od fyzikálních souvislostí a jejím cílem je prezentovat věty o existenci, o nichž se níže zmíníme. Je třeba konstatovat, že matematické nástroje, které byly v 19. století k dispozici, neumožňovaly provést korektní důkazy na úrovni pozdějších standardů přesnosti prezentace matematických výsledků. Přesto Gaussovy pronikavé myšlenky významně motivovaly vývoj teorie potenciálu minimálně do poloviny 20. století.

Gaussova práce je především věnována třem problémům.

A. Problém rovnovážného rozdělení. Z úvodního kurzu fyziky známe vzorec $C = Q/V$. Uvažujeme-li vodič D v $\mathbb{R}^3$, víme, že náboj velikosti Q se rozloží na povrchu vodiče takovým způsobem, že odpovídající potenciál má na D konstantní hodnotu V. Pokud se mění velikost náboje Q, poměr Q/V se nemění. Tato hodnota C se nazývá *kapacita* vodiče D.

Matematicky problém spočívá pro dané vodivé těleso v určení kapacity a rozložení náboje Q. Pokud odpovídající potenciál má na vodiči hodnotu 1, mluvíme o *rovnovážném potenciálu.*

B. Problém vymetání. Uvažujeme uzavřenou plochu S v $\mathbb{R}^3$ obklopující oblast D a náboj μ rozprostřený na D. Pokud S představuje uzemněný vodič, z elektrostatiky víme, že se elektrostatickou indukcí na S rozloží záporný náboj μ' takový, že potenciál náboje $\mu - \mu'$ je na $D^c := \mathbb{R}^3 \setminus D$ roven nule, tedy hodnoty potenciálů rozdělení μ a μ' se shodují na D^c. Můžeme si představit, že μ' vznikl jako výsledek *vymetení* náboje μ z D na komplement D. (Podobně pro případ, že náboj je rozprostřen vně S.)

C. Dirichletova úloha. Nechť D je omezená oblast v $\mathbb{R}^3$ a nechť jsou známy hodnoty potenciálu V na hranici S množiny D. Cílem je najít potenciál V', jehož příslušný náboj je na D nulový a hodnoty V a V' splývají na S.

Gauss uvedené problémy řešil pomocí variačního principu, podrobněji viz odst. 4.

Oprávněnost Gaussových argumentů je však z hlediska matematické přesnosti zpochybnitelná. Postavit Gaussovy úvahy na matematicky korektní základ trvalo ještě dalších 95 let.

Přestože základní pojmy teorie potenciálu svými názvy prozrazují jejich fyzikální původ, od poloviny 19. století se teorie potenciálu začíná profilovat jako samostatná matematická disciplína.

Německý referativní časopis *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* vycházející v letech 1868–1942 uvádí *Potentialtheorie* jako samostatný oddíl. Americký referativní časopis *Mathematical Reviews* (v elektronické verzi *MathSciNet*) vychází od roku 1940. K červnu 2020 je evidováno v oddílu 31 *Potential Theory* více než 18 000 recenzí.

Zatímco řada matematických disciplín klasifikovaných v referativních časopisech je dostatečně dobře tematicky vymezena, u teorie potenciálu je situace složitější. Protíná se v ní totiž řada disciplín z matematické analýzy (reálná analýza, analýza v komplexním oboru, teorie míry a integrálu, parciální diferenciální rovnice, integrální rovnice, harmonická analýza, teorie aproximace) a ve 20. století se pak objevují souvislosti s topologií, funkcionální analýzou, s teorií pravděpodobnosti, diferenciální geometrií, konvexitou a diskrétní matematikou. Tento výjimečný rys teorie potenciálu vyjádřil při zahájení konference z teorie potenciálu (Paříž, Orsay, 1964) v úvodním slově Pierre Jacquinot takto: *La théorie du potentiel est un véritable carrefour de la Mathématique* [Teorie potenciálu je opravdovou křižovatkou matematiky]; viz [DP, s. vii].

V tomto příspěvku se soustředíme na základní myšlenky, pojmy a výsledky teorie potenciálu v jejich historické perspektivě s důrazem na období mezi 1. a 2. světovou válkou. Zejména se věnujeme centrální roli, kterou ve vývoji teorie potenciálu zaujímá pojem vymetání. Stručně se dotkneme také poválečné transformace klasické teorie potenciálu v abstraktní matematickou disciplínu. Příspěvek ilustruje, jak nové matematické nástroje umožnily pokrok teorie potenciálu, a zároveň ukazuje, jak teorie potenciálu ve 20. století obohatila vývoj matematiky.

Historii teorie potenciálu je věnována rozsáhlá literatura. Zde uvádíme pouze vybrané prameny: [Bo], [Br1], [Br7], [Br10], [Br12], [Br13], [BM], [Di], [Gi], [Ja], [Kg2], [Kl], [Li], [Ma], [Mo2], [Ne2], [Ne5], [Ne6], [Va2], [Va3], [Va4], [Va5]. Při zpracování tohoto příspěvku jsme vycházeli částečně z práce [Ne6].

2. Potenciál a Laplaceova rovnice

Teorie potenciálu má původ v Newtonově gravitačním zákonu z roku 1666. V současné terminologii jej můžeme formulovat takto: hmotný bod x o hmotnosti m_x působí na hmotný bod $y \neq x$ o hmotnosti m_y přitažlivou silou, která je vyjádřena Newtonovým gravitačním zákonem,

$$F(y) = -\gamma \, \frac{m_y m_x}{|y-x|^2} \cdot \frac{y-x}{|y-x|},$$

kde γ je tzv. gravitační konstanta.

Lagrange ve své práce z let 1773/1774 upozornil na skutečnost, že pro newtonovskou gravitační sílu, což je vektorová funkce, lze s výhodou využít existenci skalární funkce, jejíž parciální derivace určují velikost síly ve směru souřadnicových os. V literatuře se pro takovou skalární funkci vyskytují různé termíny, např. potenciální funkce (Green, 1825), silová funkce (Hamilton, 1834), potenciál (Gauss, 1839).

Jestliže definujeme v $\mathbb{R}^3$ funkci

$$N_x(y) := 1/|y-x|, \quad y \neq x,$$

(klademe $N_x(x) = \infty$), pak na $\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}$ platí

$$F = \gamma \, m_x m_y \big(\partial N_x/\partial y_1, \, \partial N_x/\partial y_2, \, \partial N_x/\partial y_3 \big),$$

takže síla je určena funkcí N_x.

Níže uvidíme, že funkce $(x,y) \mapsto N_x(y)$ hraje v klasické teorii potenciálu fundamentální roli. Pracovat s jednou skalární funkcí místo s vektorovou funkcí ostatně představuje určité zjednodušení. Navíc $N_x(y)$ má známý fyzikální význam: jestliže při pevně zvolené jednotkové hmotě v bodě x odsuneme jednotkovou hmotu z bodu y do nekonečna, vykonáme tak při překonání přitažlivé síly práci o velikosti $N_x(y)$.

Výpočtem se zjistí, že na $\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}$ platí

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 N_x}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 N_x}{\partial y_3^2} = 0.$$

Tedy N_x splňuje tzv. *Laplaceovu rovnici*, která představuje pilíř klasické teorie potenciálu.

Tuto rovnici Laplace nejprve odvodil ve sférických souřadnicích v roce 1785 a v roce 1789 v kartézských souřadnicích v práci o Saturnových prstencích; viz [Ja, s. 198].

Pro další výklad bude užitečné připomenout definici Newtonova a logaritmického jádra v obecnějším kontextu (význam normalizace bude zřejmý později, viz (3)). Definujeme

$$\text{pro } n \geq 3, \quad G(x,y) := \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \cdot \frac{1}{|y-x|^{n-2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{pro } n = 2, \quad G(x,y) := \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|y-x|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n;$$

zde σ_n je povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^n$ a rozumí se, že $G(x,x) = \infty$. Poznamenejme, že teorie potenciálu v rovině vykazuje celou řadu odlišností oproti teorii potenciálu v $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 3$. V tomto příspěvku se proto převážně soustředíme na vícerozměrný případ. Teorii potenciálu v rovině je věnována např. publikace [Rn]; viz též [AG] a [He].

Jak je známo, *Laplaceův operátor* v $\mathbb{R}^n$ je definován jako součet druhých nesmíšených parciálních derivací:

$$\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}.$$

Snadno se ověří, že pro $x \in \mathbb{R}^n$ je funkce $G_x : y \mapsto G(x,y)$ řešením Laplaceovy rovnice:

$$\Delta G_x = 0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{x\}.$$

Vidíme, že teorie potenciálu je těsně svázána s Laplaceovou rovnicí $\Delta h = 0$. Někdy dokonce bývá klasická teorie potenciálu považována v širším slova smyslu za teorii Laplaceovy rovnice.

Následující definice je všeobecně známá. Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Říkáme, že reálná funkce h třídy $C^2(D)$ je *harmonická* na D, jestliže

$$\Delta h = 0 \quad \text{na } D.$$

Pro $n = 1$ je funkce h definovaná na otevřeném intervalu harmonická, právě když je lineární. Pro $n = 2$ mají harmonické funkce blízký vztah k holomorfním funkcím studovaným v komplexní analýze: reálná a imaginární část holomorfní funkce jsou harmonické funkce. Je-li $D \subset \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast a u je harmonická funkce na D, pak existuje harmonická funkce v na D (určená až na konstantu jednoznačně) taková, že funkce $f := u + iv$ je holomorfní na D.

Uveďme zde ještě vcelku málo známý fakt, že Laplaceova rovnice se objevuje v Eulerově práci věnované hydrodynamice již v roce 1761, tedy několik let před Laplacem; viz [Kl, s. 525], [So, s. 16].

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$. Označíme $B(x_0, r)$ otevřenou kouli o středu x_0 a poloměru r a $S(x_0, r) = \partial B(x_0, r)$ sféru o středu x_0 a poloměru r. Dále označíme λ Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^n$ a σ povrchovou míru v $\mathbb{R}^n$. Již jsme zavedli označení $\sigma_n := \sigma(S(0,1))$, označme ještě $\lambda_n := \lambda(B(0,1))$.

Jestliže $D \subset \mathbb{R}^n$, uzávěr $\overline{B(x_0, r)}$ koule $B(x_0, r)$ je obsažen v D a h je harmonická funkce na D, pak z Greenovy identity plyne

$$h(x_0) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x_0,r)} h \, d\sigma. \tag{1}$$

Integrací podle poloměru se dostane

$$h(x_0) = \frac{1}{\lambda_n r^n} \int_{B(x_0,r)} h \, d\lambda. \tag{2}$$

Rovnosti (1) a (2) vyjadřují tzv. *vlastnost průměru* harmonických funkcí; viz [AG, s. 3].

Věta o průměru pochází od Gausse; viz [Ga]. Koebe v roce 1906 dokázal, že spojitost funkce h a platnost jedné z podmínek (1) a (2) (pro každou kouli, jejíž uzávěr je obsažen v D) implikuje, že h je harmonická funkce, tedy vlastnost průměru harmonické funkce charakterizuje. Větám o průměru je věnován článek [NV].

Harmonické funkce vystupují ve formulaci prototypu okrajových úloh matematické fyziky, v klasické *Dirichletově úloze*, někdy nazývané *první okrajová úloha teorie potenciálu*.

Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená množina s hranicí ∂D a $f : \partial D \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Úloha spočívá v nalezení takové harmonické funkce h na D, jejíž spojité rozšíření se na ∂D shoduje s f.

S formulací Dirichletovy úlohy se pojí tyto dvě přirozené otázky:

(a) má Dirichletova úloha řešení pro každou spojitou funkci na ∂D?

(b) je řešení, pokud existuje, určeno jednoznačně?

V dalším výkladu uvidíme, že hledání odpovědi na otázku (a) ovlivnilo matematiku na velmi dlouhé období a přineslo celou řadu hlubokých pozoruhodných výsledků; viz odst. 3.

Na druhé straně, odpověď na otázku (b) lze získat snadno. Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast, tedy omezená souvislá otevřená množina, h je funkce spojitá na uzávěru $\overline{D}$ množiny D a harmonická na D a nechť $h = 0$ na ∂D. Označme $m := \max h(\overline{D})$ a $M := \{x \in D : h(x) = m\}$. Potom M je uzavřená podmnožina D (spojitost). Je-li $x_0 \in M$, $B(x_0, r_0) \subset D$ a $0 < r < r_0$, pak $h = m$ na $S(x_0, r) \cap M$. Víme, že $S(x_0, r) \setminus M$ je otevřená podmnožina $S(x_0, r)$. Kdyby $h(x) < m$ v některém bodu $x \in S(x_0, r) \setminus M$, platilo by podle (1)

$$m > \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x_0,r)} h \, d\sigma = h(x_0) = m,$$

což je spor. Tedy $B(x_0, r_0) = \bigcup\{S(x_0, r) : 0 < r < r_0\} \subset M$, tudíž množina M je otevřená. Ze souvislosti množiny D dostáváme $D = M$, tedy $h \leq 0$, neboť $h = 0$ na ∂D. Stejnou úvahu aplikujeme na funkci $-h$, takže $-h \leq 0$, odtud $h = 0$ na D, a tedy Dirichletova úloha má nejvýše jedno řešení.

Nyní připomeneme *Poissonův integrál*, který poskytuje řešení Dirichletovy úlohy pro kouli. *Poissonovo jádro* pro kouli $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ je funkce

$$K_{B(x_0,r)}(x, y) := \frac{1}{\sigma_n r} \cdot \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n}, \quad y \in S(x_0, r),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}.$$

Pro funkci f integrovatelnou vzhledem k σ na $S(x_0, r)$ definujeme *Poissonův integrál* takto:

$$I_{B(x_0,r)} f(x) := \int_{S(x_0,r)} f(y) K_{B(x_0,r)}(x, y) \, d\sigma(y), \quad x \in B(x_0, r).$$

Potom (viz např. [AG, s. 6]) pro funkci f spojitou na $S(x_0, r)$ je $I_{B(x_0,r)} f$ řešením Dirichletovy úlohy na $B(x_0, r)$ pro okrajovou podmínku f. Poissonův integrál pochází z roku 1823, viz [Ps], ovšem rigorózní důkaz o nabývání okrajové podmínky podal H. A. Schwarz až v roce 1872; viz [Sc].

Integrální reprezentace pomocí Poissonova integrálu je klíčem k důkazu mimořádně důležité věty o konvergenci harmonických funkcí: nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je oblast a (h_j) je neklesající posloupnost harmonických funkcí na D. Potom je $h := \lim_{j \to \infty} h_j$ buďto rovna ∞ na D nebo je h na D harmonická. Tento výsledek pochází od A. Harnacka; viz [Hr]. Později uvidíme, že tato konvergenční vlastnost, tzv. *Harnackova věta*, nalezla významné uplatnění v moderní teorii potenciálu.

Může se zdát překvapivé, že ještě v prvních dekádách 20. století nebyly známy definitivní odpovědi na principiální otázky týkající se kapacitního potenciálu, vymetání či Dirichletovy úlohy. Důvod, z dnešního pohledu, je prostý: tehdy známé matematické nástroje byly pro řešení uvedených úloh nedostatečné. Především pojem potenciálu nebyl dostatečně obecný. Matematici uvažovali pouze potenciály mající hustotu vzhledem, řečeno v dnešní terminologii, k objemové či povrchové míře.

Zcela zásadní zvrat v teorii potenciálu znamenal pokrok v teorii integrálu. J. Radon ve své mimořádně významné práci [Rd1] z roku 1913 zavedl zobecnění Lebesgueova a Stieltjesova integrálu pro funkce více proměnných. Tzv. *Lebesgueův-Stieltjesův-Radonův integrál* se stal optimálním nástrojem pro stěžejní pojmy teorie potenciálu. Příslušná míra (σ-aditivní funkce na borelovských množinách) se velmi dobře hodí pro modelování fyzikálních veličin, jako jsou rozložení hmoty nebo náboje. Podstatné však, jak další vývoj ukázal, jsou možnosti limitních přechodů pro míry a integrály.[1]

V [Br12] připisuje M. Brelot uplatnění Radonova integrálu v teorii potenciálu G. C. Evansovi v jeho práci [Ev1]. Ve skutečnosti se obecná definice (logaritmického) potenciálu míry vyskytuje v roce 1919 v [Rd2].

Nechť μ je míra v $\mathbb{R}^n$ (pro $n = 2$ předpokládáme, že μ má kompaktní nosič, neboť logaritmické jádro mění znaménko). *Potenciálem míry* μ se rozumí funkce $G\mu$ definovaná rovností

$$G\mu(x) := \int G(x, y)\, d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Funkce $G\mu$ je zdola polospojitá. (Připomínáme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ se nazývá *zdola polospojitá*, jestliže $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > c\}$ je otevřená množina pro každé $c \in \mathbb{R}$.) Jestliže není $G\mu = \infty$ na $\mathbb{R}^n$, pak je funkce $G\mu$ harmonická na každé otevřené množině D, pro niž $\mu(D) = 0$, tedy mimo nosič míry μ.

Laplace se mylně domníval, že potenciál splňuje Laplaceovu rovnici všude v $\mathbb{R}^3$. Poisson ukázal, že pro míru μ s objemovou hustotou, tedy $d\mu = g\, d\lambda$, platí

$$\Delta G(g\lambda) = -g \tag{3}$$

(zde je na pravé straně, až na znaménko, hustota g v důsledku naší normalizace Newtonova jádra). Poisson samozřejmě předpoklady o funkci g nespecifikoval, (3) platí, pokud je g dostatečně hladká funkce s kompaktním nosičem, např. třídy $C^2(\mathbb{R}^n)$. Obecně však potenciál $G\mu$ není diferencovatelný, nicméně rovnost $\Delta G\mu = -\mu$ je matematicky v pořádku při vhodné interpretaci. Aniž bychom zacházeli do podrobností, připomeňme pojem tzv. *distributivního laplaciánu* ve smyslu Schwartzovy teorie distribucí vytvořené ve čtyřicátých letech 20. století.

[1] Čtenáře odkazujeme na [Bi], [Hw], [Ch4], [Pi], [Ru] a na Bauerův komentář k Radonovu přínosu pro teorii míry a integrálu; viz Gesammelte Abhandlungen (s. 29–44) citované v [Rd1].

Je-li u lokálně lebesgueovsky integrovatelná funkce v $\mathbb{R}^n$, definujeme lineární funkcionál

$$L_u : \varphi \mapsto \int u \Delta \varphi \, d\lambda$$

na prostoru nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v $\mathbb{R}^n$. Zde se žádná hladkost funkce u nepředpokládá. Pokud však je např. u funkce třídy C^2, integrace per partes dává

$$L_u(\varphi) = \int \Delta u \cdot \varphi \, d\lambda,$$

takže L_u lze ztotožnit s klasickým laplaciánem Δu definovaným pro hladké funkce. Pro funkci $G_0 : y \mapsto G(0, y), y \in \mathbb{R}^n$, platí ve smyslu distribucí

$$L_{G_0} = -\varepsilon_0;$$

zde ε_x označuje Diracovou míru soustředěnou v bodě x. Jinak řečeno, G_0 je *fundamentální řešení Laplaceovy rovnice.* Obecně platí

$$L_{G\mu} = -\mu.$$

Na závěr tohoto odstavce připomeneme pojem superharmonické funkce, který je stěžejní pro teorii potenciálu 20. století. Superharmonicitu lze považovat za určitou vícerozměrnou analogii konkávnosti reálných funkcí: pokud graf konkávní reálné funkce protíná přímka ve dvou bodech, hodnoty funkce jsou nad úsečkou spojující tyto dva body.

Nechť D je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$. Funkce $u : D \to (-\infty, \infty]$ se nazývá *superharmonická* (píšeme $u \in \mathcal{S}(D)$), jestliže

(a) u je zdola polospojitá,

(b) je-li D' otevřená množina taková, že $D' \cup \partial D' \subset D$, h je spojitá funkce na $D' \cup \partial D'$, harmonická na D' a $h \leq u$ na $\partial D'$, potom $h \leq u$ na D'.

Funkce v se nazývá *subharmonická*, jestliže $-v$ je superharmonická. Zde platí analogie podmínky $f'' \leq 0$ pro hladkou reálnou konkávní funkci: jestliže $u \in C^2(D)$, pak u je superharmonická, právě když $\Delta u \leq 0$ na D. Hladké superharmonické fukce se implicitně vyskytují v Poincarého práci o *méthode du balayage*; viz odst. 3. Poznamenejme, že funkce z $\mathcal{S}(D)$ lze charakterizovat mnoha způsoby; viz [AG], [Br8], [He], [Ra], [Ri2], [Ri3], [Ri4]. Pro další výklad bude užitečné zavést systém $\mathcal{H}^*(D)$ hyperharmonických funkcí: funkce u se nazývá *hyperharmonická*, je-li na každé komponentě souvislosti D superharmonická nebo identicky rovna ∞. Systém $\mathcal{H}^*(D)$ hyperharmonických funkcí obsahuje se dvěma funkcemi jejich minimum, dále limita neklesající posloupnosti funkcí z $\mathcal{H}^*(D)$ je prvkem $\mathcal{H}^*(D)$. Limita nerostoucí posloupnosti superharmonických funkcí není obecně zdola polospojitá, a tudíž není prvkem $\mathcal{H}^*(D)$. V odst. 4 zmíníme důležitý výsledek: hodnoty limity lze modifikovat na *malé* množině tak, že výsledná funkce už je hyperharmonická.

Pojem *fonction subharmonique* byl zaveden F. Rieszem v práci [Ri2]. Jeho motivací byla jednak Poincarého *méthode du balayage* [Po1], [Po2], dále Hartogsova práce o funkcích více komplexních proměnných a také Hardyho výsledky o průměrech holomorfních funkcí. (Připomeňme, že pro holomorfní funkci f je funkce $\log|f|$ subharmonická.) Vzhledem k tomu, že v pozdějším období byl důraz kladen na superharmonické funkce, výše jsme uvedli Rieszovu definici v superharmonické verzi.

Důležitými příklady hyperharmonických funkcí jsou potenciály a samozřejmě také harmonické funkce. V roce 1930 dokázal F. Riesz v práci [Ri3] (viz též [Ri4]) pozoruhodný výsledek, který zde uvedeme pro speciální případ prostoru dimenze $n \geq 3$: je-li s superharmonická funkce na $\mathbb{R}^n$ mající harmonickou minorantu, potom existují jednoznačně určená míra μ a jednoznačně určená harmonická funkce h na $\mathbb{R}^n$ takové, že

$$s = G\mu + h. \tag{4}$$

Speciálně: nezáporná superharmonická funkce je potenciál, právě když její největší harmonická minoranta je identicky rovna nule. Poznamenejme, že uvedená Rieszova věta o rozkladu se obvykle formuluje pro otevřené množiny, pro něž existuje *Greenova funkce* zavedená v [Gn], tedy v rozkladu figuruje *Greenův potenciál*; viz [AG], [Br8], [He]. Míra μ z (4) se nazývá *Rieszova míra superharmonické funkce* s. Víme, že $-\mu$ je distributivní laplacián funkce s.

3. Dirichletova úloha a kapacita

Problém řešitelnosti Dirichletovy úlohy pro libovolnou oblast a pro libovolnou spojitou okrajovou podmínku odolával úsilí věhlasných matematiků po mnoho desetiletí. Pokusy o zdolání důkazu existence řešení se ukázaly z hlediska matematické korektnosti problematické nebo vedly jen k částečným výsledkům pro speciální oblasti.

Jeden z přístupů k důkazu existence spočíval na variační úloze založené na tzv. *Dirichletově principu*. Minimalizuje se tzv. *Dirichletův integrál* (integrál energie)

$$\int_D \operatorname{grad}^2 u \, dx$$

na množině přípustných funkcí u pro danou spojitou okrajovou podmínku f. *Přípustnou funkcí* se přitom rozumí hladké rozšíření funkce f z ∂D na D takové, že příslušný integrál energie je konečný. Není těžké dokázat, že pokud existuje přípustná funkce u_0, pro niž integrál energie nabývá minima, pak u_0 je harmonická na D, a tudíž je řešením Dirichletovy úlohy pro okrajovou podmínku f. Tento přístup užil např. B. Riemann při důkazu tzv. Riemannovy věty o konformním zobrazení.

Variační principy podrobil ostré kritice K. Weierstrass v roce 1869. Upozornil na skutečnost, že existence minima není zaručena, nelze zaměňovat minimum a infimum.[2] Další vada na kráse spočívá v tom, že množina přípustných funkcí pro danou okrajovou podmínku může být prázdná; viz [MS, s. 373–377]. Tedy Dirichletova úloha a Dirichletův princip nejsou ekvivalentní. Po Weierstrassově kritice Dirichletův princip jako metoda důkazu existence řešení Dirichletovy úlohy upadl do nemilosti. Poznamenejme, že o resuscitaci Dirichletova principu se zasloužil D. Hilbert, který existenci minima, za omezujících podmínek na oblast a okrajovou podmínku, korektně dokázal; viz [Hi, s. 10–38].

Pro speciální oblasti se podařilo existenci řešení Dirichletovy úlohy dokázat různými metodami: Schwarzovy-Christoffelovy integrály (konformní zobrazení), Schwarzův alternující proces, metoda aritmetického průměru (C. Neumann), Poincarého *méthode du balayage*, o níž bude řeč níže.[3] Nelze se nezmínit o Fredholmově metodě integrálních rovnic z přelomu 19. a 20. století, která sehrála významnou roli při formování funkcionální analýzy a vedla k teorii kompaktních operátorů.[4]

Zásadní význam pro rozvoj teorie potenciálu měla Poincarého metoda vymetání z konce 19. století.[5] Umožnila dokázat větu o existenci řešení Dirichletovy úlohy pro oblasti D splňující tuto geometrickou podmínku: pro každý bod $y \in \partial D$ existuje uzavřená koule B obsažená v komplementu D taková, že $y \in \partial D \cap \partial B$.

Poincarého *méthode du balayage* stručně popíšeme.[6] Pomocí Poissonova integrálu lze dokázat toto tvrzení: jestliže $B(x_0, r)$ je koule v $\mathbb{R}^n$ a p je spojitý potenciál míry μ, pak lze část míry μ v $B(x_0, r)$ *vymést* z $B(x_0, r)$ na sféru $S(x_0, r)$ tak, že potenciál p' nové míry je spojitý v $\mathbb{R}^n$, harmonický na $B(x_0, r)$, $p' \leq p$ a p' a p se shodují na komplementu koule $B(x_0, r)$. Jedná se tedy o přemístění míry z $B(x_0, r)$ na $S(x_0, r) = \partial B(x_0, r)$ vedoucí k „harmonizaci“ p na $B(x_0, r)$ a zachování p na $\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r)$. Budeme mluvit o potenciálu vymeteném na $S(x_0, r)$.

Při zkoumání Dirichletovy úlohy si Poincaré uvědomil, že důkaz stačí provést pouze pro okrajovou podmínku, která je restrikcí hladkého potenciálu. Taková redukce je možná díky stejnoměrné aproximaci spojité okrajové podmínky rozdíly takových potenciálů.

Nechť tedy p je hladký potenciál. Poincaré uvažuje pokrytí oblasti D koulemi $B_1, B_2, \ldots$, jejichž uzávěry jsou obsaženy v D. Nejprve vymete p na ∂B_1. Tak získá nový potenciál menší nebo roven p, který je harmonický na B_1. Tento nový potenciál vymete na ∂B_2. Získaný potenciál je harmonický na B_2, avšak na B_1 se může harmonicita pokazit. Proto Poincaré postupně vymetá na hranice koulí

---

[2] Podrobnější výklad o Dirichletově principu lze nalézt např. v [Ar], [Bt], [BM], [Cr], [Di], [Gi], [Gr2], [Hi], [Ja], [Kl], [Li], [Mo2], [MS], [Ne3].

[3] O těchto metodách pojednává např. [Mo2], [Ne5], [So].

[4] Viz [Ri1]; cesta k pojmu kompaktního operátoru je popsána např. v [Ne4].

[5] Viz [Po1], [Po2].

[6] O Poincarého metodě pojednává např. [Br13], [Ma], [So], [Sr].

podle tohoto schematu:

$$B_1; B_2; B_1, B_2, B_3; B_1, B_2, B_3, B_4; \dots$$

Takto se získá nerostoucí posloupnost potenciálů a pro každou kouli B_j existuje vybraná posloupnost, jejíž každý člen je harmonická funkce na B_j, neboť každá koule je zastoupena v procesu nekonečněkrát. Proto je podle Harnackovy věty limita této posloupnosti harmonická. Tak Poincaré získá *kandidáta* na řešení Dirichletovy úlohy pro restrikci funkce p na ∂D. Další krok spočívá v důkazu, že geometrická podmínka s dotykem koule zevně D zaručí nabývání předepsané hraniční hodnoty. S ohledem na další výklad poznamenejme, že míře příslušného limitního potenciálu Poincaré nevěnuje pozornost.

Do začátku druhé dekády 20. století nebyl problém existence Dirichletovy úlohy vyřešen. O. D. Kellogg v [Kg2, s. 285] napsal: Do té doby se obecně věřilo tomu, že Dirichletova úloha je řešitelná pro každou oblast a že omezení v obecnosti spočívala v užitých metodách spíše než v problému samotném. S. Zaremba v roce 1911 poukázal v [Za] na skutečnost, že pro kouli s vyjmutým středem není Dirichletova úloha vždy řešitelná. Tento výsledek nevzbudil větší pozornost, neboť za zajímavé byly považovány oblasti připomínající fyzikální tělesa.

Skutečný průlom do poznání o Dirichletově úloze znamenala jednostránková práce [Le2] z roku 1913. H. Lebesgue předložil jednoduše souvislou oblast v $\mathbb{R}^3$, pro niž Dirichletova úloha není obecně řešitelná. Původní Lebesgueův příklad zde reprodukovat nebudeme (viz např. [Br13], [He], [Ne6]). V zásadě se jedná o oblast typu

$$D := \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\Big\} \setminus \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0,\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq e^{-1/x_1}\Big\}.$$

Tedy D vznikne tak, že z jednotkové koule vyjmeme velice ostrý hrot. Je učitečné zmínit, že Lebesgueova množna je v [Le2] definována pomocí *nespojitého* potenciálu.

V [Le3] zavedl Lebesgue následující definici: omezená oblast D v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, se nazývá *regulární*, jestliže klasická Dirichletova úloha má řešení pro každou spojitou okrajovou podmínku. Lebesgue svým objevem neregulární množiny otevřel novou a velice plodnou etapu teorie potenciálu.

Již v roce 1912 Lebesgue v [Le1] naznačil ideu *zobecněné Dirichletovy úlohy*, která spočívá ve dvou krocích: nejprve se dané okrajové podmínce přiřadí vhodná harmonická funkce a v druhém kroku se vyšetřuje hraniční chování takové funkce ve vztahu k zadané okrajové podmínce.

Ve [Wi1] (viz také [Wi4]) navrhl N. Wiener v roce 1924 následující způsob konstrukce řešení zobecněné Dirichletovy úlohy. Nechť D je libovolná omezená oblast v $\mathbb{R}^n$ a f je spojitá funkce na hranici ∂D. Množinu D lze vyčerpat regulárními oblastmi, tj. existují regulární oblasti D_j obsažené s uzávěrem v D takové, že $D_{j+1} \supset D_j$ a $D = \cup_{j=1}^{\infty} D_j$. Dále existuje funkce F spojitá na $\overline{D}$ splývající s f na ∂D. Pro restrikci f_j funkce F na ∂D_j označme h_j řešení klasické Dirichletovy úlohy pro D_j a f_j. Wiener ukázal, že existuje $h := \lim_{j\to\infty} h_j$ a tato limita je nezávislá na bližší volbě vyčerpání (D_j) a na bližší volbě rozšíření F.

Vedle Wienerova řešení zobecněné Dirichlerovy úlohy se prakticky ve stejné době objevilo Perronovo řešení zobecněné Dirichletovy úlohy; viz [Pr]. Budeme je zde prezentovat v modernizované verzi publikované M. Brelotem v roce 1939 v [Br2]. Rozdíly s původním Perronovým přístupem níže budeme komentovat.

Pro libovolnou omezenou otevřenou množinu $D \subset \mathbb{R}^n$ a libovolnou funkci $f : \partial D \to [-\infty, \infty]$ uvažujeme systém *horních funkcí* pro f, tj. hyperharmonických zdola omezených funkcí u na D splňujících

$$\liminf_{x\to y} u(x) \geq f(y), \quad y \in \partial D.$$

Infimum všech horních funkcí f se nazývá *horní PWB řešení* (Perron, Wiener, Brelot) a značí se $\overline{H}f$. *Dolní PWB-řešení* se definuje zřejmým způsobem: $\underline{H}f := -\overline{H}(-f)$. Z principu minima plyne nerovnost $\underline{H}f \leq \overline{H}f$. Na každé komponentě množiny D je každá z funkcí $\underline{H}f$ a $\overline{H}f$ rovna ∞ nebo $-\infty$ nebo, jak plyne z Harnackovy věty, je harmonická. Funkce f se nazývá *resolutivní*, jestliže $\underline{H}f = \overline{H}f$ a společná hodnota Hf (nazývaná *PWB-řešení*) je harmonická funkce.

Označme $C(\partial D)$ prostor všech spojitých funkcí na ∂D. Ve [Wi3] N. Wiener dokázal, že každá funkce $f \in C(\partial U)$ je resolutivní (tzv. *Wienerova věta o resolutivitě*), a wienerovské řešení splývá s Hf. Navíc, pro $x \in D$, zobrazení

$$f \mapsto Hf(x), \quad f \in C(\partial D),$$

je nezáporný lineární funkcionál. Podle Rieszovy věty o reprezentaci[7] existuje právě jedna míra μ_x na ∂D, taková, že

$$Hf(x) = \int f \, d\mu_x, \quad f \in C(\partial U).$$

Míra μ_x se nazývá *harmonická míra* pro bod x a představuje stěžejní pojem teorie potenciálu.

V práci [Wi3] N. Wiener tvrdil, že až na nejjednodušší případy nespojité okrajové podmínky nejsou resolutivní, což dokumentoval na jednoduchém příkladu. Po 15 letech M. Brelot odhalil chybu v tomto příkladu, což ho vedlo k definitivnímu výsledku, tzv. *Brelotově větě o resolutivitě*: borelovská funkce

[7] Viz např. [AG, s. 306], [Ru, Kapitola 2]; o historickém vývoji pojednává [Bi, Kapitola 11] a [Gr1].

f na ∂D je resolutivní, právě když f je μ_x-integrovatelná pro každé $x \in D$; viz [Br2].

Vraťme se krátce k původnímu Perronovu článku. Na rozdíl od naší prezentace Perron uvažuje jen omezené funkce na ∂D, horní funkce definuje jako spojité funkce na $\overline{D}$, které na ∂D majorizují f a splňují podmínku ekvivalentní se superharmonicitou. Perron nedokazuje shodu $\underline{H}f$ a $\overline{H}f$ a z práce není zřejmé, že jeho řešení je lineární operátor na $C(\partial D)$.

Vzhledem k existenci neregulárních množin je důležité zkoumat hraniční chování funkce Hf. Pro $y \in \partial D$ se může stát, že $\lim_{x\to y} Hf(x)$ neexistuje (Lebesgueův příklad) nebo $\lim_{x\to y} Hf(x)$ existuje, ale neshoduje se s $f(y)$ (Zarembův příklad).

Následující definici zavedl H. Lebesgue v [Le3]: bod $y \in \partial D$ se nazývá *regulární* (označení $y \in \partial_{\mathrm{reg}} D$), jestliže pro každou funkci $f \in C(\partial D)$ platí

$$\lim_{x\to y} Hf(x) = f(y).$$

Je zřejmé, že množina D je regulární, právě když $\partial D = \partial_{\mathrm{reg}} D$. Body z $\partial D \setminus \partial_{\mathrm{reg}} D$ se nazývají *iregulární*.

V souvislosti se zavedenými pojmy se nabízí tyto otázky:

(a) jak poznat (= charakterizovat) regulární body?

(b) má pojem regulárního bodu lokální charakter?

(c) jakou část ∂D mohou zaujímat iregulární body?

(d) je zobrazení $f \mapsto Hf$ jediné rozumné řešení zobecněné Dirichletovy úlohy (tj. je toto zobrazení spojitých funkcí na ∂U do prostoru harmonických funkcí na D *jediný* nezáporný lineární operátor přiřazující okrajové podmínce řešení klasické Dirichletovy úlohy, pokud existuje)?

Poznamenejme, že se v literatuře vyskytují i jiné metody řešení zobecněné Dirichletovy úlohy, než řešení Wienerovo a Perronovo; viz [Va3].

K zodpovězení těchto otázek se neobyčejně vhodným ukázal pojem kapacity motivovaný elektrostatikou. Kapacitu jako matematický pojem pro uzavřené množiny zavedl N. Wiener ve [Wi1] v roce 1924. Zde uvedeme ekvivalentní definici pocházející od J. de la Valée Poussina z roku 1932; viz [De].

Pro libovolnou množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ se definuje

$$\mathrm{cap}_* E := \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ kompaktní},\ G\mu \le 1\}.$$

M. Brelot nazval v [Br3] tuto kapacitu *vnitřní kapacita*. V roce 1936 charakterizoval G. C. Evans v [Ev2] množiny nulové kapacity takto: pro kompaktní množinu K je $\mathrm{cap}_* K = 0$, právě když existuje míra μ na K taková, že $G\mu = \infty$ na K. *Vnější kapacitu* definovali M. Brelot a A. F. Monna pro $E \subset \mathbb{R}^n$ takto:

$$\mathrm{cap}^* E := \inf\{\mathrm{cap}_* U : U \supset E \text{ otevřená}\};$$

viz [Br3], [Mo1]. M. Brelot zavedl v roce 1941 v [Br4] pojem polární množiny: E se nazývá *polární*, jestliže existuje superharmonická funkce s v $\mathbb{R}^n$ taková, že $s = \infty$ na E. Konečně H. Cartan v roce 1945 v [Ca2] dokázal, že $\text{cap}^* E = 0$, právě když množina E je polární. Ukazuje se, že polární množiny hrají v teorii potenciálu roli zanedbatelných množin, podobně jako množiny míry nula v teorii integrálu.

Mimořádně důležitý výsledek dokázal G. Choquet v padesátých letech 20. století: pro borelovské množiny $E \subset \mathbb{R}^n$ platí

$$\text{cap}_* E = \text{cap}^* E;$$

viz [AG], [He], [Ch1], [Ch2], [LN].

Vyzbrojeni pojmem kapacity můžeme zodpovědět výše formulované otázky:

(a) Charakteristika regulárních bodů: nechť $y \in \partial D$, $\lambda < 1$ a

$$\gamma_j := \text{cap}_*(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus D : \lambda^j \le |x - y| \le \lambda^{j-1}\});$$

potom y je regulární bod, právě když

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{\lambda^j} = \infty$$

(tzv. *Wienerovo kritérium regularity*; viz [Wi2], [Wi4]).

Neformálně řečeno, hraniční bod y je regulární, právě když je doplněk množiny D v blízkosti bodu y dostatečně masivní (srv. s pojmem tenkosti definovaným níže).

Regulární body se dají charakterizovat pomocí pojmu *bariéry*. Ten se implicitně objevuje v pracích H. Poincarého, zaveden byl H. Lebesguem v [Le1]. Je známa celá řada postačujících podmínek pro regularitu; zde odkazujeme na [Bo], [Ne6], [Va3], [Va5].

(b) Z Wienerova kritéria regularity (a také z kritéria pomocí bariéry) vyplývá, že pojem regulárního bodu je lokální.

(c) Problém velikosti množiny iregulárních bodů odolával takřka deset let, do roku 1933. Kelloggova-Evansova věta tvrdí, že množina iregulárních bodů je polární, tedy má kapacitu nula; viz [Ev2], [Kg1]. Odtud plyne toto tvrzení: jsou-li h_1, h_2 omezené harmonické funkce na D takové, že

$$\lim_{x \to y} h_1(x) = \lim_{x \to y} h_2(x), \quad y \in \partial_{\text{reg}} D,$$

potom $h_1 = h_2$.

(d) Jednoznačnost operátoru zobecněné Dirichletovy úlohy: existuje právě jeden nezáporný lineární operátor přiřazující každé funkci $f \in C(\partial D)$ harmonickou funkci na D takový, že hodnota operátoru pro f dává řešení klasické Dirichletovy úlohy, pokud pro f existuje; viz [Ke2]. Klíčem k důkazu tohoto pozoruhodného výsledku je následující *Keldyšovo lemma* dokázané v [Ke1] pomocí jemné konstrukce založené na Wienerově kritériu regularity: je-li $y \in \partial_{\mathrm{reg}} D$, potom existuje funkce spojitá na $\overline{D}$, harmonická na D taková, že $h(y) = 0$ a $h > 0$ na $\overline{D} \setminus \{y\}$; viz [Lu], [Ne1].

Víme, že v blízkosti iregulárního bodu množiny D je doplněk D málo masivní, což lze vyjádřit pomocí Brelotova pojmu *tenkost.* Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina, $y \in \mathbb{R}^n$. Říkáme, že množina E je v bodě y *tenká* (francouzsky *effilé*), jestliže buďto $y \notin \overline{E}$ nebo existuje superharmonická funkce na okolí bodu y taková, že

$$\lim_{x \to y, x \in E \setminus \{y\}} u(x) > u(y);$$

viz [Br3], [Br5], [Br11]. M. Brelot dokázal v [Br3], že pro otevřenou množinu D je $y \in \partial_{\mathrm{reg}} D$, právě když množina $\mathbb{R}^n \setminus D$ není tenká v bodě y.

4. Vymetání superharmonických funkcí a měr

Problém vymetání budeme formulovat ve větší obecnosti než v historickém úvodu.

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina a μ je míra na $\mathbb{R}^n$. Cílem je najít míru μ^E *na* E takovou, že

$$G\mu^E = G\mu \quad \text{na } E.$$

Zatím jsme uvažovali situaci, že D je, řekněme, omezená oblast v $\mathbb{R}^n$, a zajímalo nás vymetení míry z D na hranici množiny D (což je totéž jako na doplněk D^c množiny D). Zde tedy $E = D^c$. Výše uvedená formulace ovšem vyžaduje zpřesnění, není zřejmé, co se rozumí výrokem *míra na* E, neboť E je zcela obecná množina.

Intuitivně lze očekávat problémy s body, které mají charakter ostrých hrotů množiny E (jako v Lebesgueově příkladu). Situace může připomínat známý jev z elektrostatiky nazývaný *hrotový výboj*, při němž nastává jev vyvolaný vybitím statické elektřiny (sršení známé námořníkům jako Eliášův oheň).

K problému vymetání lze přistupovat dvěma způsoby: v duchu Gaussova přístupu se zajímáme o potenciály měr a jejich energii nebo se primárně nestaráme o míry, nýbrž o superharmonické funkce a míry dostáváme ex post jako výsledek duality, o níž se dále zmíníme.

V této části se soustředíme na moderní teorii vymetání iniciovanou a systematicky rozvíjenou M. Brelotem od čtyřicátých let 20. století; viz [Br6], dále [Br7], [Br10], [Br11], [Br12]. Část 5 tohoto příspěvku je věnována vymetání měr s konečnou energií.

Brelotův přístup je velmi obecný. Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina a u je nezáporná superharmonická funkce (budeme psát $u \in \mathcal{S}^+$). Definujeme

$$R_u^E := \inf\{v \in \mathcal{S}^+ : v = u \text{ na } E\},$$

tzv. *redukce* funkce u na E. Funkce R_u^E obecně není zdola polospojitá, tedy není superharmonická. Proto se zavádí tzv. *výmet* $\widehat{R}_u^E$ funkce u na E definovaný jako zdola polospojitá regularizace, tedy jako největší zdola polospojitá minoranta funkce R_u^E. Výmet tedy dostaneme určitou modifikací redukce. Přirozeně nás zajímá velikost množiny $\{x \in \mathbb{R}^n : \widehat{R}_u^E(x) < R_u^E\}$. Odpověď dostáváme z tzv. *fundamentální věty o konvergenci*: nechť $\mathcal{F}$ je množina nezáporných hyperharmonických funkcí, $w := \inf \mathcal{F}$ a $\widehat{w}$ je zdola polospojitá regularizace definovaná rovností

$$\widehat{w}(y) := \liminf{}_{x \to y} w(x), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Potom množina $\{x \in \mathbb{R}^n : \widehat{w}(x) < w(x)\}$ je polární. Větu dokázal H. Cartan v [Ca1], [Ca2]; viz též [Br5], [BC].

Platí tedy

$$0 \le \widehat{R}_u^E \le R_u^E \le u,$$

přičemž $\widehat{R}_u^E$ je harmonická funkce na komplementu $\overline{E}$ a pro uvažovanou množinu E s hranicí, neformálně řečeno, neobsahující ostré hroty, platí $\widehat{R}_u^E = u$ na E. Pro libovolnou množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ definujeme *bázi* množiny E

$$b(E) := \{x \in \mathbb{R}^n : \widehat{R}_u^E(x) = u(x) \text{ pro každou } u \in \mathcal{S}^+\}.$$

Báze je obsažena v $\overline{E}$ a obsahuje vnitřek množiny E a z fundamentální věty o konvergenci víme, že $E \setminus b(E)$ je polární množina.

Vraťme se k dříve zmíněným Gaussovým problémům. Pro kompaktní množinu K je $\widehat{R}_1^K$ rovnovážný potenciál. Rovnovážné rozdělení je Rieszova míra superharmonické funkce $\widehat{R}_1^K$.

Při tomto přístupu vymetání superharmonických funkcí se vymetené míry dostanou jako *duální* objekty. Platí: pro každou míru μ s kompaktním nosičem a pro každou množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ existuje právě jedna míra μ^E na $\mathbb{R}^n$ taková, že

$$\int \widehat{R}_u^E \, d\mu = \int u \, d\mu^E$$

pro každou funkci $u \in \mathcal{S}^+$. Míra μ^E se nazývá *výmet* míry μ na E. Míra μ^E je soustředěna na borelovské množině $b(E)$ a platí $b(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_x^E = \varepsilon_x\}$ (připomínáme, že ε_x je Diracova míra soustředěná v bodě x). Jaká je souvislost s vymetáním míry zmíněným na začátku tohoto odstavce? Lze dokázat, že μ^E je jediná míra soustředěná na $b(E)$ taková, že $G\mu^E = G\mu$ na E až na polární množinu. Těsná souvislost vymetání potenciálu s potenciálem vymetené míry je vyjádřena rovností

$$\widehat{R}^E_{G\mu} = G\mu^E.$$

Vymetání má také úzkou a významnou souvislost s třetím Gaussovým problémem (Dirichletova úloha). Pro omezenou otevřenou množinu D a $x \in D$ platí pro harmonickou míru

$$\mu^D_x = \varepsilon^{D^c}_x.$$

Výsledek pochází od J. de la Vallée Poussina a O. Frostmana; viz [De], [Fr1]. Pomocí vymetání lze také charakterizovat regulární body: bod $y \in \partial D$ je regulární, právě když $\varepsilon^{D^c}_y = \varepsilon_y$, takže $\partial_{\mathrm{reg}} D = b(D^c)$; viz [Fr2]. Obecněji: množina E je tenká v bodě y, právě když $y \notin b(E)$, tj. $\varepsilon^E_y \neq \varepsilon_y$; viz [Br6].

Pojem tenkosti se ukázal mimořádně šťastný. H. Cartan v dopise z 30. prosince 1940 adresovaném M. Brelotovi upozornil na skutečnost, že pro $y \in \mathbb{R}^n$ tvoří množiny tvaru $(E \setminus \{y\})^c$, kde E je množina tenká v bodě y, fundamentální systém okolí bodu y topologie, nazývané *jemná topologie*. Je to nejhrubší topologie, při níž jsou všechny superharmonické funkce spojité.

Je třeba říci, že jemná topologie musela na svoji éru slávy a obecného uznání čekat několik desetiletí. Matematici zaměření na analýzu povětšině přijímali po určitou dobu jemnou topologii s jistými rozpaky a snad i s nedůvěrou k její případné užitečnosti. Považovali ji za poněkud umělý objekt, jehož topologické vlastnosti se jevily patologické a vymykající se obvyklým topologickým nástrojům užívaným v analýze. V hierarchii oddělovacích axiomů je sice Hausdorffova a úplně regulární, není však normální. Nemá spočetnou bázi, žádný bod nemá spočetný fundamentální systém okolí, není Lindelöfova a nemá netriviální kompaktní množiny – každá kompaktní množina je konečná.

Na druhé straně specialisté z teorie pravděpodobnosti považovali jemnou topologii za zcela přirozenou: borelovská množina V je jemně otevřená, právě když brownovská částice startující v některém bodu z V skoro jistě setrvá ve V po určitý kladný časový interval; viz část 6.

Od padesátých let 20. století se postupně dařilo najít vlastnosti jemné topologie, které její určité topologické deficience kompenzovaly a umožnily tak z jemné topologie vytvořit účinný matematický nástroj. Zmíníme kvazi-Lindelöfovu vlastnost jemné topologie (J. L. Doob): z libovolného systému jemně otevřených množin lze vybrat spočetný systém takový, že sjednocení původního a nového systému se liší o polární množinu. Další významná vlastnost: $\mathbb{R}^n$ s jemnou topologií je Baireův prostor (A. Cornea): průnik každého spočetného systému otevřených hustých množin je hustá množina. Klíčový výsledek pro tzv. jemnou teorii potenciálu, která se rozvinula v sedmdesátých letech 20. století, je tato vlastnost: jemná topologie je lokálně souvislá (B. Fuglede).

V tomto příspěvku se s ohledem na jeho rozsah jemné topologii věnovat nebudeme a čtenáře odkazujeme např. na [AG], [Br11], [Fu]. Poznamenejme, že *Fine Potential Theory* má v klasifikaci MathSciNet kód 31C40.

5. Vymetání měr s konečnou energií

V části 2 jsme naznačili Gaussovu myšlenku řešení úloh A, B, C pomocí variačního přístupu. Uvedli jsme, že pojmy a nástroje matematické analýzy nebyly dostatečné ke zvládnutí těchto úloh. Ve skutečnosti se konečné řešení Gaussových problémů podařilo získat takřka po stu letech, zejména v pracích O. Frostmana [Fr1], [Fr2] a H. Cartana [Ca2], [Ca3].[8] K řešení zásadně přispěl pokrok v teorii míry a integrálu (konvergence a kompaktnost měr) a funkcionální analýzy (metody Hilbertova prostoru), a také pochopení významu výjimečných množin.

Např. pro kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^3$ nemá obecně Gaussova úloha o nalezení rovnovážného rozdělení μ na K takového, aby $G\mu = 1$ *všude* na K, řešení. Za příklad poslouží Lebesgueův hrot

$$K := \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 \leq 1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq e^{-1/x_1}\Big\} \cup \{0\}.$$

Kapacitní potenciál $G\mu$ rovnovážného rozdělení μ na K je roven 1 na $K \setminus \{0\}$ a $G\mu(0) < 1$.

Cílem této části je stručně přiblížit hlavní myšlenky vymetání měr s konečnou energií.[9] Pro míry μ a ν na $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ definujeme tzv. *vzájemnou energii*

$$\langle \mu, \nu \rangle_e := \int G\mu \, d\nu \quad \Big(= \int G\nu \, d\mu \Big)$$

a označíme $\mathcal{E}_+$ množinu všech měr, pro něž $||\mu||_e := \langle \mu, \mu \rangle^{1/2} < \infty$. Prvky $\mathcal{E}_+$ se nazývají *míry s konečnou energií*. Důležité je, že platí tzv. *princip energie*:

$$\langle \mu, \nu \rangle_e \leq ||\mu||_e \, ||\nu||_e, \quad \mu, \nu \in \mathcal{E}_+.$$

Zobrazení $(\mu, \nu) \mapsto \langle \mu, \nu \rangle_e$ lze jednoznačně rozšířit na nezápornou symetrickou formu $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ na lineárním prostoru $\mathcal{E} := \mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_+$. Prvky $\mathcal{E}$ jsou tedy *znaménkové míry*[10] s konečnou energií. Pro $\lambda \in \mathcal{E}$ je $\langle \lambda, \lambda \rangle_e \geq 0$ a $\langle \lambda, \lambda \rangle_e = 0$, právě když $\lambda = 0$. Při zřejmé definici $||\lambda||_e := \langle \lambda, \lambda \rangle^{1/2}$ platí

$$| \langle \mu, \nu \rangle_e | \leq ||\mu||_e \, ||\nu||_e, \quad ||\mu + \nu||_e \leq ||\mu||_e + ||\nu||_e, \quad \mu, \nu \in \mathcal{E}.$$

Náboje s konečnou energií tedy tvoří prostor $\mathcal{E}$ se skalárním součinem. H. Cartan ukázal, že $\mathcal{E}$ není úplný,[11] $\mathcal{E}$ tedy není Hilbertův prostor, avšak (stěžejní Cartanův výsledek) $\mathcal{E}_+$ je úplný konvexní kužel.

---

[8] Poznamenejme, že místo Newtonova potenciálu Frostman uvažuje tzv. Rieszovy potenciály s jádrem $(x, y) \mapsto |x - y|^{\alpha - n}$ studované M. Rieszem (bratr F. Riesze).

[9] Podrobný výklad lze nalézt např. v [Br8, Kapitola XI] a v [He, Kapitola 11].

[10] Znaménkovou mírou rozumíme *reálnou* σ-aditivní funkcí definovanou na σ-algebře borelovských množin.

[11] J. Deny v roce 1950 v [Dy] s využitím aparátu tehdy čerstvé Schwartzovy teorie distribucí identifikoval prvky zúplnění prostoru $\mathcal{E}$.

Zdůrazněme, že tento funkcionálně analytický kontext umožňuje na $\mathcal{E}_+$ uvažovat dokonce tři druhy konvergence posloupností měr: *silnou konvergenci* ($||\mu_j - \mu||_e \to 0$), *slabou konvergenci* ($\langle \mu_j, \nu \rangle_e \to \langle \mu, \nu \rangle_e$ pro všechna $\nu \in \mathcal{E}$) a tzv. *vágní konvergenci* měr (tradičně definovanou v teorii míry obecně jako $\int f\, d\mu_j \to \int f\, d\mu$ pro každou spojitou funkci s kompaktním nosičem $\mathbb{R}^n$).[12]

Kontext prostoru se skalárním součinem a nástroje, které poskytují zmíněné druhy konvergence, umožňují interpretovat vymetání jako projekci na konvexní množinu. Zde se hezkým způsobem potkávají geometrie a analýza.

Uvažujme $\mu \in \mathcal{E}_+$ a neprázdnou uzavřenou konvexní množinu $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}_+$. Úplnost $\mathcal{E}_+$ umožňuje dokázat, že existuje právě jedna míra $\mu_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ taková, že $||\mu - \mu_{\mathcal{F}}||_e < ||\mu - \nu||_e$, kdykoli $\nu \in \mathcal{F} \setminus \{\mu_{\mathcal{F}}\}$ (tzv. *projekce* μ na $\mathcal{F}$).

Nechť nyní $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a $\mathcal{F}_K$ je množina měr s konečnou energií, které mají nosič v K. Pomocí netriviálního využití tří výše zmíněných druhů konvergence se dokáže, že $\mathcal{F}_K$ je uzavřená (samořejmě konvexní) podmnožina $\mathcal{E}_+$, takže pro $\mu \in \mathcal{E}_+$ můžeme mluvit o projekci míry μ na $\mathcal{F}_K$. Ukazuje se, že projekci lze charakterizovat takto: μ_0 je projekce míry μ na $\mathcal{F}_K$, právě když $G\mu_0 \le G\mu$ a $G\mu_0 = G\mu$ na K s výjimkou polární množiny. V důkazu se využívají dvě důležité informace: množina P je polární, právě když $\mu(P) = 0$ pro všechny míry $\mu \in \mathcal{E}_+$, a dále tzv. *Cartanův dominační princip*: jestliže $\mu \in \mathcal{E}_+$ a w je superharmonická funkce splňující $G\mu \le w$ μ-skoro všude na nosiči μ, pak nerovnost $G\mu \le w$ platí všude.

Je pozoruhodné, že pro $\mu \in \mathcal{E}_+$ se projekcí na $\mathcal{F}_K$ dostane ve skutečnosti vymetená míra μ^K studovaná v části 4: $\mu_{\mathcal{F}_K} = \mu^K$, tedy v tomto případě přístup založený na vymetání superharmonických funkcí a přístup založený na projekci vedou ke stejnému výsledku. Důkaz je snadný. Z definice výmetu superharmonické funkce je zřejmá nerovnost $G\mu \ge \widehat{R}^K_{G\mu}$, a tedy $\widehat{R}^K_{G\mu}$ je superharmonická funkce majorizovaná potenciálem. Tudíž pro vhodnou míru μ_0 je $\widehat{R}^K_{G\mu} = G\mu_0$, takže $G\mu_0 \le G\mu$. Odtud

$$\int G\mu_0\, d\mu_0 \le \int G\mu\, d\mu_0 = \int G\mu_0\, d\mu \le \int G\mu\, d\mu < \infty,$$

takže $\mu_0 \in \mathcal{E}_+$. Z části 4 víme, že $G\mu_0 = \widehat{R}^K_{G\mu} = G\mu$ až na polární množinu. Z charakteristiky projekce na $\mathcal{F}_K$ vyplývá, že $\mu_0 = \mu_{\mathcal{F}_K}$. Z části 4 o vymetání superharmonických funkcí víme, že $\widehat{R}^K_{G\mu} = G\mu^K$, tudíž

$$G\mu_K = \widehat{R}^K_{G\mu} = G\mu_0 = G\mu_{\mathcal{F}_K}.$$

Vidíme, že $\mu_{\mathcal{F}_K} = \mu^K$, neboť potenciál míru určuje jednoznačně.

---

[12] Význam vágní konvergence je zdůrazněn mimořádně důležitou vlastností kompaktnosti: je-li $K \subset \mathbb{R}^n$ omezená uzavřená množina a (μ_j) je posloupnost měr na K taková, že $\sup\{\mu_j(K) : j \in \mathbb{N}\}$, potom existují vybraná posloupnost (μ_{j_k}) a míra μ na K takové, že $\mu_{j_k} \to \mu$ vágně.

Vraťme se ještě ke Gaussově variační metodě zmíněné v části 2. Pro kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^n$ a funkci f spojitou na K se řeší tato úloha: minimalizovat funkcionál

$$\Phi_f(\nu) := \int G\nu \, d\nu - 2 \int f \, d\nu$$

na množině měr ν na K. Metody rozvinuté v prvních dekádách 20. století (teorie míry, kapacita) umožnily O. Frostmanovi v disertaci [Fr1] dokázat tento výsledek: existuje míra $\mu \in \mathcal{E}_+$ na K, pro niž Φ_f nabývá minima. Na nosiči míry μ platí $G\mu \leq f$ a s výjimkou polární množiny je $G\mu \geq f$ na K. (Místo f lze také uvažovat potenciál míry s konečnou energií.) Speciální volba $f = 1$ vede ke Gaussovu integrálu

$$\Phi_1(\nu) = \int \big(G\nu - 2\big) \, d\nu.$$

Pro množinu K kladné kapacity je míra, která Φ_1 minimalizuje, právě kapacitní rozdělení ϱ_K na K.

Na závěr zmíníme souvislost kapacitního rozdělení a kapacity s projekcí na množinu měr s konečnou energií. Je-li $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní množina kladné kapacity, označíme $\mathcal{K}_K$ množinu pravděpodobnostních měr na K (tedy $\mu(K) = 1$ pro všechna $\mu \in \mathcal{K}_K$). Lze ukázat, že $\mathcal{K}_K$ je uzavřená konvexní množina v $\mathcal{E}_+$, takže můžeme mluvit o projekci nulové míry 0 na $\mathcal{K}_K$. Souvislost této projekce $0_{\mathcal{K}_K}$ s kapacitním rozdělením ϱ_K na K a kapacitou je dána rovnostmi

$$0_{\mathcal{K}_K} = \frac{\varrho_K}{\operatorname{cap}(K)}, \qquad ||0_{\mathcal{K}_K}||_e^2 = \frac{1}{\operatorname{cap}(K)}.$$

V této části vycházíme při výkladu do značné míry z [Br8, Kapitola XI] a [He, Kapitola 11].

6. Brownův pohyb a klasická teorie potenciálu

Souvislost teorie potenciálu a teorie pravděpodobnosti se může zdát překvapivá s ohledem na naprosto odlišný charakter obou disciplín: teorie potenciálu je povahy deterministické, zatímco v teorii pravděpodobnosti jsou studovány jevy závislé na náhodě, jevy stochastické povahy. A. W. Knapp v úvodu článku [Kn] přichází se silnějším tvrzením: Jedním z plodných úspěchů teorie pravděpodobnosti v posledních letech je poznání, že dvě zdánlivě nesouvisející fyzikální teorie – jednou z nich je Brownův pohyb a druhou potenciál – jsou matematicky ekvivalentní. To znamená, že výsledky obou teorií si vzájemně jednoznačně odpovídají a každý důkaz výsledku v jedné teorii má svůj přímý překlad na důkaz odpovídajícího výsledku v druhé teorii.

První publikovaná práce o uvedené souvislosti Brownova pohybu a teorie potenciálu pochází z roku 1944; viz [Ka]. M. Brelot však v [Br12] uvádí, že ve třicátých letech 20. století, přinejmenším pro rovinný případ, bylo v Paříži známo, že pro oblast D a $x \in D$ není pravděpodobnost, že trajektorie částice Brownova pohybu startující v bodě x narazí na množinu $K \subset \partial D$, nic jiného, než harmonická míra množiny K pro bod x. Zmiňuje také, že P. Lévy v té době pravděpodobnostně interpretoval kapacitní potenciál.

Nejprve popularizační formou (bez jakýchkoli nároků na matematickou kvalitu prezentace) naznačíme právě na příkladu kapacitního potenciálu, jak pohyb brownovské částice může souviset s harmonickými funkcemi.[13]

Intuitivně vzato, Brownův pohyb popisuje chaotický pohyb částic (v Brownově mikroskopickém pozorování z roku 1827 to byla zrníčka pylu v kapalině). Trajektorie pohybu jsou popsány pomocí spojitých funkcí $\omega : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$. Neuspořádanost pohybu částice se dá vyjádřit touto podmínkou: jestliže se částice v čase t_0 nachází v bodě x_0, pak její pohyb v následujícím čase nezávisí na chování částice do času t_0. Někdy se říká, že brownovská částice nemá paměť. Dále je rozumné předpokládat homogenitu v čase a izotropii v prostoru: hustota pravděpodobnosti, že částice nacházející se v čase t_0 v bodě x_0 se v pozdějším čase t_1 vyskytne v bodě x_1, závisí jen na přírůstku $t_1 - t_0$ a na vzdálenosti $|x_1 - x_0|$, žádný směr není preferován.

Předpokládejme nyní, že $K \subset \mathbb{R}^3$ je kompaktní množina kladné kapacity a $x \in \mathbb{R}^3$. Zajímá nás pravděpodobnost (označíme ji $p(x)$), že částice nacházející se v čase t v bodě x narazí v pozdějším čase na K. Víme, že $p(x)$ závisí na K a na x, nikoli na času startu (homogenita v čase). Zřejmě $0 \leq p \leq 1$, ve všech vnitřních bodech množiny K je $p = 1$, neboť trajektorie částice je spojitá funkce. Dá se ukázat, že funkce p je spojitá na $\mathbb{R}^3 \setminus K$. Abychom se dozvěděli více o vlastnostech funkce p, předpokládejme, že $x \notin K$, a zvolme $r > 0$ tak, aby uzávěr koule $B = B(x, r)$ a K byly disjunktní množiny. Částice startující v bodě x po nějakém čase narazí poprvé na ∂B (plyne ze spojitosti trajektorie) v bodě, který označíme y. Potom pro množinu $A \subset \partial B$ je pravděpodobnost, že $y \in A$, úměrná povrchové míře $\sigma(A)$ množiny A (všechny směry jsou stejně pravděpodobné). Tedy pravděpodobnost, že $y \in A$, je rovna $\sigma(A)/\sigma(\partial B)$. Následně částice startuje z bodu y a s pravděpodobností $p(y)$ narazí na K. Pokud si představíme, že množina A má malou míru $d\sigma$ (pak na ní je funkce p skoro konstantní v důsledku spojitosti), potom pravděpodobnost, že částice startující v bodě x na cestě do K projde přes $y \in A$, je rovna součinu pravděpodobností $p(y)$ a $d\sigma/\sigma(\partial B)$. S uvážením všech možností průchodu sférou ∂B dostáváme

$$p(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B)} \int_{\partial B} p(y)\, d\sigma(y).$$

Vidíme, že spojitá funkce p má na $\mathbb{R}^3 \setminus K$ vlastnost průměru (viz vzorec (1)), takže funkce p je na $\mathbb{R}^3 \setminus K$ harmonická. Dá se ukázat, že p je kapacitní potenciál množiny K.

[13] Zde se opíráme o výklad z [CS].

Výše popsanou motivační úvahu je třeba postavit na zdravý matematický základ. Teorie Brownova pohybu (a stochastických procesů obecně) je matematicky náročná a zázemí teorie pravděpodobnosti vyžaduje pojmově netriviální nástroje.[14]

Naším cílem je podat pravděpodobnostní interpretaci vymetání a dalších pojmů, které jsme z hlediska analytické teorie potenciálu dříve studovali (harmonická míra, tenkost, jemná topologie, polární množiny). Brownův pohyb popíšeme jako pravděpodobnostní verzi analytického objektu nazývaného brownovská pologrupa; srv. [Ba2], [Ba3], [Bl].

Nejprve bude užitečné zavést vhodnou terminologii a označení.

Označmě $\mathcal{B}$ množinu nezáporných borelovsky měřitelných funkcí v $\mathbb{R}^n$. Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ budeme psát $A \in \mathcal{B}$, jestliže charakteristická funkce $1_A \in \mathcal{B}$. Zobrazení $V : \mathbb{R}^n \times \mathcal{B} \to [0, \infty]$ nazýváme *jádro* na $\mathbb{R}^n$, jestliže

(a) $x \mapsto V(x, B)$ je borelovsky měřitelná funkce pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$,

(b) $B \mapsto V(x, B)$ je borelovská míra na $\mathbb{R}^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

Nechť P_0 je identický operátor na $\mathcal{B}$ a pro $t > 0$ nechť

$$P_t f(x) := (2\pi t)^{-n/2} \int f(y) \exp\Big(- \frac{|x-y|^2}{2t} \Big)\, dy, \quad f \in \mathcal{B}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Výpočtem se ověří, že $(P_t)_{t>0}$ je pologrupa:

$$P_s P_t = P_{s+t}, \quad s, t > 0.$$

Nazývá se *Brownova pologrupa*. Její těsná souvislost s Newtonovým potenciálem je vyjádřena rovností (c_n je kladná konstanta)

$$\int_0^\infty P_t f\, dt = c_n G(f\lambda), \quad f \in \mathcal{B}. \tag{5}$$

Brownův pohyb $\mathcal{X} = \big(\Omega, \mathcal{A}, (P^x)_{x \in \mathbb{R}^n}, (X_t)_{t \geq 0}\big)$ je pravděpodobnostní interpretace pologrupy $(P_t)_{t>0}$: existují prostor s mírou $(\Omega, \mathcal{A})$, množina $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^n}$ pravděpodobnostních měr na $(\Omega, \mathcal{A})$ a stochastický proces náhodných veličin $(X_t)_{t \geq 0}$ na Ω s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takové, že trajektorie $t \mapsto X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, jsou spojité a

$$P^x\{X_t \in B\} = P_t(x, B), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0,\ B \in \mathcal{B}$$

(zde $P_t(x, B) = P_t 1_B(x)$).[15]

Ukazuje se, že všechny potenciálně-teoretické pojmy mají pravděpodobnostní analogii; viz [Kn]. Souvislost P_t s teorií potenciálu vyjadřuje vzorec (5)

---

[14] O Brownově pohybu a souvislostech s teorií potenciálu existuje rozsáhlá literatura; uveďme např. [Ba7, Kapitola IX], [BG], [Do3, Part 2, Kapitola VII], [PS]; viz též [Ha1], [Ha2], [Cu].

[15] Konstrukce Brownova pohybu a jeho vlastností je podrobně rozebrána např. v knize [Ba7, §40].

a významná věta pocházející od J. L. Dooba a G. A. Hunta; viz [Do1], [Hu]: funkce $u \in \mathcal{B}$ je hyperharmonická na $\mathbb{R}^n$, právě když je *excesivní* vzhledem k pologrupě $(P_t)_{t>0}$, to znamená

$$\sup\{P_t u : t > 0\} = u. \tag{6}$$

Pro množinu $E \in \mathcal{B}$ definujeme *moment prvního nárazu* na množinu E:

$$T_E(\omega) := \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in E\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Zobrazení $\omega \mapsto X_{T_E}(\omega) := X_{T_E(\omega)}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, je náhodná veličina[16] s rozdělením

$$P_E(x, B) := P^x(\{X_{T_E} \in B\} \cap \{T_E < \infty\}), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Jádro P_E má v pravděpodobnostní teorii potenciálu zásadní význam:

$$P_E u = \widehat{R}_u^E \quad \text{pro všechny } u \in \mathcal{S}^+; \tag{7}$$

tento výsledek dokázal G. A. Hunt v [Hu] v roce 1957.

Tedy

$$P_E(x, \cdot) = \varepsilon_x^E.$$

Vztahy (6), (7) představují pravděpodobnostní interpretaci vymetání.

Speciálně pro omezenou otevřenou množinu $D \subset \mathbb{R}^n$ dostáváme

$$P_{D^c}(x, \cdot) = \varepsilon_x^{D^c} = \mu_x^D, \quad x \in D,$$

což je pravděpodobnostní interpretace harmonické míry. Vidíme, že pro kompaktní množinu $K \subset \partial D$ je hodnota $\mu_x^D(K)$ rovna pravděpodobnosti, že brownovská částice startující v bodě x dosáhne K, aniž by předtím narazila na $\partial D \setminus K$.

Pro $E \in \mathcal{B}$ platí: E je polární, právě když

$$P^x\{T_E < \infty\} = 0, \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^n,$$

tedy brownovská částice polární množinu E „nevidí“: nezávisle na výchozím bodu $x \in \mathbb{R}^n$ brownovská částice na množinu E nenarazí P^x-skoro jistě v žádném kladném čase.

Zajímavá je charakteristika tenkosti množiny $E \in \mathcal{B}$ v bodě $x \in \mathbb{R}^n$:

$$P^x\{T_E = 0\} = 0.$$

[16] Zde přehlížíme technicky náročné otázky měřitelnosti vyžadující zúplnění σ-algebry $\mathcal{A}$.

Tedy částice startující z bodu x nenarazí P^x-skoro jistě na E v libovolně malých časech $t > 0$. To je pro případ Lebesgueova hrotu v souladu s naší intuitivní představou.

S ohledem na definici jemného okolí U bodu x (množina U^c je v bodě x tenká), dostáváme, že brownovská částice startující v bodě x skoro jistě určitý časový interval setrvá v U. Z pravděpodobnostního hlediska se jemná okolí jeví jako přirozená pro teorii potenciálu.

7. Harmonické prostory

Klasické teorii potenciálu dominují pojem harmonické funkce a pojem Newtonova potenciálu v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Oba pojmy jsou svázány s eukleidovským prostorem (diferencovatelnost, vzdálenost). Ukazuje se, že významné vlastnosti dokázané v teorii potenciálu pro Laplaceovu rovnici, např. lokální charakter harmonických funkcí, dostatečně rozsáhlý systém regulárních množin (na nichž má Dirichletova úloha jednoznačné řešení), konvergenční vlastnosti (Harnackova věta) apod., jsou v platnosti pro širokou třídu parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu eliptického typu, a také, po určité modifikaci, pro rovnice parabolického typu, jako např. pro rovnici vedení tepla. Společné rysy s klasickou teorií potenciálu má také vyšetřování harmonických funkcí na Riemannových plochách a na varietách.

Inspirován bourbakistickým trendem axiomatizace se M. Brelot v době 2. světové války zaobíral myšlenkou vytvoření sjednocující abstraktní teorie pro studium eliptických parciálních diferenciálních rovnic. G. Choquet v [Ch3] zmiňuje, že ho samotní horliví bourbakističtí zastánci axiomatizace od takového záměru odradili.

Na přelomu padesátých let 20. století se určité pokusy o axiomatizaci objevily. Pro eliptické rovnice to byly práce [Ta1] a [Ta2] G. Tautze a pro parabolické rovnice práce [Do1], [Do2] J. L. Dooba. Poznamenejme, že Doobův přístup představuje kombinaci pravděpodobnostních a analytických metod.

V roce 1957 navrhl M. Brelot axiomatický přístup k teorii potenciálu, který ji na desetiletí silně ovlivnil.[17] Zavedení Brelotových harmonických prostorů bylo katalyzátorem pro vytvoření dalších abstraktních verzí teorie potenciálu, a především bylo silnou motivací pro studium hlubokých souvislostí s teorií stochastických procesů.

Harmonické prostory tak představují spojovací článek mezi parciálními diferenciálními rovnicemi a Markovskými procesy.

Axiomatická teorie potenciálu má v MathSciNet klasifikaci 31D05 a do června 2020 zahrnuje více než 800 recenzí. Pravděpodobnostní teorie potenciálu (klasifikace 69J45) ke stejné době zahrnuje více než 2237 recenzí.

---

[17] S historií harmonických prostorů se lze seznámit např. v [Ba4], [Ba5], [Ba6], [Br9], [Br10], [Br12], [Ch3], [Cn], [Ne2].

Nyní se o Brelotových prostorech zmíníme podrobněji.

Zhruba řečeno, *Brelotův harmonický* prostor je lokálně kompaktní topologický prostor opatřený dodatečnou, tzv. harmonickou, strukturou umožňující studium pojmů, které známe z klasické teorie potenciálu. Máme na mysli harmonické a hyperharmonické funkce, potenciály, princip minima, vymetání, Dirichletovu úlohu, harmonickou míru, jemnou topologii, Martinovu kompaktifikaci apod. Standardní příklady Brelotových harmonických prostorů poskytují eliptické parciální diferenciální rovnice v $\mathbb{R}^n$ nebo na varietách, také harmonické funkce na Riemannových plochách.

Podrobněji: nechť X je lokálně kompaktní lokálně souvislý topologický prostor a nechť $\mathcal{H}$ je *svazek* vektorových prostorů reálných spojitých funkcí. To znamená, že každé neprázdné otevřené množině $U \subset X$ je přiřazen vektorový prostor $\mathcal{H}_U$ spojitých funkcí na U takový, že platí:

(a) jestliže $f \in \mathcal{H}_U$ a $V \neq \emptyset$ je podmnožina U, potom $f_{|V} \in \mathcal{H}_V$,

(b) jestliže $\mathcal{U} \neq \emptyset$ je systém neprázdných otevřených množin, V je jeho sjednocení a f je funkce na V taková, že $f_{|U} \in \mathcal{H}_U$ pro každé $U \in \mathcal{U}$, potom $f \in \mathcal{H}_V$.

Prvky $\mathcal{H}_U$ se nazývají *harmonické funkce* na U vzhledem k $\mathcal{H}$.

Svazek $\mathcal{H}$ se nazývá *Brelotova harmonická struktura*, jsou-li splněny tyto tři axiomy:

I) *Axiom pozitivity*: $\mathcal{H}$ je *nedegenerovaný*, tj. pro každý bod $x \in X$ existuje kladná harmonická funkce na okolí x.

II) *Axiom báze*: topologie prostoru má bázi regulárních množin (relativně kompaktní otevřená množina V se nazývá *regulární*, jestliže Dirichletova úloha na V je řešitelná v tomto smyslu: pro každou reálnou spojitou funkci f na ∂V existuje jednoznačně určená harmonická funkce $H_f \in \mathcal{H}_V$, jejíž spojité rozšíření na ∂V splývá s f a přitom pro $f \geq 0$ je $H_f \geq 0$.

III) *Brelotův axiom konvergence*: pro každou neklesající posloupnost (h_n) harmonických funkcí na *oblasti* $U \subset X$ a pro $h := \sup\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ je $h = \infty$ na U nebo $h \in \mathcal{H}_U$.

Dvojice $(X, \mathcal{H})$ se nazývá *Brelotův harmonický prostor*; viz [Ba1], [Ba5], [Ba6], [Br9].

Axiom II) umožňuje pro regulární množinu V a $x \in V$ definovat harmonickou míru μ_x^V:

$$H_f(x) = \int f \, d\mu_x^V, \quad f \in C(\partial V).$$

Z axiomu III) se snadno odvodí, že pro regulární oblast V a $x \in V$ splývá nosič míry μ_x^V s ∂V. Této vlastnosti se říká *elipticita*. Odlišuje Brelotovy prostory od obecnějších harmonických prostorů, o nichž se níže zmíníme.

Definice základních pojmů v harmonickém prostoru kopíruje pojmy z klasické teorie potenciálu. Tedy např. *hyperharmonická funkce* na otevřené množině $U \subset X$ je zdola polospojitá funkce $u : U \to (-\infty, \infty]$ taková, že pro každý bod $x \in U$ a každé regulární okolí $V \subset \overline{V} \subset U$ bodu x platí

$$\int u \, d\mu_x^V \leq u(x).$$

Superharmonická funkce na U je hyperharmonická funkce konečná na husté podmnožině U.

Poznamenejme, že díky elipticitě se pro Brelotovy prostory snadno dokáže *princip minima* pro hyperharmonické funkce.

Definice potenciálu je přirozená: superharmonická funkce $p \geq 0$ na X se nazývá *potenciál*, jestliže největší harmonická minoranta p je rovna 0.

Nosič $S(p)$ potenciálu p je definován jako doplněk množiny, na níž je p harmonický. Pro vybudování rozsáhlé teorie je účelné předpokládat, že systém nezáporných superharmonických funkcí je dostatečně bohatý; podrobnosti viz např. [Ba5]. Mluví se o *silně harmonických prostorech*. Na nich lze plně rozvinout teorii vymetání, tj. studium zobrazení

$$(E, u, x) \mapsto \widehat{R}_u^E(x), \quad E \subset X, \quad u \in \mathcal{H}^*(X), \quad x \in X$$

a obdržet většinu výsledků známých z klasické teorie potenciálu. Pojmy jako tenkost, polární množina, báze množiny atd. jsou definovány v analogii s teorií potenciálu v $\mathbb{R}^n$.

Ještě bližší analogie s klasickou teorií potenciálu (role polárních množin, věta o konvergenci superharmonických funkcí, vlastnosti vymetené míry) se dostane, pokud se přidá tzv. *dominační axiom*: každý lokálně omezený potenciál je spojitý, pokud je jeho restrikce na nosič $S(p)$ spojitá. Toto je analogie Evansovy-Vasilescovy věty z klasické teorie potenciálu; viz [Ev3], [Va1].

Jak jsme již naznačili, axiomy harmonického prostoru splňuje široká třída parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu. Uveďme příklad zmíněný v [Ba5], kde jsou k dispozici relevantní citace na práce M. Hervé a R. M. Hervé: uvažujme na oblasti $U \subset \mathbb{R}^n$ operátor v divergentní formě

$$L := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big),$$

který je stejnoměrně eliptický, tj. existuje $\alpha > 0$ takové, že

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

pro každé $x \in U$ a $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Předpokládá se, že $a_{ij} = a_{ji}$ jsou lebesgueovsky měřitelné. Jestliže za L-harmonické funkce považujeme spojité funkce h, jejichž derivace jsou lokálně integrovatelné s kvadrátem (ve smyslu distribucí) vyhovující rovnici $Lh = 0$ (ve smyslu distribucí), potom U se svazkem L-harmonických funkcí tvoří Brelotův harmonický prostor.

V roce 1929 v práci [St] aplikoval W. Sternberg Perronovu metodu řešení zobecněné Dirichletovy úlohy pro rovnici vedení tepla[18]

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

na speciálních rovinných oblastech.

V šedesátých letech zavedl H. Bauer obecnější harmonické prostory, které zahrnují jak eliptický, tak parabolický případ. Ovšem u parabolických parciálních diferenciálních operátorů v $\mathbb{R}^{n+1}$ máme n prostorových proměnných (v druhých derivacích) a časovou proměnnou (v první derivaci). Tato anizotropie zásadně odlišuje parabolický a eliptický případ. Např. neplatí Brelotův axiom konvergence a v Bauerově axiomatice [Ba1] je nahrazen tzv. *Doobovým axiomem konvergence*: pro každou neklesající posloupnost (h_n) harmonických funkcí na otevřené množině $U \subset X$ je $h := \sup h_n \in \mathcal{H}_U$, pokud $h < \infty$ na husté podmnožině U.

V Bauerově axiomatice lze rozvinout teorii vymetání podobně jako v Brelotových prostorech, existují však významné odlišnosti. Roli zanedbatelných množin přebírají místo polárních množin tzv. *semipolární množiny.* Ty jsou definovány jako spočetná sjednocení *totálně tenkých* množin, tedy množin, které jsou tenké v každém bodě.

Za zmínku ještě stojí, že důkaz principu minima pro hyperharmonické funkce v Bauerově harmonickém prostoru je nesrovnatelně náročnější než v Brelotově prostoru. Bauer zde s výhodou využil svůj dřívější funkcionálně-analytický výsledek, tzv. obecný *Bauerův princip minima*, který dokázal v roce 1958. Zajímavé svědectví autora lze nalézt v [Ba6]; viz též [Ne2].

Určité první shrnutí výsledků o harmonických prostorech je obsaženo v publikacích M. Brelota [Br9] a H. Bauera [Ba1] ze šedesátých let.

Teorie harmonických prostorů upoutala pozornost řady matematiků, kteří přispěli jednak k různým zdokonalením výsledků, jednak k aplikacím teorie na parciální diferenciální rovnice a stochastické procesy.

S modifikovaným přístupem přišli C. Constantinescu a A. Cornea v dnes již klasické monografii [CC]. Základním pojmem, na rozdíl od dřívějších definicí harmonických prostorů, je nikoliv svazek prostorů harmonických funkcí, nýbrž svazek kuželů hyperharmonických funkcí.

Pokud jde o hluboké souvislosti harmonických prostorů s teorií Markovských procesů, musíme se z důvodu rozsahu příspěvku omezit jen na povrchní komentář. U Brownova pohybu hrála podstatnou roli Gaussova pologrupa. V případě

[18] Teorii potenciálu pro rovnici vedení tepla je věnována monografie [Wa].

harmonických prostorů byly nalezeny metody konstrukce pologrupy takové, že systém příslušných excesivních funkcí splývá se systémem nezáporných hyperharmonických funkcí, srv. (6); vlastnosti pologrupy umožňují interpretaci potenciálně teoretických pojmů v jazyce stochastických procesů. Zde odkazujeme čtenáře např. na [Ba2], [Ba5], [Ba6], [Bl], [BG], [Cn], [DM], [Me].

Na závěr poznamenejme, že harmonické prostory jsou objekty *lokální teorie potenciálu*: je-li $(X, \mathcal{H})$ harmonický prostor a $Y \subset X$ je otevřená množina, pak $(Y, \mathcal{H}_{|Y})$ je harmonický prostor. Charakteristické je to, že v harmonických prostorech je nosič harmonické míry pro otevřenou množinu U obsažen v hranici U. Toto není pravda v Rieszově teorii potenciálu v $\mathbb{R}^n$ vycházející z jádra $1/|x|^{\alpha - n}$. Např. pro kouli je nosičem harmonické míry celý její komplement. Výmetové prostory jsou obecnější než harmonické prostory a zahrnují mj. i případ Rieszových potenciálů.

8. Výmetové prostory (Balayage spaces)

Výše jsme zmínili, že harmonické prostory připouštějí pravděpodobnostní interpretaci. Zhruba řečeno: na harmonickém prostoru lze definovat pologrupu $\mathbb{P}$ takovou, že systém $\mathbb{P}$-excesivních funkcí a hyperharmonických funkcí splývají. J. Bliedtner a W. Hansen řešili na konci sedmdesátých let 20. století obrácený problém: kdy excesivní funkce stochastického procesu jsou hyperharmonickými funkcemi vhodného harmonického prostoru?

V roce 1986 vydali rozsáhlou knihu *Potential Theory, An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage* [BH], v níž vytvořili teorii tzv. *výmetových prostorů* (balayage spaces). V rámci těchto prostorů je možné optimálně rozvinout teorii vymetání, vymezit jejich *přesnou* souvislost s Markovskými procesy určitého typu, a také, oproti harmonickým prostorům, obohatit spektrum aplikací (nelokální teorie Rieszových potenciálů, diskrétní teorie potenciálu apod.).

Popsat vzájemnou souvislost výmetových prostorů se stochastickými procesy vyžaduje náročný pojmový aparát zahrnující např. silné Fellerovy submarkovské rezolventy, submarkovské pologrupy, Huntovy procesy, konvoluční pologrupy, harmonická jádra atd., což přesahuje možnosti rozsahu tohoto příspěvku. Náš minimální program tedy spočívá pouze v uvedení definice výmetového prostoru a v náznaku, v jakém smyslu jsou harmonické prostory jejich speciálním případem.

Výmetové prostory představují jeden matematický objekt se dvěma tvářemi: jedna je analytická, druhá je pravděpodobnostní. Pro ocenění jejich souhry musíme čtenáře odkázat na literaturu [Ha1], [Ha2], [HN, Appendix].

Nyní uvedeme definici výmetového prostoru. Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor se spočetnou bází, $C(X)$ je prostor reálných spojitých funkcí na X. Nechť $\mathcal{W}$ je konvexní kužel nezáporných zdola polospojitých funkcí na X. Nejhrubší topologie na X, která je jemnější než původní topologie, při níž jsou všechny funkce z $\mathcal{W}$ spojité, se nazývá $(\mathcal{W}-)$*jemná topologie*. Pro každou funkci $v : X \to [0, \infty]$ se největší jemně zdola polospojitá minoranta v značí $\widehat{v}^f$.

Říkáme, že $(X, \mathcal{W})$ je *výmetový prostor*, jestliže jsou splněny tyto podmínky:

(B_1) Pro každou neklesající posloupnost (v_n) funkcí z $\mathcal{W}$ je $\sup v_n \in \mathcal{W}$.

(B_2) Pro každou podmnožinu $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ je $\widehat{\inf \mathcal{V}}^f \in \mathcal{W}$.

(B_3) Jestliže $u, v', v'' \in \mathcal{W}$ a $u \leq v' + v''$, pak existují funkce $u', u'' \in \mathcal{W}$ takové, že $u = u' + u''$, $u' \leq v'$ a $u'' \leq v''$.

(B_4) (i) Konvexní kužel $\mathcal{W}$ lineárně odděluje body, tj. pro všechny body $x, y \in X$, $x \neq y$, a $\lambda \geq 0$ existuje funkce $v \in \mathcal{W}$ taková, že $v(x) \neq \lambda v(y)$.

(ii) Pro každou funkci $w \in \mathcal{W}$ je $w = \sup \{v \in \mathcal{W} \cap C(X) : v \leq w\}$.

(iii) Existují kladné funkce $u, v \in \mathcal{W} \cap C(X)$ takové, že $u/v \to 0$ v nekonečnu.

Funkce z $\mathcal{W}$ se nazývají nezáporné *hyperharmonické funkce*. Spojitým *potenciálem* se rozumí každá funkce $p \in \mathcal{W} \cap C(X)$, pro niž existuje funkce $v \in \mathcal{W} \cap C(X)$, $v > 0$, taková, že p/v se anuluje v nekonečnu.

Ve výmetovém prostoru se v analogii s klasickou teorií potenciálu a teorií harmonických prostorů zavádí R_u^E (redukce), $\widehat{R}_u^E$ (výmet), ε_x^E (Diracova míra v bodě x vymetená na E), μ^E (vymetená míra μ na E); zde $x \in X$, $E \subset X$ a $u \in \mathcal{W}$. Pomocí vymetání lze charakterizovat funkce z $\mathcal{W}$: je-li $v : X \to [0, \infty]$ zdola polospojitá funkce, potom $v \in \mathcal{W}$, právě když pro každé $x \in X$ a každé okolí U bodu x existuje množina $V \subset U$ taková, že $x \in V$, $\varepsilon_x^{V^c} \neq \varepsilon_x$ a platí $\int v \, d\varepsilon_x^{V^c} \leq v(x)$.

Nakonec se vrátíme k souvislosti harmonických a výmetových prostorů. Je-li $(X, \mathcal{H})$ silně harmonický prostor a $\mathcal{H}^*(X)$ je příslušná množina hyperharmonických funkcí na X, potom $(X, \mathcal{H}^*(X))$ je výmetový prostor a svazek harmonických funkcí je systémem $\mathcal{H}^*(X)$ určen jednoznačně. Na místě je přirozená otázka: kdy je výmetový prostor harmonickým prostorem?

Již jsme zmínili, že ve výmetovém prostoru obecně nemá pro otevřenou množinu U a $x \in U$ harmonická míra $\varepsilon_x^{U^c}$ nosič obsažený v ∂U (např. teorie potenciálu pro Rieszovo jádro). Ukazuje se, že následující podmínka (tzv. *truncation property*) je klíčem k vymezení harmonických prostorů mezi výmetovými prostory: pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ a pro libovolné funkce $u, v \in \mathcal{W}$ splňující $u \geq v$ na ∂U je funkce

$$w := \begin{cases} \inf(u, v) & \text{na } U \\ v & \text{na } U^c \end{cases}$$

obsažena ve $\mathcal{W}$. Podrobnosti lze nalézt v [BH, s. 125].

9. Závěr

Příspěvek je stručnou exkurzí do historie teorie potenciálu. Zachycuje vývoj a proměny této disciplíny zhruba v období 1840–1990, zejména s důrazem na první polovinu 20. století. Přibližuje, jak kapitola matematické fyziky postupně přerostla v respektovanou oblast matematiky s rozsáhlými vazbami na četné obory matematiky, které obohatila a kterými zároveň byla obohacena. Mezi ně patří např. teorie míry a integrálu, topologie, teorie distribucí, konvexní analýza, variační počet, parciální diferenciální rovnice, komplexní analýza a teorie pravděpodobnosti. Vývoj teorie potenciálu ilustruje klíčovou roli a význam prominentních vědců, kteří svými vizemi, intuicí a pronikavými výsledky rozhodujícím způsobem determinovali další směřování matematiky. Zároveň potvrzuje typické rysy tohoto vývoje: snahu o jednotu matematiky, o hluboké pochopení základních myšlenek jejích disciplín a hledání vzájemných souvislostí.

Příspěvek tohoto typu a rozsahu se nutně musí omezit na přiblížení pouze nejzákladnějších pojmů z teorie potenciálu a na hlavní směry jejího vývoje. Proto určité části našeho výkladu jsou značně povrchní, jako např. technicky velmi náročná teorie stochastických procesů, nebo nejsou prakticky zmíněny vůbec, jako nelineární teorie potenciálu, globální teorie potenciálně-teoretických kuželů, teorie potenciálu na grafech, aproximace harmonických a superharmonických funkcí, teorie potenciálu prostorů funkcí, Dirichletovy formy, teorie potenciálu v rovině; zde můžeme odkázat na publikace [Bj], [BB], [Sd], [Gd], [AH], [Fk], [Rn].

LITERATURA

[AH] D. R. Adams, L. I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Volume 314, Springer Verlag, Berlin, 1996, xii+366 stran. ISBN 3-540-57060-8.

[Ar] T. Archibald, *Counterexamples in Weierstraß's Work*, s. 269–285, in W. König, J. Sprekels (eds.), *Karl Weierstraß (1815–1897), Aspects of His Life and Work*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016, xv+289 stran. ISBN 978-3-658-10619-5.

[AG] D. H. Armitage, S. J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, London, 2001, viii+333 stran. ISBN 1-85233-618-8.

[Ba1] H. Bauer, *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie*, Ausarbeitung einer im Sommersemester 1965 gehaltenen Vorlesung, Lecture Notes in Mathematics, Volume 22, Springer Verlag, Berlin, New York, 1966, iv+175 stran.

[Ba2] H. Bauer, *Aspects of Modern Potential Theory*, s. 41–51, in R. D. James (ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C., 1974)*, Volume 1, Canadian Mathematical Congress, Montreal, Quebec, 1975, viii+600 stran. ISBN 0-919558-04-6.

[Ba3] H. Bauer, *Halbgruppen und Resolventen in der Potentialtheorie*, L'Enseignement Mathématiques (2) **25** (1979), č. 1–2, s. 9–22. ISSN 0013-8584.

[Ba4] H. Bauer, *Zum heutigen Bild der Potentialtheorie*, s. 3–20, in E. Knobloch, I. S. Louhivaara and J. Winkler (eds.), *Lectures from the Euler Colloquium held at the Technische Universität Berlin, Berlin, May 12–14, 1983*, Birkhäuser, Basel, 1984, xi+238 stran. ISBN 3-7643-1609-8.

[Ba5] H. Bauer, *Harmonic Spaces – A Survey*, Conferenze del Seminario di Matematica dell'Università di Bari, č. 197, 1984, 34 stran.

[Ba6] H. Bauer, *Zur Enstehungsgeschichte der Theorie der harmonischen Räume*, Österreichische Zeitschrift für Statistik und Informatik **19** (1989), s. 175–193. ISSN 1015-0811.

[Ba7] H. Bauer, *Probability Theory*, Translated from the fourth (1991) German edition by Robert B. Burckel and revised by the author. De Gruyter Studies in Mathematics, Volume 23, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996, xvi+523 stran. ISBN 3-11-013935-9.

[Bj] A. Björn, J. Björn, *Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces*, EMS Tracts in Mathematics, Volume 17, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011, xii+403 stran. ISBN 978-3-03719-099-9.

[Bl] J. Bliedtner, *Axiomatic Foundation of Potential Theory*, s. 57–68, in K. D. Bierstedt, B. Fuchsteiner (eds.), *Functionalanalysis: Surveys and Recent Results II* (*Proceedings of Second Conference on Functional Analysis, Universität Paderborn, Paderborn, 1979*), Notas Matematica, Volume 68, North-Holland, Amsterdam-New York, 1980, xii+342 stran. ISBN 0-444-85403-7.

[BH] J. Bliedtner, W. Hansen, *Potential Theory. An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage*, Universitext, Springer Verlag, Berlin, 1986, xiv+435 stran. ISBN 3-540-16396-4.

[BG] R. M. Blumenthal, R. K. Getoor, *Markov Processes and Potential Theory*, Pure and Applied Mathematics, Volume 29, Academic Press, New York, London, 1968, x+313 stran.

[BB] N. Boboc, G. Bucur, A. Cornea, *Order and Convexity in Potential Theory: H-cones*, In collaboration with Herbert Höllein, Lecture Notes in Mathematics, Volume 853, Springer Verlag, Berlin, 1981, iv+286 stran. ISBN 3-540-10692-8.

[Bt] U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer Verlag, New York, 1986, 332 stran. ISBN 0-387-96302-2.

[Bo] G. Bouligand, *Sur le problème de Dirichlet*, Annales de la Société mathématique Polonaise **4** (1926), s. 59–112.

[Bi] N. Bourbaki, *Elements of the History of Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, 1994, xviii+301 stran. ISBN 3-540-19376-6.

[Br1] M. Brelot, *Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne*, Mathematica **7** (1933), s. 147–166.

[Br2] M. Brelot, *Familles de Perron et problème de Dirichlet*, Acta litterarum ac scientiarum. Sectio scientiarum mathematicarum (Szeged) **9** (1939), s. 133–153.

[Br3] M. Brelot, *Sur la théorie moderne du potentiel*, Comptes rendus mathématique, Académie des sciences Paris **209** (1939), s. 828–830.

[Br4] M. Brelot, *Sur la théorie autonome des fonctions sous-harmoniques*, Bulletin des sciences mathématiques (2) **65** (1941), s. 72–98.

[Br5] M. Brelot, *Sur les ensembles effilés*, Bulletin des sciences mathématiques **68** (1944), s. 12–36.

[Br6] M. Brelot, *Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités*, Journal de mathématiques pures et appliquées, Neuvième série **24** (1945), s. 1–32.

[Br7] M. Brelot, *La théorie moderne du potentiel*, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) **4** (1952), s. 113–140.

[Br8] M. Brelot, *Éléments de la théorie classique du potentiel*, 3^e^ édition, Les cours de Sorbonne. 3^e^ cycle, Centre de Documentation Universitaire, Paris, 1965, 209 stran.

[Br9] M. Brelot, *Axiomatique des fonctions harmoniques*, Deuxième édition. Séminaire de Mathématiques Supérieures 14, Été 1965, Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Quebec, 1969, 141 stran.

[Br10] M. Brelot, *Historical Introduction*, s. 1–21, in M. Brelot (ed.), *Potential Theory*, Centro Internazionale Matematico Estivo, I Ciclo, Stresa, 1969, Edizioni Cremonese, Rome, 1970, 248 stran.

[Br11] M. Brelot, *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Enlarged edition of a course of lectures delivered in 1966, Lecture Notes in Mathematics, Volume 175, Springer Verlag, Berlin, New York, 1971, vi+176 stran. ISBN 3-540-05327-1.

[Br12] M. Brelot, *Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel*, L'Enseignement mathématique (2) **18** (1972), č. 1, s. 1–36. ISSN 0013-8584.

[Br13] M. Brelot, *Le balayage de Poincaré et l'épine de Lebesgue*, s. 141–151, in *Actes du 110^e^ congrès national des sociétés savantes* (Montpellier, 1985), Section des Sciences, Fasc. III, Comité des Travaux Historiques et Scientifiques, Paris, 1985, 264 stran. ISBN 2-7355-0092-6.

[BC] M. Brelot, G. Choquet, *Le théorème de convergence en théorie du potentiel*, Journal of Madras University, Section B, **27** (1957), s. 277–286.

[BM] H. Burkhardt, F. Meyer, *Potentialtheorie*, s. 464–503, in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II A 7 b*, B. G. Teubner, Leipzig, 1899–1916.

[Ca1] H. Cartan, *Capacité extérieure et suites convergentes de potentiels*, Comptes rendus mathématique, Académie des sciences Paris **214** (1942), s. 944–946.

[Ca2] H. Cartan, *Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels*, Bulletin de la Société mathématique de France **73** (1945), s. 74–106.

[Ca3] H. Cartan, *Théorie générale du balayage en potentiel newtonien*, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble), Section des sciences mathématiques et physiques **22** (1946), s. 221–280.

[CS] Z. Ciesielski, Z. Semadeni, *Przegląd niektórych nowszych metod v teorii potencjału, III, Metody probabilistyczne w teorii potencjału*, Prace matematyczne **11** (1967), s. 99–128. ISSN 0373-8299.

[Cn] C. Constantinescu, *Harmonic Spaces and Their Connections with the Semi-Elliptic Differential Equations and with the Markov Processes*, s. 19–30, in G. Anger (ed.), *Elliptische Differentialgleichungen*, Volume I, Kolloquium, Berlin, 1969, Akademie-Verlag, Berlin, 1970, viii+208 stran.

[CC] C. Constantinescu, A. Cornea, *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 158, Springer Verlag, New York, Heidelberg, 1972, viii+355 stran. ISBN 0-387-05916-4.

[Cr] R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces*, Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1950, xi+332 stran. Reprint 1977. ISBN 0-387-90246-5.

[De] C. de la Vallée Poussin, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et le problème de Dirichlet*, Annales de l'Institut Henri Poincaré **2** (1932), s. 169–232.

[DM] C. Dellacherie, P. A. Meyer, *Probabilities and Potential*, North-Holland Mathematics Studies 29, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978, viii+189 stran. ISBN 0-7204-0701-X.

[Dy] J. Deny, *Les potentiels d'énergie finie*, Acta Mathematica **82** (1950), s. 107–183.

[Di] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, Notas de Matemática 77, North-Holland Publishing Company, 1981, 312 stran. ISBN 0-444-86148-3.

[Do1] J. L. Doob, *Probability Methods Applied to the First Boundary Value Problem*, s. 49–80, in J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955*, Volume II, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1956, 246 stran.

[Do2] J. L. Doob, *Interrelations between Brownian Motion and Potential Theory*, s. 202–204, in J. C. H. Gerretsen, J. de Groot (eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam*, Volume III, Erven P. Noordhoff N. V., Groningen, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956, 560 stran.

[Do3] J. L. Doob, *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Volume 262, Springer Verlag, New York, 1984, xxv+846 stran. ISBN 0-387-90881-1.

[DP] N. du Plessis, *An Introduction to Potential Theory*, University Mathematical Monographs, Volume 7, Hafner Publishing Co., Darien, Conn., Oliver and Boyd, Edinburgh, 1970, viii+177 stran. ISBN 0-05-002054-4.

[Ev1] G. C. Evans, *Fundamental Points of Potential Theory*, Rice Institute Pamphlet **7** (1920), č. 4, s. 252–329.

[Ev2] G. C. Evans, *Application of Poincaré's Sweeping out Process*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **19** (1933), s. 457–463.

[Ev3] G. C. Evans, *On Potentials of Positive Mass I.*, Transactions of the American Mathematical Society **37** (1935), č. 2, s. 226–253.

[Fr1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddelanden fran Lunds Universitats Matematiska Seminarium **3** (1935), s. 1–118.

[Fr2] O. Frostman, *Sur le balayage des mesures*, Acta litterarum ac scientiarum. Sectio scientiarum mathematicarum (Szeged) **9** (1938/1940), s. 43–51.

[Fu] B. Fuglede, *Fine Potential Theory*, s. 81–97, in J. Král, J. Lukeš, I. Netuka, J. Veselý (eds.), *Proceedings of the Conference on Potential Theory, Prague, July 19–24, 1987*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1344, Springer Verlag, Berlin, 1988, viii+270 stran. ISBN 3-540-50210-6.

[Fk] M. Fukushima, *Dirichlet Forms and Markov Processes*, North-Holland Mathematical Library, Volume 23, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, Kodansha, Ltd., Tokyo, 1980, x+196 stran. ISBN 0-444-85421-5.

[Gd] S. J. Gardiner, *Harmonic Approximation*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Volume 221, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xiv+132 stran. ISBN 0-521-49799-X.

[Gi] L. Gårding, *The Dirichlet Problem*, The Mathematical Intelligencer **2** (1979/1980), č. 1, s. 43–53. ISSN 0343-6993.

[Ga] C. F. Gauss, *Algemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte*, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1839, Werke, Band 5, 1877, 51 stran.

[Gr1] J. Gray, *The Shaping of the Riesz Representation Theorem: A Chapter in the History of Analysis*, Archive for History of Exact Sciences **31** (1984), č. 2, s. 127–187. ISSN 0003-9519.

[Gr2] J. Gray, *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer Verlag, Cham, 2015, xvi+350 stran. ISBN 978-3-319-23714-5.

[Gn] G. Green, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, printed for the author, by T. Wheelhouse, Nottingham, 1828, viii+72 stran (také v *Mathematical Papers*, Macmillan, London, 1871, s. 9–41).

[Ha1] W. Hansen, *Balayage Spaces – A Natural Setting for Potential Theory*, s. 98–117, in J. Král, J. Lukeš, I. Netuka, J. Veselý (eds.), *Proceedings of the Conference on Potential Theory, Prague, July 19–24, 1987*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1344, Springer Verlag, Berlin, 1988, viii+270 stran. ISBN 3-540-50210-6.

[Ha2] W. Hansen, *Three Views on Potential Theory*, Přednáškový cyklus na Univerzitě Karlově, 2008, dostupný na adrese https://www.karlin.mff.cuni.cz/~hansen/lecture /course-07012009.pdf [cite 15.6.2020].

[HN] W. Hansen, I. Netuka, *Unavoidable Sets and Harmonic Measures Living on Small Sets*, Proceeding of the London Mathematical Society (3) **109** (2014), č. 6, s. 1601–1629. ISSN 0024-6115.

[Hr] A. Harnack, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene*, B. G. Teubner, Leipzig, 1887, 158 stran.

[Hw] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development*, The University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, London, 1970, xv+227 stran. ISBN 0-299-05550-7.

[He] L. L. Helms, *Introduction to Potential Theory*, Pure and Applied Mathematics, Volume 22, Wiley-Interscience, A Division of John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1969, ix+282 stran.

[Hi] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Band III, Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, Lebensgeschichte, Springer Verlag, Berlin, New York, 1970, viii+435 stran.

[Hu] G. A. Hunt, *Markoff Processes and Potentials I, II*, Illinois Journal of Mathematics **1** (1957), s. 44–93, 316–369.

[Ch1] G. Choquet, *Theory of Capacities*, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) **5** (1953/1954), s. 131–295.

[Ch2] G. Choquet, *La naissance de la théorie des capacités: réflexion sur une expérience personnelle*, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série générale, La vie des sciences **3** (1986), č. 4, s. 385–397. ISSN 0762-0969.

[Ch3] G. Choquet, *La vie et l'œuvre de Marcel Brelot* (*1903–1987*)*: His Life and Works*, Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques, Université Paris VI, Paris **11** (1990), s. 1–31. ISSN 0767-7421.

[Ch4] G. Choquet, T. De Pauw, P. de la Harpe, J.-P. Kahane, H. Pajot, B. Sévennec, *Autour du centenaire Lebesgue*, Papers from the Meeting "The Lebesgue Measure is 100 Years Old!" held at the École Normale Supérieure, Lyon, April 27–28, 2001, Panoramas et Synthèses 18, Société Mathématique de France, Paris, 2004, xii+156 stran. ISBN 2-85629-170-8.

[Cu] K. L. Chung, *Green, Brown, and Probability*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995, xiv+106 stran. ISBN 981-02-2453-2; 981-02-2533-4.

[Ja] H. N. Jahnke (ed.), *A History of Analysis*, History of Mathematics, Volume 24, American Mathematical Society, Providence, RI, London Mathematical Society, London, 2003, ix+422 stran. ISBN 0-8218-2623-9.

[Ka] S. Kakutani, *Two-dimensional Brownian Motion and Harmonic Functions*, Proceedings of the Imperial Academy Tokyo **20** (1944), s. 706–714.

[Ke1] M. V. Keldyš, *O razrešimosti i ustojčivosti zadači Dirichle*, Uspechi matematičeskich nauk **8** (1941), s. 171–231.

[Ke2] M. V. Keldyš, *O zadače Dirichle*, Doklady Akademii nauk SSSR **32** (1941), č. 5, s. 308–309.

[Kg1] O. D. Kellogg, *Unicité des fonctions harmoniques*, Comptes rendus mathématique, Académie des sciences Paris **187** (1928), s. 526–527.

[Kg2] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Reprint from the 1st edition of 1929, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Volume 31, Springer Verlag, Berlin, New York, 1967, ix+384 stran.

[Kl] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, xvii+1238 stran.

[Kn] A. W. Knapp, *Connection between Brownian Motion and Potential Theory*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **12** (1965), s. 328–349. ISSN 0022-247X.

[Le1] H. Lebesgue, *Sur le problème de Dirichlet*, Comptes rendus mathématique, Académie des sciences Paris **154** (1912), s. 335–337.

[Le2] H. Lebesgue, *Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire*, Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France **41** (1913), s. 17.

[Le3] H. Lebesgue, *Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet*, Comptes rendus mathématique, Académie des sciences Paris **178** (1924), s. 449–354.

[Li] L. Lichtenstein, *Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung*, s. 177–377, in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II C3*, B.G. Teubner, Leipzig, 1909–1921.

[Lu] J. Lukeš, J. Malý, I. Netuka, J. Spurný, *Integral Representation Theory. Applications to Convexity, Banach Spaces and Potential Theory*, De Gruyter Studies in Mathematics, Volume 35, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2010, xvi+715 stran. ISBN 978-3-11-020320-2.

[LN] J. Lukeš, I. Netuka, J. Veselý, *Choquetova teorie kapacit*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **47** (2002), č. 4, s. 265–279. ISSN 0032-2423.

[Ma] J. Mawhin, *Henri Poincaré and the Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, s. 257–277, in É. Charpentier, É. Ghys, A. Lesne (eds.), *The Scientific Legacy of Poincaré*, History of Mathematics, Volume 36, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, xiv+392 stran. ISBN 978-0-8218-4718-3.

[MS] V. Maz'ya, T. Shaposhnikova, *Jacques Hadamard, a Universal Mathematician*, History of Mathematics, Volume 14, American Mathematical Society, Providence, RI, London Mathematical Society, London, 1998, xxv+574 stran. ISBN 0-8218-0841-9.

[Me] P. A. Meyer, *Probability and Potentials*, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Masschusetts – Toronto, London, 1966, xiii+266 stran.

[Mo1] A. F. Monna, *Sur la capacité des ensembles*, Proceedings Akadamie van Wetenschappen Amsterdam **43** (1940), s. 81–86.

[Mo2] A. F. Monna, *Dirichlet's Principle. A Mathematical Comedy of Errors and its Influence on the Development of Analysis*, Oesthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht, 1975, vii+138 stran. ISBN 90-313-0175-2.

[Ne1] I. Netuka, *The Dirichlet Problem for Harmonic Functions*, American Mathematical Monthly **87** (1980), č. 8, s. 621–628. ISSN 0002-9890.

[Ne2] I. Netuka, *The Work of Heinz Bauer in Potential Theory*, s. 29–41, in H. Heyer, N. Jacob, I. Netuka (eds.), *H. Bauer, Selecta*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003, xiv+597 stran. ISBN 3-11-017350-6.

[Ne3] I. Netuka, *Pojem kompaktnosti: původ, vývoj, význam*, s. 33–76, in J. Bečvář, M. Bečvářová (eds.), *32. mezinárodní konference historie matematiky, Jevíčko, 26. 8. až 30. 8. 2011*, Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, 2011, 303 stran. ISBN 978-80-7378-172-9.

[Ne4] I. Netuka, *Cesta k pojmu kompaktního operátoru*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **63** (2018), s. 153–174. ISSN 0032-2423.

[Ne5] I. Netuka, *Lebesgue's Criticism of Carl Neumann's Method in Potential Theory*, Archive for History of Exact Sciences **74** (2020), č. 1, s. 77–108. ISSN 0003-9519.

[Ne6] I. Netuka, *Transformation of Mathematics Between World Wars: the Case of Potential Theory*, in M. Bečvářová (ed.), *The Development of Mathematics Between the World Wars*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2021. ISBN 978-1-78634-930-9 (v tisku).

[NV] I. Netuka, J. Veselý, *Mean Value Property and Harmonic Functions*, s. 359–398, in K. GowriSankaran, J. Bliedtner, D. Feyel, M. Goldstein, W. K. Hayman, I. Netuka (eds.), *Classical and Modern Potential Theory and Applications, Chateau de Bonas, July 25–31, 1993*, NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences 430, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994, xiv+470 stran. ISBN 0-7923-2803-5.

[Pr] O. Perron, *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für* $\Delta u = 0$, Mathematische Zeitschrift **18** (1923), č. 1, s. 42–54.

[Pi] J.-P. Pier, *Intégration et mesure 1900–1950*, s. 517–564, in J.-P. Pier (ed.), *Development of Mathematics 1900–1950*, Luxembourg, 1992, Birkhäuser, Basel, 1994, 729 stran. ISBN 3-7643-2821-5.

[Po1] H. Poincaré, *Sur les équations aux derivées partielles de la physique mathématique*, American Journal of Mathematics **12** (1890), č. 3, s. 211–294.

[Po2] H. Poincaré, *Théorie du potentiel Newtonien*, Georges Carré et C. Naud, Paris, 1899, 366 stran.

[Ps] S. D. Poisson, *Addition au mémoire précédent et au mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par les séries de quantités périodiques*, Journal de l'École Royale Polytechnique, 9 cahier, **12** (1923), s. 145–162.

[PS] S. C. Port, C. J. Stone, *Brownian Motion and Classical Potential Theory*, Probability and Mathematical Statistics, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, London, 1978, xii+236 stran. ISBN 0-12-561850-6.

[Ra] T. Radó, *Subharmonic Functions*, Chelsea Publishing Company, New York, 1949, 56 stran.

[Rd1] J. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien **122** (1913), s. 1295–1438 [také v P. M. Gruber, E. Hlawka, W. Nörbauer, L. Schmetterer (eds.), *Gesammelte Abhandlungen*, Band 1, s. 45–144, Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften zu Wien, Birkhäuser Verlag, Basel, 1987, xiv+377 stran. ISBN 3-7001-1102-9].

[Rd2] J. Radon, *Über Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien **128** (1919), s. 1123–1167 [také v P. M. Gruber, E. Hlawka, W. Nörbauer, L. Schmetterer (eds.), *Gesammelte Abhandlungen*, Band 1, s. 228–272, Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften zu Wien, Birkhäuser Verlag, Basel, 1987, xiv+377 stran. ISBN 3-7001-1102-9].

[Rn] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, London Mathematical Society Student Text 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, x+232 stran. ISBN 0-521-46120-0.

[Ri1] F. Riesz, *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Mathematica **41** (1916), č. 1, s. 71–98.

[Ri2] F. Riesz, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel I.*, Acta Mathematica **48** (1926), č. 3–4, s. 329–343.

[Ri3] F. Riesz, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel II.*, Acta Mathematica **54** (1930), č. 1, s. 321–360.

[Ri4] F. Riesz, *Œuvres complètes*, Volume I., edited by Á. Császár, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960, 758 stran.

[Ru] W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 2003, 460 stran. ISBN 80-200-1125-0.

[Sc] H. A. Schwarz, *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **74** (1872), s. 218–253.

[Sd] P. M. Soardi, *Potential Theory on Infinite Networks*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1590, Springer Verlag, Berlin, 1994, viii+187 stran. ISBN 3-540-58448-X.

[So] V. S. Sologub, *Razvitije teorii elliptičeskich uravnenij v XVIII i XIX stoletijach*, Naukova Dumka, Kiev, 1975, 280 stran.

[St] W. Sternberg, *Über die Differentialgleichung der Wärmeleitung*, Mathematische Annalen **101** (1929), s. 394–398.

[Sr] M. G. Šrajer, *Metody A. Puankare v teorii potenciala*, s. 203–217, 338, in A. F. Lapko (ed.), *Istoriko-matematičeskije issledovanija*, vypusk XVIII, Nauka, Moskva, 1973, 339 stran.

[Ta1] G. Tautz, *Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe*, Mathematische Nachrichten **2** (1949), s. 279–303.

[Ta2] G. Tautz, *Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe*, Archiv der Mathematik **1** (1949), s. 312–316.

[Va1] F. A. Vasilesco, *Sur la continuité du potentiel à travers les masses, et la démonstration d'un lemme de Kellogg*, Comptes rendus mathématique, Académie des sciences Paris **200** (1935), s. 1173–1174.

[Va2] F. A. Vasilesco, *Le problème de Dirichlet dans le cas le plus général*, L'Enseignement mathématique **35** (1936), s. 88–106.

[Va3] F. A. Vasilesco, *Le problème généralisé de Dirichlet*, Mémoires de l'Académie Royale Belgique **16** (1937), s. 3–55.

[Va4] F. A. Vasilesco, *La notion de capacité*, Actualité scientifiques et industrielles, Volume 571, Hermann, Paris, 1937, 49 stran.

[Va5] F. A. Vasilesco, *La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet*, Actualité scientifiques et industrielles, Volume 660, Hermann, Paris, 1938, 59 stran.

[Wa] N. Watson, *Introduction to Heat Potential Theory*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 182, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, xiv+266 stran. ISBN 978-0-8218-4998-9.

[Wi1] N. Wiener, *Certain Notions in Potential Theory*, Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology **3** (1924), s. 24–51.

[Wi2] N. Wiener, *The Dirichlet Problem*, Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology **3** (1924), s. 127–146.

[Wi3] N. Wiener, *Note on a Paper of O. Perron*, Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology **4** (1925), s. 21–32.

[Wi4] N. Wiener, *Collected Works, Volume I., Mathematical Philosophy and Foundations; Potential Theory; Brownian Movement, Wiener Integrals, Ergodic and Chaos Theories, Turbulence and Statistical Mechanics, with Commentaries*, edited by P. Masani, *Mathematicians of Our Time 10*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1976, x+761 stran. ISBN 0-262-23070-4.

[Za] S. Zaremba, *Sur le principe de Dirichlet*, Acta Mathematica **34** (1911), s. 293–316.

Poděkování

Studie byla podpořena grantem GA ČR *Dopad první světové války na utváření a proměny vědeckého života matematické komunity* s registračním číslem 18-00449S.

Adresa

Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc.
Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8