

# Matematický svět mezi válkami

---

Jiří Veselý

Kolmogorov a ruská matematika. Luzitane a její význam

In: Martina Bečvářová (author); Jindřich Bečvář (author); Zdeněk Halas (author); Magdalena Hykšová (author); Antonín Slavík (author); Ivan Netuka (author); Jiří Veselý (author); Jaroslav Zhouf (author): Matematický svět mezi válkami. (Czech). Praha: České vysoké učení technické v Praze, Ústav aplikované matematiky Fakulty dopravní ČVUT, 2020. pp. 267–298.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404401>

## Terms of use:

- © Bečvářová, Martina
- © Bečvář, Jindřich
- © Halas, Zdeněk
- © Hykšová, Magdalena
- © Slavík, Antonín
- © Netuka, Ivan
- © Veselý, Jiří
- © Zhouf, Jaroslav

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Kolmogorov a ruská matematika

## Luzitanie a její význam

JIŘÍ VESELÝ

**Abstract.** Kolmogorov, probably the most famous Russian mathematician of the 20th century, affected significantly almost all parts of mathematics including its teaching at secondary schools. The article deals with his main scientific contributions and also with his plans to change curricula of mathematical education at all levels of schools. Kolmogorov's close friend was P.S. Aleksandrov, another famous Russian mathematician.

**Key words.** Fourier series, functional analysis, probability theory, secondary school mathematics, mathematical education, Lusitania, A.N. Kolmogorov, P.S. Aleksandrov.

### 1. Tradice a vývoj matematiky v Moskvě

První univerzita v Moskvě byla pod názvem *Imperátorská moskevská univerzita* založena roku 1755. V současné době se jmenuje *Moskevská státní univerzita M. V. Lomonosova*, má čtyřicet fakult a přes tři sta kateder a ústavů. *Fyzikálně-matematická fakulta* se stala součástí univerzity roku 1804 a měla při vzniku dvě katedry, katedru čisté matematiky a katedru aplikované matematiky. Podrobněji viz [LRD]. K pedagogům, kteří na ní působili, patří Pafnutij Lvovič Čebyšev (1821–1894), známý svými pracemi z teorie aproximace a z pravděpodobnosti. Jeho učitelem byl profesor aplikované matematiky českého (rakouského) původu Nikolaj Dmitrijevič Brašman (1796–1866).<sup>1</sup> Ten mj. založil roku 1864 *Moskevskou matematickou společnost* a stal se jejím prvním předsedou; viz [DTT]. Dalším významným profesorem fakulty byl Nikolaj Vasil'jevič Bugajev (1837–1903),<sup>2</sup> jehož žákem byl Dmitrij Fjodorovič Jedorov (1869–1931); podrobněji viz [De], [Sen] a [Ve2].

Ve školním roce 1900/1901<sup>3</sup> Jedorovův starší kolega, živý a výmluvný Boleslav Kornelijevič Mlodzejevskij (1858–1923), měl první nepovinnou přednášku z teorie funkcí reálné proměnné a teorie množin.<sup>4</sup> Tak se na moskevské univer-

<sup>1</sup> Narodil se na Moravě v Rousínově.

<sup>2</sup> Podrobněji viz [De]. Poznámávám, že známější pro širší veřejnost je patrně jeho syn Boris Nikolajevič Bugajev (1880–1934), spisovatel a básník, píšící pod jménem Andrej Belyj.

<sup>3</sup> Viz <https://www.msu.ru/en/info/history3.html#nachalo> [10.7.2020], kde lze nalézt podrobnější popis personální situace na moskevské univerzitě na přelomu století.

<sup>4</sup> Viz článek [Med], kde je tato přednáška podrobně popsána.

zité poprvé objevily pojmy „množina“, „mohutnost“, „spočetnost“ a další; viz také [Eg2] a [Ph].<sup>5</sup>

V té době se téměř všichni budoucí profesori matematiky moskevské univerzity připravovali na svou budoucí dráhu delším pobytem v zahraničí, např. u Mlodzejevského to byl rok a půl trvajícím pobytem v Curychu, Paříži a Göttingenu krátce po obhajobě doktorátu v roce 1890. Také Jegorov, který maturoval roku 1887 a studium matematiky na moskevské univerzitě ukončil roku 1891, dostal tuto možnost. Pracoval nejprve dva roky na dalším odborném růstu (získání kvalifikace ekvivalentní Ph.D.); doktorát (nejvyšší hodnost) získal roku 1901 na základě předložené práce *Ob odnom klasse ortogonal'nych sistem*. Pak pobýval rok v Berlíně, Paříži a Göttingenu. Po návratu roku 1903 byl po standardních úkonech v roce 1904 jmenován řádným profesorem matematiky na katedře čisté matematiky. V následujících třech letech (1905–1908) strávil letní období v zahraničí. Na podzim roku 1908 se oženil.<sup>6</sup> V roce 1911 vyšla jeho práce [Eg1], která obsahuje tzv. Jegorovovu větu.

Jegorov měl velký cit pro rozeznávání talentů. Má velkou zásluhu na vzniku tzv. *Luzitanie*, která byla ojedinělým jevem i ve světovém měřítku a se kterou je neoddelitelně spjat vznik *moskevské školy teorie funkcí*. Jméno *Luzitanie* je odvozeno od jména Nikolaje Nikolajeviče Luzina (1883–1950),<sup>7</sup> Jegorovova žáka a hlavního tvůrce *Luzitanie* a dalších škol, které na *Luzitanii* navázaly. S malou nadsázkou však jde o tvůrce celé sovětské matematiky.

Luzin<sup>8</sup> studoval na moskevské univerzitě v letech 1901 až 1909, neboť „se hledal“. Ve svých zájmech byl rozkolísaný, a to, že nakonec zvítězila matematika, je možno přičíst hlavně jeho staršímu kolegovi Pavlovi Aleksandroviči Florenskému (1882–1937), polyhistorovi, filozofovi a teologovi, a Jegorovovi, který Luzina všestranně podporoval. Jeho zásluhou v roce 1905 odjel do Paříže, kde se intenzivně věnoval matematice. Po návratu roku 1906 složil zkoušky, uzavřel studium a zůstal u Jegorova na jakémsi postgraduálním studiu.

Nevěnoval se však jen matematice – koketoval s myšlenkou stát se lékařem, navštěvoval také přednášky z filozofie, ale nakonec matematika zvítězila. Absolvoval dvě „testovací“ přednášky a získal možnost přednášet. Dostal současně místo na katedře čisté matematiky a díky Jegorovovi byl opět vyslán do Göttingenu<sup>9</sup> a do Paříže.

<sup>5</sup> V [Eg2] je zmíněno, že Mlodzejevskij paralelně s univerzitní dráhou učil dvacet let na střední škole.

<sup>6</sup> Jeho tchánem byl český romanticky zaměřený hudební skladatel a pedagog Otakar Hřímálý (1883–1945), který působil v Moskvě.

<sup>7</sup> V anglicky psané literatuře převládá transkripce *Lusin*.

<sup>8</sup> Dostupným informativním článkem o Luzinovi v angličtině je např. [BGS], v češtině jsou snadno dostupné články [GB], [Ve2] v DML CZ, viz <https://dml.cz/community-list> [9.8.2020].

<sup>9</sup> Zde napsal svoji první práci *Über eine Potenzreihe* [O jedné mocninné řadě], kterou na popud E. Landaua (1887–1938) publikoval v *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 32(1911), s. 386–390. Na Jegorovův návrh mu byl zahraniční pobyt ještě o rok prodloužen.

## 2. Vznik Luzitanie

Od roku 1910 existoval na moskevské univerzitě první matematický vědecký seminář. Založil ho Jegorov a byl věnován matematické analýze. Na něj navázal Luzinův seminář. Luzin se po dlouhodobém pobytu v Göttingenu<sup>10</sup> a v Paříži vrátil do Moskvy v roce 1915 a získal vědecký titul na základě práce *Integral' i trigonometričeskij rjad.*<sup>11</sup>

Luzinův seminář, který se stal později známý jako Luzitanie,<sup>12</sup> navštěvovali z velmi známých matematiků Pavel Sergejevič Aleksandrov (1896–1982), Nina Karlovna Bari (1901–1061), Alexandr Jakovlevič Činčin (1864–1959), Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987), Michail Aleksejevič Lavrent'jev (1900–1980), Lazar Aronovič Ljusternik (1899–1981), Dmitrij Jevgen'jevič Men'šov (1892–1988), Viktor Vladimirovič Nemyckij (1900–1967), Pjotr Sergejevič Novikov (1901–1975),<sup>13</sup> Michail Jakovlevič Suslin (1894–1919), Lev Genričovič Šnirel'man (1905–1938), Pavel Samuilovič Uryson (1898–1924) a další.<sup>14</sup>

Seminární forma mnohem více podporovala tvůrčí činnost účastníků, nerosnatečně více než přednášky. Na Luzitanii navázaly další specializované semináře, a tak se stala kromě teorie reálných funkcí i kolébkou dalších moderních matematických zaměření. Viz [Sin].

I když Luzitanie je nesmírně zajímavým jevem, je pro nás pouze odrazovým můstkem. Soustředíme se jen na jednoho jejího člena (resp. částečně na dva). Přestože jsou soudy tohoto typu poněkud ožehavé, jde patrně o odborně nejlepšího z nich, Kolmogorova, a jeho přítele Aleksandrova.

Někdy se účastníci Luzitanie dělí na generace – Kolmogorov patří (viz [Lyu], 3. část, s. 63) k její druhé generaci, zatímco Aleksandrov k té první. Historii matematiky v SSSR je věnován článek [LL], kde je také řada informací o Luzitanii. Viz též [Vit] a obecněji o matematice v SSSR té doby [Vu1], [Vu2] a [ZD].

<sup>10</sup> O göttingenské matematice lze nalézt informace v [NB] a v knihách [BN], [Ro].

<sup>11</sup> Práce vyšla jako samostatný spisek (Lissner a Sobko, Moskva 1915) a pak v časopise *Matematičeskij sbornik* 30(1916), s. 1–242. Je zajímavá i formou, prezentuje i nedokázaná tvrzení a domněnky, které se staly základem další práce nejen Luzinovy, ale i řady jeho žáků. Viz též částečně [V1].

<sup>12</sup> Již jsme zmínili, že jméno souvisí s Luzinem, ale např. v [GrK] jsou uvedeny další dvě hypotézy. Pravděpodobně se však toto označení začalo prostě spontánně užívat mezi studenty.

<sup>13</sup> V Luzitanii vznikala i manželství (P. S. Novikov a L. V. Keldyš, nebo též N. K. Bari a V. V. Nemyckij). Bari byla skvělou Luzinovou žákyní, viz [Ba]. O rodině Novikovových viz [Ve2], s. 328.

<sup>14</sup> Tito jmenovaní (jsou řazeni abecedně, nikoli podle významu) byli vesměs Luzinovými žáky. Nejsou pochopitelně jmenováni všichni. Ze starších účastníků zmíníme alespoň Luzinovy kolegy Vladimíra Vasil'jeviče Golubeva (1884–1954), Ivana Ivanoviče Privalova (1891–1941), Wacława Sierpińského (1882–1969) a Vjačeslava Vasil'jeviče Stepanova (1889–1950). K Sierpińskému je nutné drobné vysvětlení: Jako rakouský občan byl válečným zajatcem a Jegorov s Luzinem mu zařídili možnost zúčastňovat se semináře.

### 3. Kolmogorovův původ a studia

Andrej Nikolajevič Kolmogorov se narodil za velmi dramatických okolností 25. dubna 1903 v Tambově. Jeho otcem byl statistik a agronom Nikolaj Matvejevič Katajev (?–1919),<sup>15</sup> který padl během občanské války, jeho matkou Marija Jakovlevna Kolmogorovová (1871–1903), která zemřela při jeho narození. Roli matky převzala její starší sestra Věra Jakovlevna Kolmogorovová (1863–1951), která chlapce adoptovala a žila s ním v domě svého otce ve vesnici Tunošna na Volze nedaleko města Jaroslavl', které je centrem stejnojmenné oblasti. Sestry jeho matky organizovaly v domě jakousi velice pokrokovou soukromou školu pro několik dětí, v níž získal Kolmogorov základní vzdělání. Navštěvoval ji i Petr Savvič Kuzněcov (1899–1968),<sup>16</sup> jehož paměti měl autor [Ti3] k dispozici.

Sám o době svého základního vzdělávání píše: *Radost z matematického „objevu“ jsem poznal brzo, když jsem ve věku pěti či šesti let zpozoroval schéma*

$$1 = 1^2,$$

$$1 + 3 = 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2, \dots$$

*V našem domě blízko Jaroslavi vytvořily moje tety malinkou školu, kterou navštěvovalo ne více než deset dětí různého věku. Na ní používaly nejmodernější pedagogické poznatky. Časopis Jarní vlaštovky, který jsme ve škole vydávali, můj objev otiskl. Tam jsem také otiskl aritmetické úlohy, které jsem vytvořil.*<sup>17</sup>

Dětství však končilo a nastal čas jít do školy. Ale byla to škola opravdu výjimečná a součástí změny vzdělávání bylo i stěhování.

### 4. Moskva

V roce 1910 se Věra Jakovlevna přestěhovala se svým adoptovaným synem do Moskvy, kde začal studovat na soukromém koedukovaném *Gymnázii E. A. Repmanové*.<sup>18</sup> Kolmogorov byl své adoptivní matce a učitelům, které měl, vděčný. K Věře Jakovlevně měl krásný vztah. Zachoval se náčrt oznámení

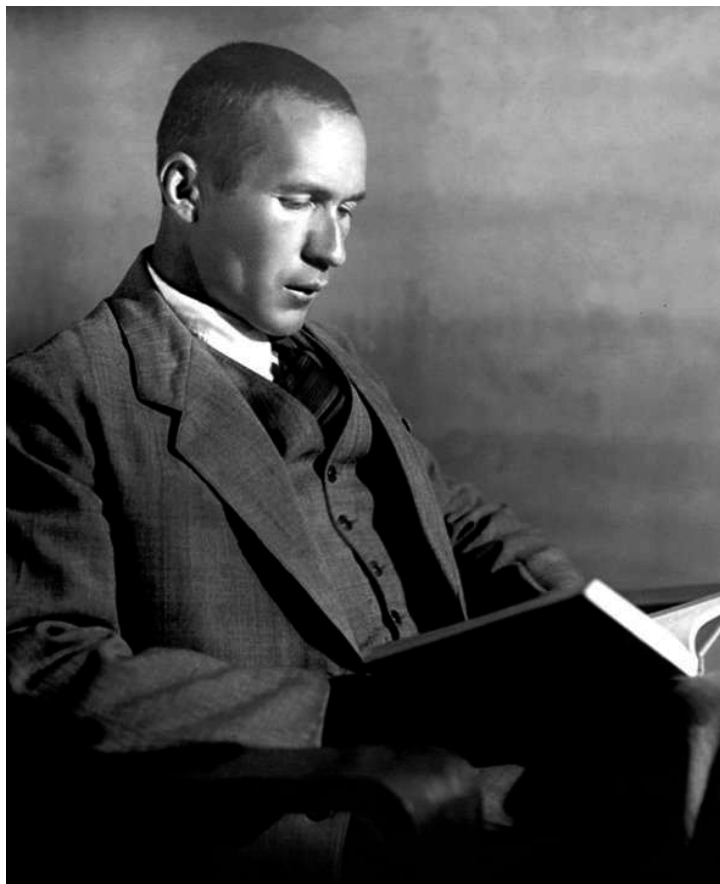
<sup>15</sup> Bývá často zmiňován jako (ex-)manžel Marije, ale podle [Ti3] nebyli oddáni. Bratranec Kolmogorova byl spisovatel Ivan Ivanovič Katajev (1902–1937), který byl roku 1937 uvězněn a později zastřelen. V roce 1956 byl rehabilitován. Kolmogorovův strýc byl významný archeolog a historik Ivan Matvejevič Katajev (1875–1946). Kolmogorov dostal podle přání matky jako nemanželský syn jméno po jejím oblíbeném literárním hrdinovi Andreji Bolkonském. Tyto informace jsou z [Ti2], s. 2 a 4.

<sup>16</sup> Později významný lingvista, profesor Mokevské univerzity.

<sup>17</sup> Mezi nimi byl, podle Kolmogorovových slov, následující problém: „Máme knoflík se čtyřmi dírkami. Když ho přišíváme, musí nit procházet minimálně dvěma z nich. Kolika způsoby se dá knoflík přišít?“

<sup>18</sup> Škola existovala od roku 1910 a Kolmogorov jí prošel v době, kdy měla optimální podobu; ve vzpomínkách se k ní vždy rád vracel. Řídily ji dvě pokrokové a osvícené

její smrti Prezidiu Akademie věd SSSR: ... *umřela moje matka Věra Jakovlevna Kolmogorovová* ... Během života ji Andrej Nikolajevič oslovoval Věro a v rozhovorech s jinými o ní mluvil jako o „tetičce Věře Jakovlevně“ (viz [Ti1], v poznámkách).



Andrej Nikolajevič Kolmogorov<sup>19</sup>  
(1903–1987)

O svých gymnaziálních učitelích píše: *Za nasměrování k volbě opravdu vědecké dráhy vděčím jednak rodinné tradici (zejména své tetě V. J. Kolmogorovové, která mě vychovala), a také prostředí, které vládlo v neobyčejně zvláštním gymnáziu J. A. Repmanové, kde jsem studoval. Můj zápal pro vědu jsem získal od učitelů této školy, byl však kultivován kroužkem přátel, z nichž zmiňuji bratry*

ženy, jednou z nichž byla Jevgenija Al'bertovna Repmanová (1870–1937). Po revoluci byla škola stále mezi nejlepšími, ale ztratila svoji výjimečnost. Repmanová pak žila v nuzných podmínkách na Krymu a řada bývalých žáků včetně Kolmogorova se její rodině snažila pomoci. Viz [Ti3], s. 24.

<sup>19</sup> Fotografie je převzata z <https://yarwiki.ru/article/2174/kolmogorov-andrej-nikolaevich> [9.8.2020].

*Seliverstovy (Gleb – matematik, Nikolaj – historik).*<sup>20</sup> Oba bratři Seliverstovi, Gleb Aleksandrovič (1905–1944) a Nikolaj Aleksandrovič (1902–1943), zahynuli za války. Mezi absolventy tohoto gymnázia najdeme i jiná slavná jména. S některými spolužáky se Kolmogorov brzy spřátelil a s Glebem Seliverstovem napsal dokonce článek o konvergenci Fourierových řad, který vyšel v roce 1926.

Gleb Seliverstov měl velmi různorodé zájmy a byl nábožensky založený. V [Ti1] je podrobněji, ale telegraficky popsán jeho osud: *Gleb Seliverstov docházel do skupiny, ve které hledal duševní oporu. To však netrvalo dlouho. Andrej Nikolajevič mi tenkrát řekl, že vedoucí kroužku, ta mravní opora, o něhož se chtěl Seliverstov opírat, byl agent-informátor. Gleba a ostatní členy kroužku zatkl. Vězení. Osvobození těsně před válkou. Pokus věnovat se inženýrské činnosti. Potom fronta. Zajetí. Útek. Náš „prověřovací“ lágr, kde zemřel na úplavici.* Viz také [Ti3], s. 27.

Kolmogorov měl v té době velmi široký okruh zájmů: studoval monografii Klimenta Arkad'jeviče Timirjazeva (1843–1920) *Život rostlin*. Ve čtrnácti letech se seznámil s vyšší matematikou pomocí *Brockhausovy encyklopedie* a hrál výborně šachy, brzo však tuto zálibu navždy opustil. S Nikolajem Seliverstovem se seriózně zabýval historií a sociologií. Snil o spravedlivém utopickém ostrovním státě – komuně a napsal i jeho ústavu. Chtěl být lesníkem. Podrobný popis Kolmogorovových životních osudů lze nalézt např. v [Ti3].

Rok 1917 byl zlomem nejen ve světové historii, ale i v jeho osobním životě. V rozhovorech s Tichomirovem<sup>21</sup> uváděl, že předvídal tragickou katastrofu, ale chápal ji jako nevyhnutelný historický fakt. Aktivně se zúčastnil voleb do *Učreditel'nogo sobranija* [Parlamentu] – agitoval pro plechanovské *Jedinstvo*. V roce 1917 mu bylo čtrnáct let. Často hovořil o roce 1917 jako o roce 14.<sup>22</sup>

Po matce byl Kolmogorov šlechtického původu. Jeho děda Jakov Stepanovič Kolmogorov byl velmi bohatý. Tichomirov píše, že v dvacátých letech prý Kolmogorov s trochou drzosti uváděl písemně i ústně, že jeden z jeho dědů byl šlechtic a druhý duchovní. Z let 1917 až 1920 nemáme o Kolmogorovovi mnoho zpráv. Ví se, že v letech 1918–1920 pracoval na dráze Kazaň–Jekaterinburg jako knihovník a topič.

Vagon vlaku byl vždy na nějaký čas odstaven v některé stanici. Kolmogorov v něm půjčoval knihy, topil a uklízel. Přitom se připravoval jako externista na zakončení střední školy. V létě 1920 se vrátil do Moskvy. Jeho škola, nyní již 23. škola druhého stupně, byla na jakémsi „pionýrském táboře“. Zajel tam a chtěl složit zkoušky, ale řekli mu, že až po obědě. Šel se tedy projít, naobědval se a pak mu dali dokument o zakončení školy bez toho, aniž by mu položili jakoukoli otázku. Bylo to pro něj velké zklamání. Nicméně jeho vztah k matematice teprve uzrával: představy o tom, že by mohl sám

<sup>20</sup> Viz [And], s. 5, kde je celý úryvek citován z časopisu *Rovesnik*, resp. [SC1], s. 27.

<sup>21</sup> Jeden z posledních Kolmogorovových žáků, Vladimir Michajlovič Tichomirov (\*1934) o něm napsal několik obsáhlých vzpomínek, které obsahují řadu velmi zajímavých informací a postřehů.

<sup>22</sup> Blíže viz [Ti1].

objevovat důležité věci, posunovat matematiku kupředu, nepřišly dříve, než kolem šestnáctého roku.

## 5. Univerzitní studium

Na podzim roku 1920 se Kolmogorov přihlásil na *Moskovskij gosudarstvennyj universitet* (MGU) na matematiku, na niž se přijímalo bez zkoušek, a současně i na fakultu metalurgie Mendelejevova chemicko-technologického institutu.<sup>23</sup> Absolvoval na něm i část výuky, dokonce i praktika, ale asi po dvou měsících matematika zvítězila. Neznamená to, že se začal věnovat pouze matematice. Navštěvoval historický seminář Sergeje Vladimiroviče Bachrušina (1882–1950), kde přednesl svoji první přednášku na MGU. Napsal dokonce práci z historie o pozemkových vztazích v Novgorodě v 15.–16. století. Práce byla dlouho považována za ztracenou, našla se až po jeho smrti. V době studia Kolmogorov učil též na střední škole (viz dále).

Velmi brzo po začátku studia složil zkoušky za první ročník a získal tím právo na 16 kg chleba a 1 kg másla na měsíc. To – jak později napsal – již znamenalo ... *plné materiální zabezpečení. Oděv jsem měl a dřeváky jsem si udělal sám.* Chodil pouze na speciální přednášky: Luzinovy z teorie analytických funkcí, Alekseje Konstantinoviče Vlasova (1868–1922) z projektivní geometrie a Urysonovy z kombinatorické topologie. Luzina upozornil na jedno neplatné tvrzení a Urysonovi našel chybu v důkaze, což jim oběma velmi imponovalo.

Jako student druhého ročníku navštěvoval od podzimu 1921 Stepanovův seminář o trigonometrických řadách, kde se seznámil s problematikou rychlosti konvergence Fourierových řad, která zajímala Luzina. Podařilo se mu dokázat následující tvrzení (reprodukuji podstatnou část):

*Pro libovolnou posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  konvergentní k 0 lze nalézt takovou posloupnost  $\{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$ , že*

- 1)  $|a_n| < a'_n$ ,
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx$  je Fourierovou řadou integrovatelné funkce.

Výsledek byl prezentován na semináři a publikován v [K1].<sup>24</sup> O reakci Luzinově píše Kolmogorov toto: *Když o tom řekli N. N. Luzinovi, obrátil se na mne (pamatuji se, že to bylo na schodišti univerzity) a navrhl mi, abych k němu pravidelně chodil na besedy.*

O mnoho let později napsal Men'šov v *Istoriko-matematičeskich issledovanijach* v [Men], že Kolmogorov nepotřeboval odborné vedení (viz také [Ve2]). Kolmogorov tehdy požádal o publikování tohoto vysvětlení: *Chtěl bych to zprěsnit: ve skutečnosti jsem přímým Luzinovým žákem. V roce 1921 se dozvěděl*

<sup>23</sup> Nyní je to Mendelejevova chemicko-technologická univerzita.

<sup>24</sup> Rukopis práce je datován 3. 12. 1922, tehdy bylo Kolmogorovovi 19 let.



o mém prvním výsledku o Fourierových řadách ... Tehdy mě pozval, abych k němu pravidelně chodil domů na Arbat č. 25 spolu s nevelkou skupinou mých vrstevníků (L. V. Keldyšová, P. S. Novikov, I. N. Chlodovskij). Tyto besedy byly pro mne mimořádně užitečné a trvaly do mého nástupu do aspirantury v r. 1925, kdy se stal N. N. Luzin mým oficiálním vědeckým školitelem. Pokračovaly i v době aspirantury (kromě doby jeho zahraničních cest) a měly pro mne ohromný inspirativní význam.

Samozřejmě, že besedy a práce s V. V. Stepanovem a D. J. Menšovem sehrály také svoji roli při formování mých zájmů.<sup>25</sup>

Kolmogorova zajímaly trigonometrické řady prakticky celý život. Jeden z jeho nejznámějších výsledků se týká Fourierových-Lebesgueových řad, publikoval je v [K2]. Jak napovídá název, obsahuje konstrukci integrovatelné funkce, jejíž Fourierova-Lebesgueova řada diverguje všude až na množinu nulové míry. Později změnou použité techniky důkazu získal řadu divergující všude, viz [K3].

## Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout.

Par

A. Kolmogoroff (Moscou).

Le but de cette Note est de donner *un exemple d'une fonction sommable<sup>1</sup>) dont la série de Fourier diverge presque partout* (c'est-à-dire: partout sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle).

La fonction construite dans cette note est à carré non sommable et je ne sais rien sur l'ordre de grandeur des coefficients de sa série de Fourier. Les méthodes employées ici ne permettent pas de construire une série de Fourier divergente partout.

Začátek Kolmogorovova článku [K2] o divergenci Fourierovy řady

Již na tomto místě je vhodné se zmínit o Kolmogorovově vztahu ke středním školám. Ve vzpomínkách píše: *V letech 1922 až 1925 jsem potřeboval ještě vedlejší příjem k mému velice skromnému stipendiu, a to mne přivedlo na střední školu. Vzpomínám nyní s potěšením na svou práci v Potylichinské experimentální modelové škole Lidového komisariátu vzdělávání RSFSR. Učil jsem matematiku a fyziku (neobávali se tenkrát svěřit současně dva předměty devatenáctiletému učiteli) a velmi aktivně jsem se zúčastňoval života školy; byl jsem sekretářem rady školy a vychovatelem na koleji.*

Kolmogorova zajímaly i jiné problémy, např. zavedení nějaké zobecněné derivace vhodné pro širokou třídu funkcí. Tato derivace měla u diferencovatelných

<sup>25</sup> O Menšovovi napsal Kolmogorov [K13].

funkcí splývat s obyčejnou klasickou derivací a mít dobré vlastnosti (linearita, apod.). K jakémusi zobecnění dospěl, ale pak ukázal, že pokud by funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3^n x}{3^n}$$

měla tuto konečnou či nekonečnou *zobecněnou derivaci* na množině kladné míry, pak by byla *neměřitelná*.

Jak již bylo zmíněno, Kolmogorov se k problematice trigonometrických funkcí a ortogonálních řad vracel. Publikoval z této oblasti analýzy asi deset článků, které pak vedly k dalším výzkumům, a to i v tomto století; viz též [U].

## 6. Pravděpodobnost<sup>26</sup>

Tak jako trigonometrické či Fourierovy řady měly dlouhý historický vývoj, totéž platí i o pravděpodobnosti. Její kořeny sahají minimálně k hazardním hrám do 17. století a jsou spojeny se jmény Blaise Pascal (1623–1662) a Pierre de Fermat (1607–1665).<sup>27</sup> Kolmogorov se k pravděpodobnostní problematice dostal ještě za studií ve 4. ročníku při spolupráci s Chinčinem. Ta započala při psaní článku [ChK] o konvergenci řad s náhodnými členy. Vzniklá práce vyšla v roce 1925. A to se Kolmogorov v té době ještě stačil zabývat zobecňováním integrálu, množinovými operacemi, principem vyloučeného třetího a konjugovanými harmonickými funkcemi; poslední téma je opět svázáno s konvergencí Fourierových řad.

O práci z deskriptivní teorie množin trochu podrobněji: Kolmogorov v ní navázal na přední francouzské matematiky přelomu století a na Aleksandrova a Suslina. Dokončil ji na začátku roku 1922, její první část [K4] však vyšla až roku 1928. Kolmogorov o tom napsal ... *moje deskriptivní práce ležely na psacím stole N. N. Luzina, který je považoval za metodologicky nesprávné, a nepohnuly se do roku 1926*. Druhou část této práce znalo mnoho lidí, zejména těch, kteří se zajímali o deskriptivní teorii množin, ale poprvé byla publikována až roku 1987 ve třetím díle Kolmogorovových sebraných prací (viz [And], str. 7).

### Malá vsuvka

Nežli popíšeme článek [ChK], připomeneme některé pojmy. Prostor s mírou je trojice  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , kde  $X$  je nějaká neprázdná množina,  $\mathcal{A}$  je nějaká  $\sigma$ -algebra jejích podmnožin a  $\mu$  je míra na této  $\sigma$ -algebře. Předpokládáme, že čtenář ví, co to jsou měřitelné funkce a jak se na tomto prostoru zavede integrál. V teorii pravděpodobnosti pracujeme s takovým prostorem ve speciálním případě: míru

<sup>26</sup> V této části budu užívat soudobé (nepůvodní) označení.

<sup>27</sup> Velmi stručný popis vývoje teorie pravděpodobnosti lze nalézt v [Apo], s. 469. Historie pravděpodobnosti, zejména v první třetině 20. století, je velmi detailně popsána v [Pl].

nazýváme pravděpodobnost, značíme ji  $\mathbf{P}$  a předpokládáme, že  $\mathbf{P}(X) = 1$ . Prvky  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{A}$  nazýváme náhodné jevy.

Budeme potřebovat pojem nezávislosti, nejprve pro systémy jevů. Označme  $I$  libovolnou indexovou množinu a necht'  $\{A_i : i \in I\}$  je libovolný systém náhodných jevů. Potom je tento systém nezávislý, jestliže pro libovolnou konečnou podmnožinu  $J \subset I$  platí rovnost

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j).$$

Podobně pro třídy systémů nezávislých jevů: Je-li  $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{A}$  pro všechna  $i \in I$ , potom třída  $\{\mathcal{E}_i : i \in I\}$  je nezávislá, jestliže pro libovolnou konečnou podmnožinu  $J \subset I$  a libovolně zvolené  $E_j \in \mathcal{E}_j$ ,  $j \in J$ , platí rovnost

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} E_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(E_j).$$

Měřitelné reálné funkce na pravděpodobnostním prostoru nazýváme náhodné veličiny. Je-li  $\xi$  náhodná veličina a  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  je  $\sigma$ -algebra borelovských množin v  $\mathbb{R}$ , označíme systém vzorů množin z  $\mathcal{B}$  symbolem  $\sigma(\xi)$ . Je to v tomto případě  $\sigma$ -algebra a množiny, které ji tvoří, leží vesměs v  $\mathcal{A}$ .

Systém  $\{\xi_i : i \in I\}$  náhodných veličin je nezávislý, právě když pro každou konečnou množinu  $J \subset I$  jsou třídy jevů  $\{\sigma(\xi_i) : i \in J\}$  nezávislé.

Je-li  $\xi$  integrovatelná náhodná veličina na  $X$ , pak zavádíme její střední hodnotu  $\mathbf{E}\xi$  pomocí integrálu jako

$$\mathbf{E}\xi = \int \xi(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \quad (\text{někdy jen } \int \xi d\mathbf{P} \text{ nebo } \int \xi).$$

Zavedeme ještě rozptyl  $\mathbf{D}\xi$  náhodné veličiny  $\xi$  vztahem

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2.$$

Je-li dále  $\mathbf{I}A$  charakteristická funkce množiny  $A \in \mathcal{A}$ , budeme značit symbolem  $\xi^c$  „oříznutou“ náhodnou veličinu  $\xi^c = \xi \mathbf{I}\{|\xi| \leq c\}$ ,  $c > 0$ .

Načrtli jsme zhruba to, co čtenář potřebuje k pochopení popisu vstupu Kolmogorova do teorie pravděpodobnosti. Popsané pojmy lze zavést různým způsobem a v různé obecnosti. Také označení kolísá. Pro zájemce o hlubší pochopení doporučuji českou monografii [Št], nebo [Shi] a [Kl].

Nyní se vrátíme zpět k práci [ChK]. Ta má čtyři části, z nichž první napsal Chinčín a zbývající tři Kolmogorov. Obsahuje následující tvrzení:

1) *Necht'  $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$  je posloupnost nezávislých náhodných proměnných. Potom řada  $\sum_{k=1}^\infty \xi_k$  konverguje skoro jistě, jestliže konvergují dvě řady*

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\xi_k \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^\infty \mathbf{D}\xi_k. \quad (1)$$

2) *Jsou-li proměnné  $\xi_1, \xi_2, \dots$  stejnoměrně omezené, tj. pro nějaké  $c < \infty$  je  $\mathbf{P}\{|\xi_k| \leq c\} = 1$  pro všechna přirozená  $k$ , potom konvergence obou dvou řad v (1) je nutnou a postačující podmínkou pro konvergenci řady  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  skoro všude.*

3) *Jestliže  $\xi^c = \xi \mathbf{I}\{|\xi| \leq c\}$ , potom pro konvergenci řady  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  skoro jistě stačí, že pro nějaké  $c > 0$  tři řady*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} \xi_k^c, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D} \xi_k^c \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_k| \leq c\}$$

*konvergují, a jestliže řada  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  konverguje skoro jistě, pak tyto tři řady konvergují pro všechna  $c > 0$ .*

V [ChK] je tvrzení z 1) dokázáno v Chinčinově části zobecněním metody použité pro speciální případ Hansem Adolphem Rademacherem (1892–1969), zatímco Kolmogorov v další části k důkazu použil zcela jinou metodu založenou na stejné myšlence, jaká se užívá v důkazu klasické *Kolmogorovovy nerovnosti*:

*Jsou-li  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  nezávislé náhodné proměnné, pro něž platí  $\mathbf{E} \eta_k = 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ , a  $S_k = \eta_1 + \dots + \eta_k$ ,  $\varepsilon > 0$ , potom platí*

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{E} S_n^2}{\varepsilon^2}.$$

Nerovnost v tomto tvaru Kolmogorov dokázal v článku, který vyšel roku 1928 v *Mathematische Annalen*. Další tvrzení jsou dokázána v následujících částech článku [ChK].

Komentář ke článku cituji z příspěvku Širjajeva (viz dále) v [And], s. 1–87: *Tento krátký článek ... již obsahuje Kolmogorovovu-Chinčinovu větu o dvou řadách, Kolmogorovovu větu o třech řadách a také Kolmogorovovo-Chinčinovo kritérium pro konvergenci skoro jistě pro řadu  $\sum \xi_k$  nezávislých náhodných proměnných s  $\mathbf{E} \xi_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , které se jednoduše formuluje a které lze nyní nalézt skoro ve všech textech o pravděpodobnosti:*

*Jestliže  $\sum \mathbf{E} \xi_k^2 < \infty$ , pak řada  $\sum \xi_k$  konverguje skoro jistě.*

## 7. Malý krok zpět

Kolmogorovovská „14“ (rok 1917) pořádně míchala lidskými osudy. Omezíme se jen na pár poznámek o některých lidech kolem Luzitanie.

Luzin odešel na konci roku 1917 z Moskvy do Ivanova, kde učil na místním Polytechnickém institutu. Totéž na Luzinovo doporučení udělali i Chinčin, Men'šov a Suslin. Suslin měl zdravotní problémy a požádal v půli roku 1919 o dovolenou na dva měsíce prázdnin. Škola mu však chtěla poskytnout pouze měsíční dovolenou, a tak byl nucen rozvázat pracovní poměr.

Studenti se ho snažili podpořit a v Ivanově ho udržet. Někteří Suslinovi kolegové se mu pokoušeli získat místo profesora např. v Saratově. Suslin pak odjel k rodičům, kde se nakazil tyfem a zemřel.

Sierpiński se po ukončení války vrátil do Polska a stal se jedním z čelných představitelů polské matematiky. Jegerov, který byl v kritické době zástupcem rektora univerzity, v Moskvě zůstal. Většina těch, kteří Moskvu opustili, se vrátila až roku 1920 nebo 1921.

Byl mezi nimi i Aleksandrov. Jeho příběh byl trochu odlišný. Rok před začátkem první světové války maturoval na elitním moskevském gymnáziu a začal studovat na univerzitě. Zpočátku byl zklamán, protože vše, čemu ho učili v prvním ročníku, již znal. Jeho nejbližším člověkem mezi matematiky byl Stepanov. Na jeho radu začal navštěvovat roku 1914 Jegerovův seminář. Začal si také postupně přivydělávat kondicemi.



Kolmogorov a Aleksandrov (zleva)<sup>28</sup>

O následujícím roku napsal ... *léto roku 1915 bylo jedním z nejmimořádnějších v mém životě. Byl to jeden z okamžiků nejvyššího životního povznesení, který jsem zažil. Toho léta jsem dospěl ke svému prvnímu významnému výsledku. Vyřešil jsem problém mohutnosti borelovských množin a v souvislosti s tímto problémem jsem sestrojil tzv. A-operaci; viz [A12], s. 284.*

Aleksandrov totiž začal svoji publikační dráhu důkazem následujícího důležitého tvrzení (viz opět práce [A12]):

*Každá nespočetná borelovská množina obsahuje perfektní [tj. uzavřenou a bez izolovaných bodů] podmnožinu, a má tudíž mohutnost kontinua.*<sup>29</sup> Aleksandrov

<sup>28</sup> Tato fotografie je převzata ze stránky SUNC MGU <https://internat.msu.ru/history/kolmogorov/> [9.8.2020].

<sup>29</sup> Nezávisle a prakticky ve stejné době vyřešil tento problém F. Hausdorff (1868–1942). Viz *Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen*, *Mathematische Annalen* 77(1916), s. 430–437.

dostal popud k řešení tohoto problému od Luzina. Ve svých pamětech ([A12], s. 285) popisuje Luzinův skepticismus, když mu přednesl plán řešení a ještě další okolnosti spojené s tímto problémem.

Problém byl tedy úspěšně vyřešen a po ověření řešení (Aleksandrov s ním nejprve seznámil Stepanova a Privalova, a pak teprve Luzina) o něm přednášel ve studentské matematické společnosti – při té příležitosti se poprvé setkal s Urysonem, Suslinem a Sierpińskim.<sup>30</sup> Po tomto úspěchu mu Luzin předložil k řešení hypotézu kontinua, se kterou ovšem neměl Aleksandrov úspěch, což ho na delší dobu odvedlo z Moskvy a od matematiky.<sup>31</sup> Po návratu se sblížil s Urysonem, s nímž navštívil s Luzinovým doporučujícím dopisem Göttingen roku 1923 a opět roku 1924.<sup>32</sup> Krátce po této druhé návštěvě Uryson při koupání s Aleksandrovem ve Francii zahynul.<sup>33</sup>

## 8. Postgraduální studium

Kolmogorov dokončil studia na MGU v roce 1925 a měl za sebou dvanáct prací, z toho osm uveřejněných ve významných časopisech. Těž rok nastoupil do postgraduálního studia pod Luzinovým vedením.<sup>34</sup> V té době se zabýval pravděpodobnostní problematikou, zejména *zákonem velkých čísel*. Toto čtyřleté studium dokončil v roce 1929 a o rok později vyšla jeho práce [K6] o *silném zákonu velkých čísel*<sup>35</sup> obsahující mj. tvrzení:

*Nechť  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  je posloupnost nezávislých náhodných proměnných s konečnými druhými momenty,  $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ . Potom jestliže*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty, \quad \text{pak platí} \quad \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad (\mathbf{P}\text{-skoro jistě}).$$

Vedle toho se také zabýval *zákonem iterovaného logaritmu* apod. Podrobnější výklad těchto Kolmogorovových výsledků včetně popisu historického vývoje podává Al'bert Nikolajevič Širjajev (\*1934) v [And], s. 11 a násl. V květnu 1929 Kolmogorov dokončil čtyřleté postgraduální studium a stál před otázkou jak dál. Za dobu 1923 až 1928 publikoval osmnáct matematických prací, ale i tak to nebylo snadné. Následující delší citát je z [K14], s. 227–228:

*Nastala otázka, kde budu pokračovat v práci. V tom roce bylo jedno volné místo v Ústavu matematiky a mechaniky – místo staršího vědeckého pracovníka. Spolu se mnou měl jeden ze starších matematiků o toto místo zájem;*

<sup>30</sup> Viz [A12], s. 285.

<sup>31</sup> Věnoval se divadlu. Na matematickou kariéru se po delší usilovné práci nepřinášející kýžený výsledek necítil, ale našel naštěstí v sobě sílu se k matematice vrátit.

<sup>32</sup> Viz [To] a též [Ve3].

<sup>33</sup> V roce 2005 byl publikován článek [CD], který je věnován okolnostem Urysonova úmrtí.

<sup>34</sup> Tehdy tento typ studia nekončil obhajobou disertace; akademické tituly byly zavedeny roku 1934 a Kolmogorov získal titul Doktor fyzikálně-matematických věd v roce 1935 na základě předchozích prací bez obhajoby disertace.

<sup>35</sup> Toto označení pochází od Chinčina.

ředitel ústavu, Dmitrij Fedorovič Jegorov, znal dobře mé vědecké výsledky, ale přesto si myslil, že je jeho povinností zohlednit věk při obsazení místa vědeckého pracovníka. Měl jsem jedinou další atraktivní možnost. V Charkově byl roku 1928 založen Ukrajinský matematický ústav a jeho ředitelem byl Sergej Natanovič Bernštejn [(1880–1968)], který byl tehdy na vrcholu své mezinárodní pověsti i pozice v rámci SSSR. Ústav už měl vlastní speciální budovu, ale pracovníci se teprve hledali. Bernštejn mi poslal návrh, že bych s ním v Ústavu mohl spolupracovat, přičemž bych podle jeho plánu zahájil spolupráci po ročním zahraničním pobytu, a podnikl i kroky, aby pro mne získal Rockefellerovo stipendium. Aleksandrov byl striktně proti Bernštejnovu plánu a nakonec se mu podařilo Jegorova přesvědčit, aby upřednostnil moji žádost o místo.

## 9. Pracovní kariéra a přátelství s Aleksandrovem

Tak se Kolmogorov stal vědeckým pracovníkem Ústavu matematiky a mechaniky MGU, se kterým zůstal spojen po zbytek svého života. Poznávám, že v roce 1931 byl jmenován profesorem MGU a od konce roku 1933 zastával místo ředitele Vědeckého výzkumného ústavu matematiky MGU. V roce 1929 ještě podnikl delší rekreační výlet po Volze, kterého se kromě něj zúčastnili Nikolaj Dmitrievič Nyuberg (1899–1967) a Aleksandrov. Jak k tomu došlo, popisuje Kolmogorov v [K14], s. 228 takto:

*Moje osobní kontakty s Aleksandrovem byly tehdy minimální, i když jsme se potkávali poměrně často, např. na koncertech v Malém sále konzervatoře. Zdravili jsme se, ale nedávali se do řeči. Patrně Aleksandrovovy tuhé límečky a jistá škrobenost mne nějak přiváděly do rozpaků ... Ani dnes si nejsem zcela jist, jak došlo k tomu, že jsem navrhl, aby třetím účastníkem výletu byl Aleksandrov. Ale on tuto nabídku okamžitě přijal. A tak dne 16. června 1929 vypluli z Jaroslavlí po Volze a od toho dne datovali Aleksandrov i Kolmogorov počátek svého přátelství ...*

Ve vzpomínkách [K14]<sup>36</sup> je vtipně s humorem popsána celá plavba po Volze, která skončila v Samaře, i výlet na Kavkaz (Baku, Sevanské jezero a delší pobyt v klášterní cele – viz [Gu], Jerevan, Tbilisi (tehdy Tiflis) atd.). V Sevanském klášteře pobývali Aleksandrov a Kolmogorov asi měsíc a pilně tam „dělali matematiku“; zatímco Aleksandrov pracoval na společné knize s Heinzem Hopfem (1894–1971) [AH], Kolmogorov se zabýval analytickým popisem Markovovských procesů; výsledky pak uveřejnil v [K7]. Oba se vrátili do Moskvy na začátku října, ne však nadlouho.

A ještě jednou věcí byl rok 1929 významný: vyšla Kolmogorovova rusky psaná málo známá práce [K5] obsahující první verzi jeho axiomatiky teorie pravděpodobnosti, která později po publikování *Grundbegriffe* [K8] začala být známá jako *Kolmogorovova axiomatika*. Kniha [K8], která učinila z Kolmogorova „otce moderní pravděpodobnosti“, vyšla v Berlíně roku 1933.

<sup>36</sup> V [And] jsou tyto vzpomínky přetištěny. Líčení celého prázdninového putování a pobytu na Sevanském jezeře je na s. 148–151.

Na začátku zimy 1929–1930 si Kolmogorov s Aleksandrovem pronajali ubytování v zemědělské usedlosti ve vesnici Kljazma asi 25 km od Moskvy na stejnojmenné řece (plavání bylo jednou z jejich společných zábav). Bydleli zde společně s Kolmogorovovou adoptivní matkou, která se jim starala o domácnost. V zimě si užívali dlouhé výlety na lyžích. Kolmogorov o tom píše: *Byl jsem mnohem horší plavec než Aleksandrov, ale celkově dost dobrý partner pro jeho kult aktivního a spontánního kontaktu s přírodou, jeho kult slunce, vody a sněhu.* Ani jemu po letech nebylo jasné, kdy se vlastně pro toto řešení rozhodli. Měli k dispozici polovinu domku sestávající ze tří místností, jejich domácí obývali druhou a kuchyň byla společná. Pronájem byl uzavřen na dva roky, kvůli zahraničním cestám byl však prakticky využit jen jeden rok.

Po dvou letech se přestěhovali do nedalekého domu, který patřil bratrovi Aleksandrova. Byl větší, ale ani zde neměli moc pohodlí. Tam se k nim přistěhovala i chůva, která o Kolmogorovova pečovala v dětství. Je třeba zmínit, že tato léta byla poznamenána represemi: Jegorov byl roku 1930 uvězněn a odsouzen v procesu s církevními činiteli (byl hluboce věřící). O rok později začal držet protestní hladovku a musel být převezen do nemocnice. Těsně před smrtí ho na základě falešného úmrtního listu převezla lékařka, manželka Nikolaje Grigorjeviče Čebotareva (1894–1947) k nim domů, kde zemřel; viz [Fo], [GrK] nebo [Ve2], pozn. 14.

V roce 1935 se Aleksandrovovi a Kolmogorovovi podařilo se štěstím koupit od příbuzných Konstantina Sergejeviče Stanislavského (1863–1938)<sup>37</sup> část prostorného domu ve vesnici Komarovka. Tím se jejich představy o bydlení naplnily. Krátce nato se jim podařilo získat objekt celý; viz [And], s. 152. Měli zde například samostatnou místnost pro knihovnu, a také mohli, i na delší dobu, ubytovat pohodlně hosty.

Jejich typický denní program byl poměrně stabilní, a to od 8 do 9 hod snídaně, pak studium do 14 hod. Následovalo lehké jídlo („druhá snídaně“) a lyžařský výlet do 17 hod. Pak zpravidla krátký spánek a večeře, končící asi v 18 hod. Následovala hudba, četba, rozhovory o všem možném a před spánkem ještě krátká procházka. Ke spánku se ukládali mezi 22 a 23 hodinou. Ze sedmidenního týdne bývali v Komarovce čtyři, z nichž jeden byl plně věnován sportovní rekreaci. Nebyl-li krutý mráz, koupali se každodenně v řece. Program se samozřejmě dle potřeby měnil v závislosti na roční době, počasí apod., ale jeho charakter byl stabilní.

Uděláme malou odbočku: Ještě před rokem 1933, který byl vzhledem k nástupu nacistů k moci v Německu zlomem i v celosvětové politické situaci, se konal v Curychu světový matematický kongres ICM 1932. Oficiální delegaci SSSR tvořili Aleksandrov, Arnošt (Ernst) Jaromirovič Kolman (1892–1979),<sup>38</sup> H. Müntz (1884–1956) a Čebotarev. Luzin v ní nebyl, ač byl tehdy prezidentem

<sup>37</sup> Stanislavskij, vlastním jménem Aleksejev, byl ruský herec a divadelní teoretik, režisér a pedagog, který byl spoluzakladatelem světově proslulého Moskevského uměleckého akademického divadla, známého pod zkratkou MCHAT.

<sup>38</sup> Kolman pobýval střídavě v Praze a v SSSR. Kniha [Ko] je ale zkrslující. Viz [Ve2].



Moskevské matematické společnosti. Nebyl ani mezi ostatními účastníky ze SSSR, patrně kvůli Kolmanovu udavačskému dopisu (viz [DL], s. 12). Nebudu tuto skutečnost podrobněji rozebírat, odkážu čtenáře např. na článek [Ve2].

Léta 1929 až 1933 patřila v Kolmogorově životě k těm nejšťastnějším. Navázané přátelství s Aleksandrovem se úspěšně rozvíjelo. V roce 1930 byli spolu na delší zahraniční cestě: Kolmogorov sice nezískal výše zmíněné Rockefellerovo stipendium, ale dostal podporu od *Narodnogo komissariata prosvěščenija* [Lidového komisariátu pro vzdělání] (Narkompros). V červnu odjel s Aleksandrovem na půl roku do Německa, pobyt byl ale rozšířen na celkem devítiměsíční služební cestu. Po krátké zastávce v Berlíně odjeli do Göttingenu. Kolmogorov k tomu poznamenává: *Matematika se v Göttingenu koncentrovala kolem Hilberta, Couranta, Landaua a Emy Noetherové. V této přátelství provázané skupině byl Aleksandrov brán jako její právoplatný člen. Lze dokonce říci, že v ní byl velice populární a že ho přátelství poutalo ke Courantovi, Neugebauerovi a k Emě Noetherové.*

Pak se Aleksandrov a Kolmogorov zastavili v Mnichově a potom odjeli do Paříže. Maurice René Fréchet (1878–1973) je pozval ke Středomoří, kam se odebrali po krátkém putování v Alpách. U Frécheta pobývali asi měsíc. Kolmogorov s ním probíral problémy týkající se Markovovských řetězců. Po dalším putování (navštívili mj. Urysonův hrob) odjeli spolu do Paříže a odtud do Göttingenu, kde Kolmogorov vážněji onemocněl. Celé putování je popsáno velmi podrobně v [K14], s. 234–240.

Také letní prázdniny roku 1932 a 1933 strávil Kolmogorov společně s Aleksandrovem, tentokrát však putováním po SSSR. Nežli se podrobněji zmíníme o vydání *Grundbegriffe*, připomeňme, že v roce 1935 Kolmogorov získal titul Doktor fyzikálně-matematických věd a v lednu 1939 byl zvolen akademikem, tj. řádným členem Akademie věd SSSR. Přitom byl od konce roku 1933 ředitelem Vědecko-výzkumného institutu matematiky moskevské univerzity. Na druhém Všesvazovém matematickém kongresu roku 1934<sup>39</sup> bylo rozhodnuto o vydávání publikace *Uspechi matematičeskich nauk* (UMN). Ty vycházejí od roku 1936 a od roku 1946 se staly časopisem. Kolmogorov byl členem jejich redakční rady od roku 1936 až do smrti, z toho pak v letech 1946–1955 a 1982–1987 byl i jejich hlavním redaktorem.

## 10. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Název této části je shodný se snad nejznámějším titulem mezi Kolmogorovými pracemi z teorie pravděpodobnosti; viz [K8]. Kniha vyšla v roce 1933 v řadě *Ergebnisse* v Berlíně.<sup>40</sup> Kořeny vzniku *Grundbegriffe* lze vystopovat až

<sup>39</sup> První Všesvazový sjezd matematiků organizoval v červnu 1930 v Charkově Jegorov. Tehdy odmítl podepsat zdravici současně probíhajícímu sjezdu Všesvazové komunistické strany bolševiků (VKSb), což vedlo k jeho uvěznění a posléze smrti v roce 1931; viz [Ve2].

<sup>40</sup> Řada *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* [Výsledky v matematice a v příbuzných oborech] začala vycházet roku 1932. Kolmogorovova práce vyšla jako třetí

k slavné přednášce Davida Hilberta (1862–1943) na ICM 1900 v Paříži a považovat tuto knihu za částečné řešení šestého Hilbertova problému, v závislosti na jeho interpretaci. Jak to u podobných věcí bývá, vlastní průlomový okamžik je vrcholem úsilí více předchůdců. Myšlenkově kniha sleduje Hilbertův postup v případě axiomatizace geometrie.<sup>41</sup> Z těch, na které navazuje, jmenuje Kolmogorov Richarda von Misese (1883–1953) a Sergeje Natanoviče Bernštejna (1880–1968). Podrobněji o zdrojích *Grundbegriffe* viz [ShV].

Kolmogorov v [K8] pracuje se soustavou axiomů, které popisují pravděpodobnostní prostor. Začíná s případem, kdy je prostor konečný:

*Je dána množina  $E$  elementárních jevů  $x, y, z, \dots$  a systém  $\mathcal{F}$  podmnožin  $E$ , které budeme nazývat náhodné jevy.*

- (1) *Systém  $\mathcal{F}$  tvoří pole, tj. je uzavřený na operace sjednocení, průniku a doplňku.*
- (2)  *$\mathcal{F}$  obsahuje množinu  $E$ .*
- (3) *Každé množině  $A \in \mathcal{F}$  je přiřazeno nezáporné reálné číslo  $P(A)$ , které nazýváme pravděpodobností jevu  $A$ .*
- (4)  *$P(E) = 1$ .*
- (5) *Jsou-li množiny  $A$  a  $B$  disjunktní, potom  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .*

Jako množinově-teoretický základ monografie je uváděna Hausdorffova kniha [Ha] ve verzi z roku 1927. Ve druhé kapitole se pracuje s nekonečnými poli, a těch se týkají další inovace. Tvoří je podmíněná pravděpodobnost a také náhodné procesy popsané pravděpodobnostními mírami na nekonečněrozměrných součinnových prostorech. Pro taková pole přibývá *axiom spojitosti*, který Kolmogorov formuluje takto:

- (6) *Značí-li  $\bigcap_k A_k$  konečný nebo spočetný průnik množin  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , pak pro posloupnost  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$  množin z  $\mathcal{F}$ , pro něž je  $\bigcap_k A_k = \emptyset$ , platí  $\lim_{i \rightarrow \infty} P(A_k) = 0$ .*

Kolmogorov se zabývá svou soustavou axiomů a ukazuje, že jsou *bezesporné*. Jejich *vzájemnou nezávislostí* se podrobněji nezabývá, považuje ji za zřejmou, ukazuje jen, že pro nekonečná pole jevů je šestý axiom nezávislý na předchozích. Jeho axiom spojitosti dává  *$\sigma$ -aditivitu*, tj. pro po dvou disjunktní jevy  $A_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , platí

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

S ohledem na malý rozsah tohoto článku uvedu již jen dva obsáhlejší prameny k tomuto tématu: knihu [Pl] a kapitolu v [GG] téhož autora, s. 960–969. Tam se čtenář dočte také podstatně více o historii teorie pravděpodobnosti.

---

svazek druhého ročníku, její ruský překlad vyšel roku 1936. Anglický překlad vyšel roku 1950 v New Yorku a opět roku 1956. Na začátku měla tato řada vždy pět svazků ročně, v její redakci byli např. P. S. Alexandrov, W. Blaschke, R. Courant, G. H. Hardy a další.

<sup>41</sup> D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Lipsko, 1899.

## 11. Žáci proti učitelí

Přesnější označení této části by mohlo být např. *případ Luzin*. Popíšeme tuto aféru jen stručně: V červnu 1936 Luzin pochválil vědomosti žáků jedné moskevské střední školy. Vzápětí byl napaden pro přikrašlování skutečnosti a byla proti němu rozvinuta v tisku rozsáhlá štvavá kampaň. Připravil ji patrně Kolman, v té době (1936–1938) vedoucí oddělení vědy moskevského městského výboru Komunistické strany, ve spolupráci s hlavním redaktorem deníku *Pravda* Lvem Zacharevičem Mechlisem (1889–1953).<sup>42</sup> Dnes je poměrně podrobný popis aféry dostupný ve více pramenech, viz např. [Kt1] nebo [Ve2].

Podstatné je, že Akademie věd SSSR ustavila komisi, která se obviněními Luzina zabývala. Komise měla formulovat a zodpovědět otázky související s případem a připravit zásadní hodnocení celé věci. Na některá její zasedání byl přizván i Luzin. Komise vyslechla některé další matematiky, na druhé straně někteří se na její jednání odmítli dostavit.

Vážnějším zájemcům o to, jak vyšetřování komise probíhalo, doporučuji knihu [DL]. Komise rozhodla, že Luzin je vinen vším, co bylo v *Pravdě* popsáno. Luzin přežil, i když vznesená obvinění byla vážná. Zůstal i akademikem, do konce života však nevyjel do zahraničí. Komise měla předsedu a dalších deset členů. Pro nás jsou z nich zajímaví pouze matematici:<sup>43</sup> Aleksandrov\*, Bernštejn, Chinčín\*, Sergej L'vovič Sobolev (1908–1989), Otto Jul'jevič Šmidt (1891–1956), Lev Genrichovič Šnirel'man\* (1905–1938) a Ivan Matvejevič Vinogradov (1891–1983). Některých zasedání se zúčastnili i jiní, např. Kolmogorov\*, Ljusternik\*, Lev Semjonovič Pontrjagin (1908–1988) a další.

Nejagresivnějším vůči Luzinovi byl dle protokolů v [DL] Aleksandrov, v tom se shoduje více autorů, kteří případ Luzin popsali. Na Luzina se např. obrací těmito slovy: *Bylo by pro vás, Nikolaji Nikolajeviči, mnohem lepší najít v sobě nezbytnou odvahu a nezbytnou skromnost přiznat se ke vzneseným obviněním. Tím obnovíte to, proč jsme si vás kdysi po zásluze vážili*. Viz [DL], s. 159–160. Aktivně proti Luzinovi vystupovali také Chinčín, Kolmogorov, Ljusternik a Šnirel'man. Na Luzinovu podporu vystoupili veřejně, nebo i přímo na jednání komise, např. Bernštejn, Alexej Nikolajevič Krylov (1863–1945), částečně i Vinogradov. Ze sovětských matematiků protestovali např. Sergej Aleksejevič Čaplygin (1869–1942) a Vladimir Ivanovič Vernadskij (1863–1945), ze zahraničních pak Arnaud Denjoy (1884–1974), Henri Lebesgue (1875–1941) a Sierpiński. Snad nejostřejší a nejdůležitější postupoval Pjotr Leonidovič Kapica

<sup>42</sup> Jistou roli zde mohl sehrát i Aleksandrovův dopis Gavrilovi Kirillovičovi Chvorostinovi (1900–1938), člověku s dobrými kontakty v ústředním výboru KSSS, o Luzinových špatnostech. Chvorostin byl v letech 1935 až 1937 rektorem Univerzity v Saratově a jeho ne vždy zcela legální snahy o pozvednutí úrovně školy se nesetkaly s kladným hodnocením Komunistické strany. Jako vlastizrádec byl v roce 1938 spolu s manželkou zastřelen. Aleksandrovův dopis je zmíněn v [Kt2]. Poznamenejme, že existuje podrobnější ruská verze tohoto pramene s názvem *Tragedija otečestvennoj matematiki*, <http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/case.html> [10.7.2020].

<sup>43</sup> Hvězdička u jména označuje Luzinovy žáky.

(1894–1984), který ohledně Luzinova případu napsal osobní dopis Vjačeslavovi Michajloviči Molotovovi (1890–1986).<sup>44</sup>

Ještě jeden detail stojí za zmínku. V [DL] je na s. 89–90 pasáž popisující Aleksandrovův názor na objev  $A$ -množin a věci s ním spojené. Cituji z ní část: *Suslin nazval své množiny  $A$ -množinami, ale nikdy neřekl, že je tak nazval na moji počest. Toto tvrzení vyslovil Luzin na přednášce na Moskevské univerzitě, na které musel být Lev Genrichovič mezi posluchači. Netvrdím, že Suslin je tak pojmenoval na moji počest, protože jsem to nikdy od samotného Suslina neslyšel.* Na s. 233–234 v [DL] je připojen komentář, který toto srovnává s líčením v Aleksandrovových pamětech: Na s. 285–286 v [Al2] píše ... *Tehdy přesně Suslin navrhl nazvat mnou sestrojenou novou teoreticko-množinovou operaci  $A$ -operace a množiny, které vznikají její aplikací na uzavřené množiny,  $A$ -množinami. Přitom zdůraznil, že navrhuje tuto terminologii na moji počest v analogii s borelovskými množinami, které se už tehdy nazývaly  $B$ -množinami.*

Je zajímavé si přečíst komentáře k vývoji moskevské školy teorie funkcí, k Luzitanii a k jednání komise o *případu Luzin* v textu Jurije Aleksandroviče Neretina (\*1959), profesora MGU (viz [Ne1]), který prostudoval detailně řadu různých dokumentů (zmiňuje jich celkem dvanáct, některé jsou však mnohonásobné, neboť jde o celé *soubory* textů) vztahujících se k tomuto případu.<sup>45</sup>

## 12. Další směry Kolmogorovova bádání

Vzhledem k neobvyklé šíři Kolmogorovových matematických zájmů je prakticky nemožné popsat (třeba i relativně povrchně) v textu tohoto rozsahu všechny jeho výsledky. Ve 30. letech se nadále zabýval pravděpodobností, ale i topologií, Fourierovými řadami a teorií aproximace. Např. v roce 1934 v práci [K9] publikoval nutné a postačující podmínky pro normovatelnost topologického lineárního prostoru.<sup>46</sup>

V práci [K10] se zabýval nejlepší aproximací funkce pomocí prvků dané třídy funkcí.<sup>47</sup> Na další práce s touto tematikou navázal např. Sergej Michajlovič Nikol'skij (1905–2012). V jedné z prací (viz [And], s. 29) o tom napsal, že *soustavné návštěvy Aleksandrova a Kolmogorovova v třicátých letech v Dně-propetrovsku [dnes oficiálně Dnipro], kde přednášeli a vedli vědecké semináře, byly speciálně příčinou toho, že se zde vyvolal vědecký výzkum v oblasti teorie*

<sup>44</sup> Dnes víme, že dopis byl rozmnožen v šestnácti exemplářích pro všechny členy Politbyra KSSS; viz [Kt2], pozn. 16. O celé akci měl pochyby snad i předseda komise Akademie věd Gleb Maksimilianovič Kržižanovskij (1872–1959), který o ní jednal osobně se Stalinem; viz [GrK], s. 146–151. V [Ne1] je však tento moment zpochybněn. Všeobecně se soudí, že Stalin osobně razanci jednání komise zastavil.

<sup>45</sup> Soupis literatury k tomuto textu na serveru *arXiv* má 682 položek!

<sup>46</sup> V práci je poprvé definován *topologický lineární prostor*, stejně tak jako omezenost a konvexita množin v tomto prostoru.

<sup>47</sup> V této práci je zaveden pojem později po Kolmogorovovi nazvaný, tzv. *Kolmogorovova šířka*; viz např. [Pi].

*aproximace*. V práci [K11] z roku 1937 se Kolmogorov zabýval vlastnostmi otevřeného zobrazení: zkonstruoval příklad zobrazení jednorozměrného kontinua na dvourozměrné. Řadu dalších výsledků nezmiňujeme, od publikování *Grundbegriffe* do začátku války s Německem [1941] Kolmogorov stačil napsat přes 80 prací, kterými významně ovlivnil vývoj matematiky. Podrobněji viz [CLN].

Dne 3. září 1942 nastala v Kolmogorovově životě důležitá změna: oženil se s Annou Dmitrijevovou Jegorovou (1903–1988), dcerou známého historika a odborníka v oblasti knihovnictví Dmitrije Nikolajeviče Jegorova (1878–1931).<sup>48</sup> Oba byli spolužáky z gymnázia J. A. Repmanové a dle rodinné tradice se poznali na prázdninovém soustředění/táboře. Ale zpět ke Kolmogorovým pracem z následujícího období. Dalšími dvěma tématy, ke kterým podstatným způsobem přispěl, byla teorie turbulence a částečně i genetika; viz [K12]. Za války se pak zabýval pravděpodobnostními tématy spojenými s vojenstvím, např. rozptylem projektilů při střelbě, účinností bombardování, apod. Přibližně v té době je též možné zaregistrovat počátek *zvýšeného* Kolmogorovova zájmu o středoškolskou problematiku. V roce 1941 uveřejnil první článek (spolu s Aleksandrovem) v časopise *Matematika v škole*. Tento časopis vycházel pod různými názvy od roku 1924. Kolmogorov pro něj napsal (případně se spoluautory) celkem 74 příspěvků. Ten poslední vyšel v roce 1986.

K pochopení dalších událostí je vhodné zmínit některé názory Kolmogorových kolegů a žáků. Tichomirov např. píše, že *je nutné říci, že v povaze Kolmogorova byla jedna chorobná zvláštnost: někdy se nedokázal ovládat*. Také Vladimír Igor'jevič Arnol'd (1937–2010) měl podobný dojem: *Andrej Nikolajevič nikdy nebyl zcela umravený a nikoli bez jisté hrdosti vyprávěl o své potyčce s milicí na peroně v Jaroslavi*. Tolik úvodem. Kolmogorov byl od roku 1939 akademikem,<sup>49</sup> přál si však velice, aby se jím stal i Aleksandrov.<sup>50</sup> Jak to již bývá, u těchto věcí nerozhodují výlučně odborné kvality, ale i zaměření, politika, kontakty a mnoho dalších věcí. A *Pusiki* nechtěli ponechat vše jen náhodě.<sup>51</sup>

Z hlediska *případu Luzin* nejsou kontakty Pusiků s Luzinem příliš pravděpodobné, ale zdá se, že přesto existovaly. Luzin jim přislíbil v roce 1946 podporu *kandidatury* Aleksandrova, což Kolmogorov chápal jako slíbenou *podporu volby*. Luzinovo stanovisko při volbě bylo prý přibližně takovéto: *Jestliže chceme zvolit vynikajícího aplikovaného matematika, musíme hlasovat pro Petrovského, chceme-li zvolit výborného teoretika, musíme volit Čebotareva, no a zajímá-li nás filozof, můžeme volit Aleksandrova*. Aleksandrov zvolen nebyl a konflikt

<sup>48</sup> Byl profesorem MGU a specialistou na kolonizaci Ruska Němci (téma jeho disertace). V roce 1930 byl uvězněn na základě vykonstruovaného obvinění. Byl poslán do Taškentu, kde záhy zemřel. V 70. letech byl plně rehabilitován.

<sup>49</sup> Jak uvádí P. S. Novikov v [No1], s. 35, do roku 1939 nebyl Kolmogorov ani členem-korespondentem Akademie SSSR, odpor k jeho zvolení kladli Luzin a Vinogradov.

<sup>50</sup> Aleksandrov byl členem-korespondentem od roku 1929.

<sup>51</sup> Přezdívka, užívaná současníky v jednotném čísle pro Aleksandrova a v množném čísle pro Aleksandrova s Kolmogorovem. Viz např. [No2] nebo [Ku3]. Není vyloučeno, že na ní měl částečně podíl i Aleksandrov sám, který užil při věnování jedné knížky Urysonovi větičku s věnováním „*PSU od PSA*“. Kolmogorov někdy oslovoval v korespondenci Aleksandrova také *Pusik*. V ruštině ve srovnání s angličtinou nemá toto označení žádný nežádoucí význam.

Kolmogorova s Luzinem byl dílem okamžiku. Je složité se vyznat v detailech, celý incident, i to, co kdo komu řekl, jsou popsány v literatuře různě. Z popisů lze vycítit sympatie k té či oné straně, ale podstata je jasná: Kolmogorov dal Luzinovi na veřejnosti facku. Kdo, komu a jak incident vyličil (neměl se stát obecně známým), není jasné, Kolmogorov byl potrestán peněžitou pokutou a byl tři měsíce přeřazen na nižší služební pozici.<sup>52</sup>

Aleksandrov se stal akademikem v roce 1953, kdy už nic nestálo v cestě: Luzin zemřel v roce 1950. Poznamenávám, že Luzin o těchto personálních věcech nerozhodoval sám, byly vždy dílem kolektivu. Ostatně bude-li se nám jevit jako člověk s rozporuplnými názory a postoji, musíme stejné měřítko uplatnit i u všech ostatních.

Vraťme se však zpět k našim protagonistům. Dům v Komarovce se stal postupně populární. Při zimních nebo letních výletech býval místem srazu Aleksandrovových a Kolmogorových kolegů a žáků. Tak se dům postupně stal jakousi filiálkou moskevské univerzity. Studenti si tam jezdili pro náměty k další práci. Kolmogorovův žák Vladimír Andrejevič Uspenskij (1930–2018) to popisuje takto: *Když A. N. indukoval u svého žáka nějaký výsledek, který téměř vyslovil, vytvářel takovou situaci, že žák k tomu výsledku dospěl sám. Pak mu navrhl napsat o tomto výsledku do časopisu článek. Byla to taková psychologická podpora mladšího partnera a byl to podstatný moment jeho působení. Jestli to dělal instinktivně nebo jestli to sám vymyslel, nevím.*<sup>53</sup>

Cestu ke komarovskému domu našla i řada známých představitelů světové matematiky, např. Jacques Hadamard (1865–1963), Fréchet, Stefan Banach (1892–1945), Hopf, Kazimierz Kuratowski (1896–1980) a další. Ze sovětských matematiků uvedeme jen několik významných Kolmogorovových žáků: Vladimír Igor'jevič Arnol'd, Širjajev, Tichomirov, Uspenskij.

### 13. Vyučování a vzdělávání

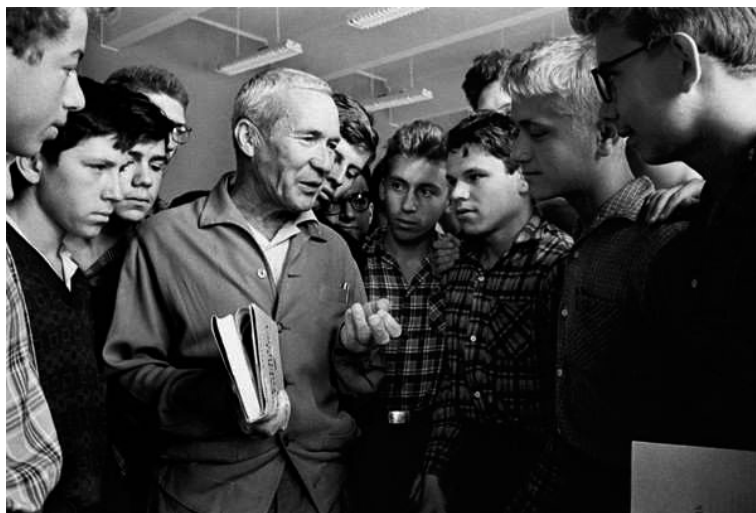
Zvláštní kapitolu o Kolmogorovově životě tvoří jeho zájem o vyučování na střední škole. Ve filmovém rozhovoru, který s ním natočili u příležitosti jeho osmdesátých narozenin, říká: *Po poměrně dlouhou dobu bylo pro mne dokonalou perspektivou postavení ředitele takové ideální, ne nutně matematické školy. A byl to zájem opravdu hluboký.*

<sup>52</sup> Byla prý snad pronesena slova *Co chcete – abych vám plivnul do tváře nebo dal přes hubu?* (popis Pontrjagina) a tehdejší prezident Akademie SSSR Sergej Ivanovič Vavilov (1891–1951) prý řekl Kolmogorovovi, že je prvním akademikem po Lomonosovovi, který se zabývá fackováním (popis Sergeje Petroviče Novikova (\*1938) v [No2]).

<sup>53</sup> Po smrti Aleksandrova v roce 1982 a Kolmogorova roku 1987 Širjajev koupil Aleksandrovovu část komarovského domu od jeho dědiců a kolmogorovskou část dala Širjajevovi Kolmogorova manželka s žádostí udržovat dům v náležitém historickém stylu. (Širjajev je autorem nekrologu [S2], jedním z editorů vzpomínkové knihy [S1] a speciálního vydání knih [SC1]–[SC3].) Toto přání Širjajev plní. A ještě technická poznámka: Dům postavil otec Stanislavského, továrník Sergej Vladimirovič Aleksejev (1836–1893) z velmi kvalitního odolného dřeva dovezeného z Anglie jako léčebnu pro lidi žijící v okolí.

Tak například vedl k jeho práci pro časopis *Kvant*. Autorem projektu vzniku tohoto časopisu byl v roce 1964 akademik Kapica a časopis začal vycházet od roku 1970. Jeho hlavním redaktorem při založení byl fyzik, akademik Isaak Konstantinovič Kikoin (1908–1984), a jeho zástupcem se stal Kolmogorov. Do začátku devadesátých let minulého století to byl měsíčník, vycházející nákladem 250–350 tisíc exemplářů. Časopis má jedno zajímavé specifikum: nestárne. Velice kvalitní články psané experty stojí za to si přečíst i nyní. Sám Kolmogorov napsal pro *Kvant* třináct článků a dva delší texty, které vyšly v sérii spojené s *Kvantem*.<sup>54</sup> Jejich seznam lze nalézt v [And], s. 210.<sup>55</sup>

Kolmogorov se také aktivně podílel na organizaci olympiád. První matematická olympiáda v SSSR se uskutečnila v Leningradě v roce 1934 a o rok později byla organizována také v Moskvě. Předsedou organizačního výboru byl tehdy Aleksandrov a jeho členem byl i Kolmogorov. V pozdějších letech byl předsedou organizačního výboru čtyřikrát i on, naposledy roku 1975. Viděl v olympiádách cestu, jak zvýšit zájem nadaných studentů o matematiku, více ho však zajímala příprava přednášek pro účastníky, práce v kroužcích apod., než organizační stránka věci. Podporoval i myšlenku prázdninových soustředění a speciálních škol. V obou případech byly neoddelitelnou částí programu kulturní a sportovní akce.



Kolmogorov mezi žáky speciální školy při MGU<sup>56</sup>

V obecné rovině lze říci, že Kolmogorova velmi zajímala práce s matematicky nadanými žáky a byl zastáncem diferenciací vzdělávání. Uvědomoval si, jak je

<sup>54</sup> Např. text [K15] vyšel v této sérii.

<sup>55</sup> *Kvant* má svoji webovou stránku <http://kvant.mccme.ru/> [9.8.2020], kde je přístup ke starším ročníkům. V době 1994–2016 vycházel pouze šestkrát ročně a od roku 2017 je to opět měsíčník. Čísla časopisu jsou vystavována s minimálním zpožděním (moving wall).

<sup>56</sup> Foto je převzato ze stránky <https://interesnyefakty.org/andrej-kolmogorov/> [9.8.2020].

důležité neztrácet talenty a dát jim co nejdříve možnost samostatné práce. Postrádal možnost organizovat cosi jako jiný typ zkoušek nebo soutěží, kde člověk není vystaven časovému stresu a musí samostatně řešit po delší dobu daný konkrétní problém praktického charakteru. Zajímal se i o jednotné vzdělávání a vhodné texty učebnic,<sup>57</sup> zdá se však, že práce s talenty byla pro něj důležitější. Pro představu o náročnosti: v roce 1937 připravil přednášku, ve které dostupným způsobem dokázal „základní větu algebry“. Zápis této přednášky se později stal oblíbeným tématem pro práci v matematických kroužcích.

Témata, která si Kolmogorov vybíral, byla většinou náročná, a to jak pro posluchače, tak i pro přednášejícího. V bezprostředně následujících seminářích a cvičeních se pak objasňovaly obtížnější momenty výkladu apod. Zajímavá je i Komogorova práce na *Bol'soj sovetskoj encyklopedii*. Myšlenka jejího vzniku a dalšího prosazování pochází od Šmidta, který vedl i její redakční kolektiv. První díl encyklopedie vyšel roku 1926 a poslední z jejích celkem 66 dílů v roce 1947. Kolmogorov pro tuto encyklopedii napsal přes 120 hesel, z nichž některá zasluhují větší pozornost. Tak např. heslo *Matematika* vzniklo na základě jeho článku *Moderní matematika* ve sborníku z roku 1936, jehož editorem byla Sof'ja Aleksandrovna Janovskaja (1896–1966).<sup>58</sup> Heslo obsahuje i zajímavou periodizaci vývoje matematiky. Kromě hesel *Míra*, *Pravděpodobnost*, *Exhaustivní metoda*, *Křivka*, *Kybernetika* apod., napsal i životopisné poznámky o řadě známých matematiků.

Kolmogorov také věnoval velkou péči výběru vhodných pedagogů pro práci s mladými studenty, a to nejen pro matematiku, ale i pro ostatní předměty. Dbal i na kvalitní jazykovou přípravu žáků. Často ji zajišťovali pracovníci fakult MGU. Kromě toho se staral i o sjednávání různých setkání se zajímavými lidmi – muzikanty, literáty i básníky. Pro taková vystoupení získal i Aleksandrova. Sám nejednou přednášel např. o svých zážitcích z Indie (1962), o plavbě na výzkumné lodi *Dmitrij Mendelejev* (1969, 1971) apod. Velice dbal o zdraví žáků, tělesné i duševní. *Lze říci*, že práce s mladými lidmi mu přinášela nejen radost, ale i uspokojení.

Pravda, Kolmogorov se naštěstí nestal ředitelem nějaké střední školy, nicméně již v mládí mohl učit a byl Učitelem s velkým „U“. Výuku bral z gruntu a důkladně promýšlel jak obsah, tak i její efektivitu. Úspěšně získával důvěru žáků a ti ho měli rádi. Jedním z výsledků v tomto směru byl vznik speciální internátní školy při MGU pro nadané žáky z celého SSSR, známé nyní pod jménem Kolmogorova škola. Byla založena v prosinci roku 1963 spoluprací Kikoina a Kolmogorova za podpory Ivana Georgijeviče Petrovského (1901–1973), Mstislava Vsevolodoviče Keldyš (1911–1978) a dalších.<sup>59</sup> Škola je zaměřena na

<sup>57</sup> Již v roce 1939 napsal s Aleksandrovem učebnici *Algebra* určenou pro střední školu.

<sup>58</sup> Absolventka *Institutu Rudých profesorů*, profesorka MGU. Zasloužila se o ruské vydání matematických prací Karla Marxe. Kolmogorova a Šmidta v souvislosti s encyklopedií kritizovala v článku *Matematika v BSE*.

<sup>59</sup> Petrovskij byl rektorem MGU (1951–1973) a Keldyš, bratr L. V. Keldyšové, předsedou Akademie věd SSSR (1961–1975).



matematiku, fyziku, informatiku, chemii a biologii a kvalitně připravuje studenty pro další studium těchto oborů, zejména na MGU. Výuku vedou zaměstnanci nebo absolventi MGU a cílem školy je rozvíjení individuálních schopností žáků. Podobné školy byly zřízeny i v Jekaterinburgu, Kyjevě nebo Novosibirsku. Informace o Kolmogorovově škole jsou u nás relativně známé již řadu let, viz [Še].<sup>60</sup>

#### 14. Reforma a její kritika

V posledních třiceti letech svého života věnoval Kolmogorov většinu svých sil vyučování a žákům. Všimněme si nejprve jeho působení na MGU. Ani jako vedoucí pracovník a špičkový vědec Kolmogorov nikdy nepřestal přednášet. Nepatřil k oslňujícím rétorům, jakým byl např. Aleksandrov, jeho význam byl spíše v koncepci přednášek, které byly pod jeho vedením zavedeny. Byl tím průkopníkem, který je promýšlel a jako první uváděl v život, tím, kdo je viděl v širších souvislostech. A sledoval modernost, byl však spíše přítelem propracovávání až k hranici dokonalosti.

Jak jsem již dříve popsal, k psaní učebnic pro středoškolačky se Kolmogorov dostal velmi brzo. První, kterou napsali spolu s Aleksandrovem v roce 1929, byla *Algebra*. Byla vydána jen její první část pro 6. a 7. ročník, ze druhé vyšla pouze jedna kapitola po válce jako ukázka v časopise, avšak autoři se k tomuto projektu již nevrátili. V anotaci ke knize se píše: *Čtenářům se tato učebnice P. S. Aleksandrova a A. N. Kolmogorova vydaná roku 1939 předkládá jako experimentální text, aby se s ním mohl seznámit široký okruh učitelů matematiky a vědeckých pracovníků ...*; viz [Va]. Dále se píše o tom, který text má být touto novou učebnicí nahrazen. Sami autoři pak v úvodu píší o svých cílech ... *Všude jsme se snažili o sladění srozumitelnosti výkladu s jeho dostatečnou přesností a logikou. Jsme přesvědčeni, že tato kniha bude věrným a spolehlivým průvodcem studentů nejen při prvním seznámení s látkou, ale i při dalším studiu matematiky.*

Pak přišel proces reformou a modernizace středoškolské výuky. Kolmogorov se v něm začal angažovat roku 1963 či o málo dříve, když se stal předsedou Komise pro matematické vzdělávání Akademie SSSR s relativně širokou náplní práce. O rok později se patrně stal již aktivním zastáncem reformou, ale stěží lze zjistit z obecných vyjádření záměry a šíři změn. Tzv. Kolmogorovova reforma, jak bývá nazývána, vyvolala v tehdejším SSSR vášnivé diskuse. Těžko ji lze popsat v podrobnostech. Zájemce odkazují na [Ne2] (velmi obsáhlý pramen s anglickým názvem a úvodem, avšak s hlavní částí psanou rusky) nebo na popis

<sup>60</sup> Roku 1964 byla zřízena speciální matematická maturitní třída na Střední všeobecně vzdělávací škole W. Piecka v Praze (byla známá pod přezdívkou *Pikárna*), a to na základě výsledků v Matematické olympiádě. Současně byl otevřen i první ročník. Dnes s ní spojuje svoji historii *Gymnázium Christiana Dopplera*. Škola podobného typu vznikla též z gymnázia v Bílovci (existuje od roku 1946) výnosem Ministerstva školství v roce 1974. Jde o *Gymnázium Mikuláše Koperníka*. Absolventi takových škol dosahovali při studiu přírodovědných oborů a matematiky výborných výsledků.

a hodnocení v brožuře [KV]. Pokusím se čtenáři stručně přiblížit výsledek.

Reforma byla inspirována bourbakisty.<sup>61</sup> Z [Ne2] uvedu alespoň ukázkou, která je převzata z učebnice pro 6. třídu autorského kolektivu vedeného Kolmogorovem:

**Definice.** *Bod  $X$  leží mezi body  $A$  a  $B$ , pokud nesplývá s žádným z těchto bodů a vyhovuje rovnosti<sup>62</sup>*

$$m(A, X) + m(X, B) = m(A, B).$$

**Definice.** *Množina, jejímiž prvky jsou dva nesplývající body  $A$  a  $B$  a všechny body ležící mezi nimi, se nazývá úsečka  $AB$ .*

**Definice.** *Polopřímku  $OA$  nazveme množinu těch bodů, které tvoří úsečku  $OA$ , a všech bodů  $X$ , pro něž  $B$  leží mezi  $O$  a  $X$ .*

*A konečně přímka*

*... takže přímka  $AB$  se skládá ze*

- 1) *všech bodů úsečky  $AB$ ;*
- 2) *všech bodů  $X$ , pro něž  $B$  leží mezi  $A$  a  $X$ ;*
- 3) *všech bodů  $Y$ , pro něž  $A$  leží mezi  $B$  a  $Y$ .*<sup>63</sup>

Reformní učebnice se psaly ve spěchu a ač se podle některých z nich dalo – ne však ideálně – učit ve školách s nadanými žáky a dobrými učiteli, byly nasazeny jako učebnice pro *všechny* školy. Výsledkem byl katastrofální neúspěch.

## 15. Lidský rozměr

Kolmogorov byl během života mnohokrát významně oceněn, získal mj. Čebyševovu cenu (1949), Balzanovu cenu (1963) i Wolfovu cenu (1980), které jsou z matematického hlediska nejzajímavější. Výčet všech ocenění lze nalézt v [And], s. 83–84. Jakým byl však člověkem?

Zatím jsme jen vcelku náhodně zmiňovali některé vlastnosti Kolmogorova a Aleksandrova, nyní si jich všimneme systematictěji a provedeme stručné srovnání. Oba pocházeli z rodin s dobrými materiálními poměry, měli výborné základní vzdělání, byli všestranně nadaní. Nebyli od začátku zcela vyhranění, ale rozhodli se oba pro studium matematiky na MGU. Celkem brzy dosáhli výborných výsledků. Oba se stali členy Luzitane a jejich životní dráha se zkřížila s dráhou Luzina. Byli výraznými osobnostmi a vztah obou k Luzinovi byl komplikovaný.

<sup>61</sup> O bourbakistech se lze dočíst například v článku K. Rychlíka *Nicolas Bourbaki*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 4(1959), s. 673–678, který je dostupný na <http://dml.cz/dmlcz/138380> [10.7.2020]. Rozsáhlejším pramenem v češtině je kniha [Ac].

<sup>62</sup> Označení  $m$  je užito pro vzdálenost.

<sup>63</sup> V [Ne2], s. 8–9, se uvádí, že text je převzat z prvního vydání *Geometrie 6*, s. 11–13. V dalších vydáních byl text poněkud modifikován.

Poprvé se Kolmogorov a Aleksandrov setkali krátce po roce 1920, ale v té době se Aleksandrov sblížil s Urysonem a začali se zabývat topologií. Uryson se věnoval teorii dimenze a začali s Aleksandrovem publikovat práce z topologie. Byli také prvními vynikajícími *sovětskými* matematiky, kteří vyjeli do zahraničí – navštívili Göttingen, kde se setkali s Hilbertem, Emmy Noetherovou (1882–1935) a dalšími tammími matematiky. Brzy poté toto přátelství tragicky skončilo Urysonovou smrtí; viz [Lo], s. 173. Již výše jsme popsali, jak se Kolmogorov spřátelil s Aleksandrovem v roce 1929. V době matematického sjezdu v Charkově, na nějž ze zahraničí přijeli Wilhelm Blaschke (1885–1962), Élie Cartan (1860–1951), Paul Montel (1876–1975), Denjoy a Hadamard, byli oba v Německu a ve Francii. Brzy potom, co se vrátili, začal stalinský teror (viz [Sny]) doléhat i na matematiky. Přišla éra Kolmana, který se stal prezidentem Moskevské matematické společnosti a když skončil roku 1932, nastoupil po něm Aleksandrov. Ten tuto funkci vykonával od roku 1932 do roku 1964; po něm ji převzal Kolmogorov. Oba se zúčastnili Luzinova vyšetřování v komisi Akademie věd SSSR, Aleksandrov jako člen komise byl v protiluzinovském křídle neaktivnější, zatímco Kolmogorov jednání komise navštívil pouze jeden den (snad aby Aleksandrova podpořil).

V té době již spolu vlastnili dům v Komarovce, kde trávili většinu času. Aleksandrovovo manželství uzavřené 1921 záhy skončilo, Kolmogorovovo s bývalou spolužačkou uzavřené roku 1942 trvalo až do jeho smrti. Vzájemný vztah Kolmogorova a Aleksandrova byl hluboký. Dejme nejprve slovo jim. Aleksandrov o tom v roce 1983 napsal:

*Moje přátelství s Kolmogorovem zaujímá v mém životě výjimečné a zcela jedinečné místo: v roce 1979 trvalo již 50 let a za toto půlstoletí nemělo ani trhlinku a nikdy v něm nevznikla jakákoli hádka. Za celý ten čas jsme neměli žádné nedorozumění ve věcech jakkoli vážných pro náš život nebo v názoru na svět; i v případě, že se naše názory na některé otázky lišily, stavěli jsme se k tomu s plným pochopením a porozuměním.*

Kolmogorov se o tomto přátelství vyjádřil roku 1986 takto:

*[léta našeho přátelství] byla důvodem, proč celý můj život byl zcela naplněn štěstím a základem tohoto štěstí byla nepřetržitá ohleduplnost Pavla Sergejeviče ke mně. Tentýž rok na shromáždění Moskevské matematické společnosti 27. května řekl: Pravděpodobně bych se stal stejně matematikem, ale moje lidské hodnoty byly ve velké míře utvářeny pod vlivem Pavla Sergejeviče. Bohatstvím a šíří svých názorů byl Aleksandrov opravdu výjimečný člověk ... Jeho vědomosti o hudbě a umění a jeho vřelý a chápavý přístup k lidem byly pozoruhodné.*

Aleksandrov měl talent pro jednání s lidmi, který mu např. v Göttingenu získal řadu přátel. Byl výborný řečník, měl blízko k přírodě, miloval plavání (často bez oděvu) a chladná voda byla jeho živel. Praktické každodenní otázky řešival ponejvíce on. Kolmogorov byl všestrannější, nejen v matematice, ale i ve sportu, svým způsobem přímočařejší a snáze podléhal emocím. Ale měli stejné

chápaní života, a to, nač si zvykli v Luzitanii, přenášeli dále. Do Komarovky zvali svoje studenty na pěší i lyžařské túry, společný poslech hudby i na besedy o matematice. Mimochodem, Kolmogorov měl podle [Mgp] 82 studentů, z nichž někteří se stali matematickými hvězdami.

Je pár míst v Kolmogorovově životě, která těžko chápeme. Dne 13. února 1974 byl zatčen Aleksandr Isajevič Solženicyn (1918–2008)<sup>64</sup> a zbaven státního občanství. Následující den byl pak odvezen do NDR. V deníku *Pravda* vyšla 16. února vyjádření podporující Solženicynovo vyhoštění, z nichž jedno bylo podepsáno Aleksandrovem a Kolmogorovem. Také je to jeho odvolání článku [K12] v souvislosti s učením Stalinova chráněnce Trofima Denisoviče Lysenka (1898–1976). Zdá se, že Kolmogorov byl jedním z mála politicky neangažovaných matematiků v Sovětském svazu, který měl přesto skutečně moc. Skrytě pomáhal talentovaným lidem i s obecně odlišnými názory. V Arnol'dově příspěvku v [And], s. 92, můžeme číst:

*„Jednou ti to všechno vysvětlím.“ říkával Andrej Nikolajevič, kdykoliv udělal něco proti svým principům. Zdá se, že byl pod tlakem nějakého ďábelského genia, jehož vliv byl obrovský (rolí těch, kteří přenášeli tento tlak, hráli známí matematici). Nedožil se doby, kdy bylo možné o těchto věcech mluvit, a jako skoro všichni lidé jeho generace, kteří žili v třicátých a čtyřicátých letech, se „oněch“ bál do konce svého života.*

Kolmogorov i Aleksandrov byli na sklonku života těžce nemocní. Aleksandrov téměř neviděl a velmi špatně slyšel a Kolmogorov, postižený Parkinsonovou chorobou, nemohl téměř mluvit. Tím byl jejich vzájemný styk téměř vyloučen. Aleksandrov zemřel v nemocnici, patrně osamocen,<sup>65</sup> Kolmogorovovi však prakticky do konce jeho pozemské pouti oddaně pomáhali jeho manželka a žáci.

Vyčerpát více různých úhlů pohledu na Kolmogorovovu matematiku a vše, co pro ni za svůj relativně dlouhý život udělal, je nemožné. Vypůjčím si (a ne jako jediný, cituji z [Va]) vyjádření z pera Kolmogorova žáka Arnol'da. V emocionálním vyznání napsal:

*Kolmogorov – Poincaré – Gauss – Euler – Newton: celkem pět takových životů nás odděluje od pramenů naší vědy. Puškin dokázal mít na mládež a ruskou literaturu tak nějak větší vliv než celé ministerstvo národního vzdělávání, bez ohledu na totálně rozdílné materiální prostředky. A takový byl Kolmogorovův vliv na matematiku.*

Shodně s Tichomirovem [Ti3] to lze říci ještě jinak: Kolmogorov *byl jedním z těch velikánů, jejichž dotyk dokáže změnit směr vědy i života, těch, kteří kladou základní kámen do obrovského díla, či těch, co sázejí výhonek, ze kterého vyroste ohromný strom.*

<sup>64</sup> Studoval na Fyzikálně-matematické fakultě univerzity v Rostově na Donu a krátce matematiku i učil na střední škole.

<sup>65</sup> Detaily se mi nepodařilo zjistit.

## LITERATURA

- [Ac] A. D. Aczel, *Umělec a matematik*, Academia, Praha, 2008, 192 stran. ISBN 978-80-200-1683-6.
- [Al1] P. S. Aleksandrov, *Sur la puissance des ensembles mesurables B*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Série Mathématique **162** (1916), s. 323–325.
- [Al2] P. S. Aleksandrov, *Pages from an Autobiography I, II*, Russian Mathematical Surveys **34** (1979), č. 6, s. 267–302, **35** (1980), č. 3, s. 315–358. ISSN 0036-0279.
- [Al3] P. S. Aleksandrov, *A Few Words on A. N. Kolmogorov*, Russian Mathematical Surveys **38** (1983), č. 4, s. 7–9. ISSN 0036-0279.
- [AH] P. Alexandroff, H. Hopf, *Topologie*, Erster Band, Springer, Berlin, 1935, xiii+638 stran.
- [And] G. E. Andrews et al., *Kolmogorov in Perspective*, History of Mathematics 20, American Mathematical Society and London Mathematical Society, Providence, RI, 2000, x+230 stran. ISBN 978-0-8218-0872-6.
- [Apo] T. A. Apostol, *Calculus, Vol. 2, 2. vydání*, John Wiley & Sons, New York–London, 1969, xxii+674 stran. ISBN 978-0-536-00008-8.
- [Ba] N. K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series. Volumes I, II*. A Pergamon Press Book, The Macmillan Co., New York, 1964, xxiii+553 stran, xix+508 stran. ISBN 978-1-4832-1076-6.
- [BN] M. Bečvářová, I. Netuka, *Jarník's Notes of the Lecture Course Punktmengen und Reelle Funktionen by P. S. Aleksandrov (Göttingen 1928)*, Matfyzpress, Praha, 2010, 144 stran. ISBN 978-80-7378-113-2.
- [BGS] N. N. Bogolyubov, B. V. Gnedenko, S. L. Sobolev, *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (On his Eightieth Birthday)*, Russian Mathematical Surveys **38** (1983), č. 4, s. 9–27. ISSN 0036-0279.
- [CD] D. E. Cameron, A. Duhoux, *P. S. Urysohn: New Aspects of his Death*, Topology Proceedings **29** (2005), s. 407–413. ISSN 0146-4124.
- [De] S. S. Demidov, *N. V. Bugaev i vznikovenije Moskovskoj školy teorii funkcij dejstvitel'nogo peremennogo*, s. 113–124, in A. P. Juškevič et al., *Istoriko-matematičeskije issledovanija*, svazek 29, Nauka, Moskva, 1985, 352 stran.
- [DL] S. S. Demidov, B. V. Lëvshin, *The Case of Academician Nikolai Nikolaevich Luzin*, History of Mathematics 43, American Mathematical Society, Providence, RI, 2016, xxxi+376 stran. ISBN 978-1-4704-2608-8.
- [DTT] S. S. Demidov, V. M. Tikhomirov, T. A. Tokareva, *The Moscow Mathematical Society and the Development of Mathematics in Russia (On the 150th Anniversary of the Society's Creation)*, Transactions of the Moscow Mathematical Society **77** (2016), s. 127–148. ISSN 0077-1554.
- [Eg1] D. F. Egorov, *Sur les suites de fonctions mesurables*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Série Mathématique **152** (1911), s. 244–246.
- [Eg2] D. F. Egorov, *Boleslav Kornelievich Mlodzeevskij (Nekrolog)*, Matematičeskij sbornik **32** (1925), s. 449–452.
- [Fo] Ch. E. Ford, *Dmitrii Egorov: Mathematics and Religion in Moscow*, The Mathematical Intelligencer **13** (1991), č. 2, s. 24–30. ISSN 0343-6993.
- [GB] V. V. Golubev, N. K. Bari, *Životopis N. N. Luzina*, Časopis pro pěstování matematiky **77** (1952), s. 383–397.

- [GrK] L. Graham, J.-M. Kantor, *Naming Infinity. A True Story of Religious Mysticism and Mathematical Creativity*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts – London, England, 2009, 239 stran. ISBN 978-0-674-03293-4.
- [GG] I. Grattan-Guinness (ed.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940*, Elsevier, Amsterdam, 2005, 1040 stran. ISBN 978-0-444-50871-3.
- [Gu] V. G. Gurzadyan, *Kolmogorov and Aleksandrov in Sevan Monastery, Armenia, 1929*, The Mathematical Intelligencer **26** (2004), č. 2, s. 40–43. ISSN 0036-6993.
- [Ha] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Company, Leipzig, 1914, viii+476 stran, druhé přepracované vydání vyšlo pod názvem *Mengenlehre*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1927, 285 stran.
- [ChK] A. Khintchine, A. Kolmogoroff, *Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden*, Matematiceskij sbornik **32** (1925), s. 668–677.
- [CLN] E. Charpentier, A. Lesne, N. K. Nikolski (eds.), *Kolmogorov's Heritage in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 2007, viii+318 stran. ISBN 978-3-540-36349-1.
- [KV] A. Karp, B. R. Vogeli (ed.), *Russian Mathematics Education. History and World Significance*, Series on Mathematics Education 4, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2010, 387 stran. ISBN 978-981-4277-05-1.
- [Kl] A. Klinkle, *Probability theory. A Comprehensive Course*, Springer-Verlag, London – Heidelberg – New York – Dordrecht, 2. vydání, 2014, xii+638 stran. ISBN 978-1-4471-5360-3.
- [Ko] A. Kolman, *Zaslepená generace: Paměti starého bolševika*, Host, Praha, 2005, 428 stran. ISBN 978-80-7294-148-3.
- [K1] A. N. Kolmogorov, *Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue*, Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques 1923, s. 83–86.
- [K2] A. N. Kolmogorov, *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*, Fundamenta Mathematicae **4** (1923), s. 324–328.
- [K3] A. N. Kolmogorov, *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Série Mathématique **183** (1926), s. 1327–1329.
- [K4] A. N. Kolmogorov, *Ob operacijach s množstvami*, Matematiceskij sbornik **35** (1928), s. 414–422.
- [K5] A. N. Kolmogorov, *Obščaja teorija mery i isčislenie verojatnostej*, Trudy kommunističeskoj akademii. Matematika **1** (1929), s. 8–21.
- [K6] A. N. Kolmogorov, *Sur la loi forte des grands nombres*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Série Mathématique **191** (1930), s. 910–912.
- [K7] A. N. Kolmogorov, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Annalen **104** (1931), s. 415–458.
- [K8] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933, ix+62 stran.
- [K9] A. N. Kolmogorov, *Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes*, Studia Mathematica **5** (1934), s. 29–33.
- [K10] A. N. Kolmogorov, *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, Annals of Mathematics **37** (1936), s. 107–110.

- [K11] A. N. Kolmogorov, *Über offene Abbildungen*, *Annals of Mathematics* **38** (1937), s. 36–38.
- [K12] A. N. Kolmogorov, *Ob odnom novom potvrđenii zakonov Mendelja*, *Doklady akademii nauk SSSR* **27** (1940), č. 1, s. 38–42.
- [K13] A. N. Kolmogorov et al., *Dmitrii Evgen'evich Men'shov (On his Ninetieth Birthday)*, *Russian Mathematical Surveys* **37** (1982), č. 5, s. 203–215. ISSN 0036-0279.
- [K14] A. N. Kolmogorov, *Memoires of P.S. Aleksandrov*, *Russian Mathematical Surveys* **41** (1986), č. 6, s. 225–246. ISSN 0036-0279.
- [K15] A. N. Kolmogorov, *Matematika – nauka i profesija*, Biblioteka „Kvant“ 64, Nauka, Moskva, 1988, 288 stran. ISBN 978-5-02-013879-7.
- [Kus] B. A. Kushner, *Kolmogorov in Reminiscences of his Pupils* (review), *The Mathematical Intelligencer* **30** (2008), č. 2, s. 60–63. ISSN 0343-6993.
- [Kt1] S. S. Kutateladze, *Roots of Luzin's Case*, *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **1** (2007), s. 261–267. ISSN 1990-4789.
- [Kt2] S. S. Kutateladze, *The Tragedy of Mathematics in Russia*, [http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/case\\_e.html](http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/case_e.html) [16.6.2020].
- [Kt3] S. S. Kutateladze, *Nauka na pereput'je*, Južnyj matematičeskij institut VNC RAN, Vladikavkaz, 2015, vi+448 stran.
- [LL] A. F. Lapko, L. A. Lyusternik, *From the History of Soviet Mathematics*, *Russian Mathematical Surveys* **22** (1982), č. 6, s. 11–138. ISSN 0036-0279.
- [Lo] G. G. Lorentz, *Mathematics and Politics in the Soviet Union from 1928 to 1953*, *Journal of Approximation Theory* **116** (2002), s. 169–223. ISSN 0021-9045.
- [LRD] O. B. Lupanov, K. A. Rybnikov, S. S. Demidov, *Razvitije matematiki v Moskovskom universitete s 1755 g. po 1932 g.*, <http://new.math.msu.su/statya> [17.5.2020].
- [Lu] N. Lusin, *Sur les propriétés des fonctions mesurables*, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Série Mathématique* **154** (1912), s. 1688–1690.
- [Lyu] L. Lyusternik, *The Early Years of the Moscow Mathematics School*, *Russian Mathematical Surveys* **22** (1967), č. 1, s. 133–157, č. 2, s. 171–211, č. 4, s. 55–91. ISSN 0036-0279.
- [McT] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *MacTutor History of Mathematics*, University of St. Andrews, Scotland, <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html> [5.5.2020].
- [Med] F. A. Medvedev, *O kurse lekcij B. K. Mlodzeevskogo po teorii funkcij dejstvitel'nogo peremennogo, pročítanyh osen'ju 1902 g. v Moskovskom universitete*, s. 130–147, in A. P. Juškevič et al., *Istoriko-matematičeskie issledovanija*, svazek 30, Nauka, Moskva, 1986, 368 stran. ISBN 978-5-8037-0383-9.
- [Mgp] M. T. Keller et al., *Mathematics Genealogy Project*, North Dakota State University, Fargo, North Dakota, <https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/> [20.8.2019].
- [Men] D. E. Men'šov, *Vospominanija o molodych godach i o vzniknovenii moskovskoj školy teorii funkcij*, s. 312–333, in A. P. Juškevič et al., *Istoriko-matematičeskie issledovanija*, svazek 27, Nauka, Moskva, 1983, 344 stran.

- [Ne1] Yu. Neretin, *Nikolay Luzin, his students, adversaries, and defenders (notes on the history of Moscow mathematics, 1914–1936)*, <https://arxiv.org/pdf/1710.10688.pdf> [21.5.2020].
- [Ne2] Yu. Neretin, *Zapiski po istorii Kolmogorovskoj reformy škol'noj matematiki* (datováno 17.10.2016), <https://mat.univie.ac.at/~neretin/misc/reform/reforma1965.html> [10.7.2020].
- [NB] E. Neuenschwander, H-W. Burmann, *Die Entwicklung der Mathematik an der Universität Göttingen*, <https://www.uni-math.gwdg.de/entwicklung.xhtml> [10.7.2019].
- [No1] P. S. Novikov, *Vospominanija ob A. N. Kolmogorove*, *Uspechi matematičeskich nauk* **43** (264) (1988), č. 6, 35–36.
- [No2] S. P. Novikov, *Moi istorii*, <http://www.mi-ras.ru/~snovikov/Mem.pdf> [20.6.2020].
- [Ph] E. R. Phillips, *Nicolai Nicolaevich Luzin and the Moscow School of the Theory of Functions*, *Historia Mathematica* **5** (1978), s. 275–305. ISSN 0315-0860.
- [Pi] A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory* *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, řada 3/A Series of Modern Surveys in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1985, x+294 stran. ISBN 978-3-642-69894-5.
- [Pl] J. von Plato, *Creating Modern Probability*, *Cambridge Studies in Probability, Induction, and Decision Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, x+324 stran. ISBN 978-0-521-59735-7.
- [Po] L. S. Pontrjagin, *Žizneopisanije L'va Semjonoviča Pontrjagina, matematika, sostavlenoje im samym*, Moskva, 1998, 377 stran. ISBN 978-5-484-00412-8.
- [Ro] D. E. Rowe, *A Richer Picture of Mathematics. The Göttingen Tradition and Beyond*, Springer International Publishing AG, 2018, xx+468 stran. ISBN 978-3-319-67818-4.
- [ShV] G. Shafer, V. Vovk, *The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe*, *Statistical Science* **21** (2006), s. 70–98. ISSN 0883-4237.
- [Sen] E. Seneta, *Mathematics, Religion, and Marxism in the Soviet Union in the 1930s*, *Historia Mathematica* **31** (2004), s. 337–367. ISSN 0315-0860.
- [Shi] A. N. Shiryaev, *Probability*, 2nd edition, *Graduate Texts in Mathematics* 95, Springer-Verlag, New York, 1996, xvi+624 stran. ISBN 978-1-4757-2539-1.
- [Sin] Y. Sinai, *Russian Mathematicians in the 20th Century*, World Scientific Publishing Co., New Jersey, 2003, xi+700 stran. ISBN 978-981-02-4390-6.
- [Sny] T. Snyder, *Bloodlands: Europe between Hitler and Stalin*, Vintage, London, 2015, 524 stran. ISBN 978-0-09-955179-9.
- [Še] J. Šedivý, *Práce A. N. Kolmogorova na přestavbě školské matematiky*, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **18** (1973), s. 146–153. ISSN 0032-2423.
- [S1] A. N. Širjaev (ed.), N. G. Chimčenko, *Kolmogorov v vospominanijach učeníkov*, *Moskovskii Tsenter Nepreryvnogo Matematicheskogo Obrazovaniya (MTsNMO Publishers)*, Moskva, 2006, 472 stran. ISBN 978-5-94057-198-8.
- [S2] A. N. Širjaev, *Andrej Nikolaevič Kolmogorov (25.IV.1903–20.X.1987): In Memoriam*, *Teorija verojatnostej i jejo primenenija* **34** (1989), s. 5–118.
- [SC1] A. N. Širjaev (red.), N. G. Chimčenko, *Istina – blago. Biobibliografija (Kolmogorov, Kniga pervaja)*, Fizmatlit, Moskva, 2003, 384 stran. ISBN 978-5-9221-0339-8.
- [SC2] A. N. Širjaev (red.), N. G. Chimčenko, *Etich strok beguščich tes'ma. Izbrannye mesta iz perepiski A. N. Kolmogorova i P. S. Aleksandrova (Kolmogorov, Kniga vtoraja)*, Fizmatlit, Moskva, 2003, 672 stran. ISBN 978-5-9221-0340-4.



- [SC3] A. N. Širjaev (red.), N. G. Chimčenko, *Zvukov srdca tichoe echo. Iz dnevníkov (Kolmogorov, Kníga tret'ja)*, Fizmatlit, Moskva, 2003, 232 stran. ISBN 978-5-9221-0341-1.
- [Št] J. Štěpán, *Teorie pravděpodobnosti. Matematické základy*, Academia, Praha, 1987, 448 stran.
- [Ti1] V. M. Tichomirov, *Slovo ob učitele*, <http://www.7iskusstv.com/2011/Nomer8/Tichomirov1.php> [24.5.2020].
- [Ti2] V. M. Tichomirov, *The life and work of Andrei Nikolaevich Kolmogorov*, Russian Mathematical Surveys **43** (1988), č. 6, s. 1–39. ISSN 0036-0279.
- [Ti3] V. M. Tichomirov, *Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987). Žižň preispolnennaja sčast'ja*, Nauka, Moskva, 2006, 200+xvi stran. ISBN 5-02-035345-0.
- [Ul] P. L. Ul'yanov, *A. N. Kolmogorov and divergent Fourier series*, Russian Mathematical Surveys **38** (1983), č. 4, s. 57–100. ISSN 0036-0279.
- [Va] V. V. Vavilov, *Aftografy A. N. Kolmogorova*, Matematika v škole 2013, č. 8, s. 69–75. ISSN 0130-9358.
- [Ve1] J. Veselý, *Jedno fourierovské výročí*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **52** (2007), s. 282–295. ISSN 0032-2423.
- [Ve2] J. Veselý, *Moskevská matematická společnost, Jegorov a Luzin*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **59** (2014), s. 319–334. ISSN 0032-2423.
- [Ve3] J. Veselý, *Russian Mathematics and its Relation to German Mathematics (1914–1940)*, in M. Bečvářová (ed.), *The Development of Mathematics Between the World Wars*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2020. ISBN 978-1-78634-930-9 (v tisku).
- [Vit] P. M. B. Vitanyi, *A Short Biography of A. N. Kolmogorov*, Centrum voor Wiskunde en Informatica Quarterly **1** (1988), s. 3–18. ISSN 0922–5366.
- [Vu1] A. Vucinich, *Mathematics in Russian Culture*, Journal of the History of Ideas **21** (1960), s. 161–179. ISSN 0022-5037.
- [Vu2] A. Vucinich, *Soviet Mathematics and Dialectics in the Stalin Era*, Historia Mathematica **27** (2000), s. 54–76. ISSN 0315-0860.
- [ZD] S. Zdravkovska, P. L. Duren (eds.), *Golden Years of Moscow Mathematics*, History of Mathematics 6, 2nd edition, American Mathematical Society and London Mathematical Society, Providence, RI, 2007, xii+306 stran. ISBN 978-0-8218-4261-4.

## Poděkování

Studie byla podpořena grantem GAČR *Dopad první světové války na utváření a proměny vědeckého života matematické komunity* s registračním číslem 18-00449S. Děkuji též kolegům za připomínky a opravy textu.

## Adresa

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc.  
 Matematický ústav UK  
 Matematicko-fyzikální fakulta UK  
 Sokolovská 83  
 186 75 Praha 8  
 e-mail: jvesely@karlin.mff.cuni.cz