25. ročník matematické olympiády

VI. Korešpondenčný seminár MO v školskolm roku 1975/76

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 25. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1975-1976. 18. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 126–134.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404676

VI. Korešpondenčný seminár MO v školskom roku 1975/76

Po dobrých skúsenostiach s korešpondenčným seminárom v školskom roku 1974/75, kedy sa konal po prvý raz, pokračovala táto forma prípravy vybraných riešiteľov MO aj v školskom roku 1975/76. Výber účastníkov seminára urobilo PÚVMO jednak na základe výsledkov celoštátneho kola XXIV. ročníka MO kategórie A a jednak na základe návrhov jednotlivých KVMO. Účastníci korešpondenčného seminára dostávali písomne na riešenie po 6 až 10 úloh postupne z 5 tématických okruhov: *číselná teória, geometria, funkcie* a *mnohočleny, kombinatorika, rovnice* a *sústavy rovníc.* Riešenia úloh každého tématického celku poslali do stanoveného termínu na adresu zostavovateľa, ktorý riešenia opravil, vyhodnotil a s prípadným komentárom vrátil reišiteľovi.

Celkom sa 2. korešpondenčného seminára zúčastnilo 43 riešiteľov, a to 9 z Bratislavy, 6 zo Severomoravského kraja, po 5 z Prahy a Východočeského kraja, po 4 zo Severočeského a Stredoslovenského kraja, po 3 zo Stredočeského, Juhomoravského a Západoslovenského kraja a 1 zo Západočeského kraja. Zastúpení medzi riešiteľmi neboli len Juhočeský a Východoslovenský kraj. Počet riešiteľov seminára klesal od témy k téme, pričom riešenia úloh z kombinatoriky zaslalo 25 riešiteľov. Medzi najúspešnejších patrili i tohto roku *Jiří Navrátil* z Olomouca, *Jan Kratochvíl* z Pardubíc, *Peter Takáč* zo Šafárikova. Pribudli k nim však aj ďalší veľmi úspešní riešitelia, z ktorých spomenieme aspoň *Miroslava Šedivého* z Jevíčka, *Martina Čadeka* z Brna, *Jana Bázlera* z Mladej Boleslavi, *Vladimíra Pastrňáka* z Vratimova a *Ladislava Miklósa* z Komárna. Nebolo iste náhodné, že z osemčlenného družstva pre XVIII. MMO v Rakúsku sa korešpondenčného seminára nezúčastňovali len 2: *Quittner* a *Kolafa.* I s prihliadnutím k výsledkom nášho družstva na XVIII. MMO (*Kratochvíl* 2. cena, *Šedivý, Navrátil* a *Takáč* 3. cena) mohlo PÚVMO hodnotiť korešpondečný seminár ako úspešný s tým, že v ďalšom roku treba usilovať o jeho skvalitnenie hľadaním lepších foriem kontaktov s riešiteľmi.

Pre informáciu uvádzame texty úloh, ktoré boli predložené riešiteľom 2. korešpondenčného seminára:

Číselná teória (zostavil *M. Kaukič*):

1. Nech a, b sú celé čísla také, že $a^2 + b^2$ je deliteľné číslom 21. Potom $a^2 + b^2$ je deliteľné tiež číslom 441. Dokážte.

2. Súčet piatich celých čísel je rovný nule. Dokážte, že súčet piatich mocnín týchto čísel je deliteľný číslom 15.

3. Nájdite všetky dvojice celých čísel x, y, ktoré vyhovujú rovnici $x^2 - y^3 = 1$.

4. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, z ktorého zámenou jeho niektorej cifry nemôžeme dostať prvočíslo. (Skúste riešiť analogickú úlohu pre dve cifry.)

5. Nájdite všetky prirodzené čísla n tej vlastnosti, že ciferný súčet čísla n^2 je rovný 4.

6. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $m^2 + n^2$, kde m, n sú prirodzené čísla. (Návod: Každé prvočíslo tvaru $4k + 1$ možno aspoň jedným spôsobom rozložiť na súčet druhých mocnín dvoch prirodzených čísel.)

7. Je dané $a_1 = 1$, $a_k = [\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}]$; určte a_{1975}. ($[c]$ znamená celú časť čísla c.)

8. Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť pozostávajúca zo všetkých prvočísel. Nech $S(k)$ je súčet všetkých súčinov pozostávajúcich z rôznych prvočísel menších najviac rovných p_k, k prirodzené číslo.

Dokážte, že v rozklade čísla $S(k) + 1$ na prvočinitele sa vyskytuje aspoň k prvočísel.

9. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že prirodzené číslo k je jej členom práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný siedmimi. Nájdite

$$\max_{1 \leq n < \infty} (a_n - a_{n-1}).$$

10. Označme na číselnej osi všetky čísla tvaru $81m + 100n$ (m, n prirodzené čísla) zelenou farbou a ostatné celé čísla červenou farbou. Nájdite na číselnej osi taký bod x, aby ľubovoľné dva celočíselné body symetrické vzhľadom na x boli zafarbené rôznou farbou.

Geometria (zostavili *prof. dr. M. Fiedler, DrSc.*, a *J. Zemánek*):

1. V priestore je daná množina bodov, ktorej pravouhlými priemetmi do dvoch rovín sú kruhy. Dokážte, že tieto kruhy majú rovnaké polomery.

2. V štvorci je daných deväť bodov, z ktorých žiadne tri

neležia v jednej priamke. Dokážte, že tri z týchto bodov sú vrcholmi trojuholníka, ktorého obsah neprevyšuje $\frac{1}{8}$ obsahu štvorca.

3. V priestore sú dané štyri polpriamky p_1, p_2, p_3, p_4 so spoločným začiatočným bodom, ktoré neležia v žiadnom polpriestore. Dokážte, že platí

$$\sphericalangle p_1p_2 + \sphericalangle p_2p_3 + \sphericalangle p_3p_4 + \sphericalangle p_4p_1 > 360^\circ .$$

4. V rovine je dané nekonečne mnoho bodov, ktorých všetky vzájomné vzdialenosti sú prirodzené čísla. Dokážte, že všetky tieto body ležia v jednej priamke.

5. V rovine sú dané dve bodové množiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, z ktorých každá má párny počet prvkov a žiadne tri z bodov $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$ neležia v jednej priamke. Dokážte, že v tejto rovine existuje priamka, ktorá neprechádza žiadnym z daných bodov a taká, že po oboch jej stranách leží práve polovica bodov každej z oboch daných množín.

6. Dokážte, že počet hrán mnohostena nemôže byť rovný siedmim.

Funkcie a mnohočleny (vybral *doc. dr. J. Moravčík, CSc.*):

1. Pre funkciu $f(x) = ax^2 + bx + c$ v intervale $\langle -1; 1\rangle$ platí: $|f(x)| \leqq 1$. Potom pre funkciu $g(x) = cx^2 + bx + a$ v tom istom intervale platí: $|g(x)| \leqq 2$. Dokážte.

2. Dokážte, že funkcia $P(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ má v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$ kladnú hodnotu.

3. Nech $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ je mnohočlen s celočíselnými koeficientami. Nech a, b, c, d sú navzájom rôzne celé čísla, pre ktoré platí: $P(a) = P(b) =$

$= P(c) = P(d) = 5$. Dokážte, že neexistuje celé číslo k tak, že $P(k) = 8$.

4. Je daný mnohočlen $P(x)$ s a) prirodzenými koeficientami, b) celými koeficientami. Označme a_n ciferný súčet čísla $P(n)$ v dekadickom zápise pre každé prirodzené číslo n. Dokážte, že existuje číslo, ktoré sa v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyskytuje nekonečne mnoho ráz.

5. Postupnosť mnohočlenov $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná rekurentne takto: $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = x$, $P_{n+1}(x) = x\,P_n(x) - P_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Dokážte, že existujú reálne čísla a, b, c tak, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$(x^2 - 4)\left[P_n^2(x) - 4\right] = \left[a\,P_{n+1}(x) + b\,P_n(x) + c\,P_{n-1}(x)\right]^2.$$

6. Dokážte, že ak funkcia $f(x) = \sin x + \cos ax$ je periodická, potom a je racionálne číslo.

7. Nájdite najmenšiu kladnú hodnotu súčtu $x + y$, ak $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$.

8. Je dané číslo $\alpha > 1$. Dokážte, že neexistuje funkcia $f(x) \not\equiv$ konšt. definovaná pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ tak, aby pre každé reálne a, b platilo $|f(a) - f(b)| \leqq |a - b|^{\alpha}$.

9. Funkcia f definovaná na intervale $\langle 0; 1\rangle$ má nasledujúce vlastnosti: Pre všetky $x \in \langle 0; 1\rangle$ je $f(x) \geqq 0$, $f(1) = 1$. Pre každé x_1, x_2 také, že $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $x_1 + x_2 \leqq 1$ platí $f(x_1 + x_2) \geqq f(x_1) + f(x_2)$.

a) Pre každé $x \in \langle 0; 1\rangle$ platí: $f(x) \leqq 2x$. Dokážte.
b) Platí pre každú funkciu f uvedených vlastností tiež $f(x) \leqq 1{,}9x$ v intervale $\langle 0; 1\rangle$?

10. Nájdite všetky spojité reálne funkcie f definované na

intervale $\langle 1; \infty)$, ktoré vyhovujú rovnici

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}$$

pre všetky $x, y \in \langle 1; \infty)$.

Kombinatorika (zostavil *dr. M. Koman, CSc.*):

1. Známa hra „námorná bitka“ sa hrá na štvorcoch zložených z $N = 10 \times 10$ jednotkových štvorčekov. Lietadlová loď je znázornená ako obdĺžnik zložený zo 4 štvorčekov (obdĺžnik 1×4). Môže byť umiestnená na ľubovoľnom mieste.

Určte najmenší počet „striel“, ktoré zabezpečia a) zasiahnutie, b) potopenie lietadlovej lode. (Predpokladáme, že na hracej ploche je len lietadlová loď.)

Doplnok. Riešte úlohu pre ľubovoľnú štvorcovú hraciu plochu zloženú z $N = k \times k$ štvorčekov $(k \geqq 4)$.

2. Určte najväčší počet kráľov, ktorých možno rozmiestniť na štvorcovej šachovnici zloženej z N^2 polí tak, aby každý kráľ susedil nanajvýš s jedným ďalším kráľom.

Doplnok. Riešte analogickú úlohu pre iné šachové figúry.

3. Usporiadajte množinu všetkých prirodzených čísel $1, 2, 3, \ldots, N$ tak, aby aritmetický priemer žiadnych dvoch čísel sa nerovnal niektorému číslu umiestnenému medzi nimi. Napríklad pre $N = 8$ je prípustné poradie 1, 5, 3, 7, 8, 4, 6, 2 a neprípustné poradie 1, 5, 8, 7, 6, 3, 2, 4 (napr. $6 = (8 + 4) : 2$).

4. Zistite, či existuje taká postupnosť P prirodzených čísel (nemusia to byť všetky prirodzené čísla), že každé prirodzené číslo sa dá vyjadriť ako rozdiel práve dvoch členov postupnosti P.

5. V štvorcovej tabuľke s n^2 poliami je zapísaných n^2 čísel (tieto čísla sú teda usporiadané do tzv. štvorcovej matice), ktorých súčet je kladné číslo. Dokážte, že stĺpce tabuľky možno permutovať tak, aby súčet čísel na uhlopriečke vedúcej z ľavého dolného rohu do pravého horného rohu bol tiež kladný.

6. V každom poli pravouholníkovej tabuľky $m \times n$ je zapísané niektoré prirodzené číslo (tj. celé kladné číslo). Sú dovolené dva druhy operácií:

a) Zdvojenie všetkých čísel niektorého riadku.

b) Odčítanie jedničky od všetkých čísel niektorého stĺpca.

Dokážte, že po konečnom počte operácií možno vždy získať tabuľku, v ktorej všetky čísla sú nuly.

7. V rovine je daných niekoľko červených a niekoľko modrých bodov. Niektoré z nich sú spojené úsečkami. Bod nazveme „labilným", ak viac než polovica bodov, s ktorými je spojený úsečkami má inú farbu než je farba uvažovaného bodu. Ak existuje aspoň jeden labilný bod, zvolíme niektorý z nich a zmeníme jeho farbu (červenú na modrú alebo obrátene). Dokážte, že po konečnom počte krokov nezostane žiadny labilný bod.

8. V rovine je daných n červených a n modrých bodov, z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Dokážte, že je vždy možno zostrojiť n úsečiek, ktoré spájajú dvojice bodov rôznych farieb a sú po dvoch disjunktné.

9. Je daný konvexný mnohouholník **M**. a) Pre každú trojicu po sebe idúcich vrcholov mnohouholníka **M** zostrojíme kružnicu prechádzajúcu týmito bodmi. Z nich vyberieme tú, ktorá má najväčší polomer. Dokážte, že mnohouholník **M** je časťou kruhu ohraničeného touto kružnicou.

b) Pre každú trojicu po sebe idúcich strán mnohouholníka **M** zostrojíme kružnicu, ktorá sa dotýka týchto troch úsečiek. Z nich vyberieme tú, ktorá má najmenší polomer. Dokážte, že celá táto kružnica je časťou mnohouholníka **M**.

10. Je daný konvexný mnohouholník, ktorého časťou nie je žiadny trojuholník s obsahom 1. Dokážte, že tento mnohouholník možno umiestniť do trojuholníka s obsahom 4.

Rovnice a sústavy rovníc (vybral *dr. J. Hojdar*):

1. Nech a, b, c sú navzájom rôzne reálne čísla. Potom rovnica

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

má vždy reálne riešenie. Dokážte.

2. Rozhodnite, pre ktoré x má zmysel rovnica

$$\log_x 10 + \log_x 100 + \log_x 1\,000 = \frac{\log_{10} x^3}{1 + \log_{10} x}$$

a nájdite všetky jej riešenia.

3. Určte všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} = x - p\,,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu vzhľadom na číslo p.

4. Riešte rovnicu

$$x^2 - 6(k-1)\,x + 9(k^2 - 2) = 0$$

s neznámou x, ak k je dané reálne číslo.

5. Sú dané rovnice

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

$$x^2 + x + p = 0,$$

kde p je dané reálne číslo. Určte všetky čísla p také, pre ktoré obe rovnice majú spoločný reálny koreň.

6. Sú dané dve kvadratické rovnice

$$x^2 + ax + b = 0,$$

$$x^2 + cx + d = 0$$

s reálnymi koeficientami. Nájdite nutné a postačujúce podmienky medzi koeficientami daných rovníc pre to, aby obe rovnice mali jeden spoločný kladný koreň a aby zostávajúci koreň prvej rovnice bol väčší než zostávajúci koreň druhej rovnice.

7. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na číslo p.

8. Je daná sústava rovníc $|1 - x| = a$, $|x - y| = b$, $|y - 1| = c$, kde a, b, c sú dané prirodzené čísla. Dokážte, že sústava má buď dve riešenia alebo je neriešiteľná. Určte podmienku riešiteľnosti.