# 26. ročník matematické olympiády

---

## VI. Texty úloh krajských kol kategorie Z

In: Jan Vyšín (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); Lev Bukovský (editor): 26. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 137–148.

**Terms of use:**
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/404689`

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

# VI. Texty úloh krajských kol kategorie Z

Krajská kola kategorie Z jsou třetími koly v této kategorii. Jejich organizace včetně výběru úloh a určení data konání je zcela v pravomoci příslušného KV MO. Ve všech slovenských krajích proběhlo toto kolo v témž termínu, přičemž úlohy byly jednotné.

V dalších odstavcích uvádíme texty úloh, které se řešily v jednotlivých krajích.

## PRAHA

**1.** V součinu všech přirozených čísel od 1001 do 3001 zjistěte, kolik je čísel dělitelných číslem 30 a mocninami čísla 30.

**2.** Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o čtvercové podstavě (hrana $a = 8$ cm) a výšce $v = 10$ cm. Na hraně $DD'$ (jejím prodloužení) určete bod $X$ tak, aby se objem jehlanu $XABCD$ rovnal polovině objemu kvádru. Vypočtěte velikost povrchu jehlanu.

Řešte obecně i numericky!

**3.** Automobilový silniční okruh měří 21 km a automobilista jej projíždí čtyřikrát průměrnou rychlostí 60 km/h. Od startu $S$ současně s ním vyjede v témže směru cyklista, který jede rychlostí 15 km/h. Určete místo a dobu, kdy dojde k 1., 2. a 3. setkání.

Na 18. km měl cyklista defekt a zdržel se opravou 2 minuty. Dále pak jel zvýšenou rychlostí a s automobilistou se setkal v místě původně očekávaného třetího setkání. Jakou zvýšenou rychlostí musel cyklista jet?

**4.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici o poloměru $\varrho$, je-li dána délka jeho střední příčky $EF = s$ a délka jeho ramene $AD = d$.

Proveďte diskusi řešení (při obecném zadání) a uvažte, kdy nedostanete lichoběžník.

Konstrukci proveďte pro konkrétní zadání: $\varrho = 2$ cm, $s = 6$ cm, $d = 5$ cm.

## STŘEDOČESKÝ KRAJ

**1.** Kniha má 1111 stran. Všechny strany jsou očíslované.

a) Kolik číslic bylo použito?

b) Kolikrát byla použita nula?

c) Kolikrát byla použita jednička?

**2.** Najděte všechna přirozená čísla dělitelná osmi, jejichž ciferný součet je sedm a součin jejich číslic je šest.

**3.** Pavel a Petr vedou pionýrské oddíly žáků osmých tříd. Rozdíl stáří Petra a Pavla činí čtyři roky. Věk jednoho i druhého je vyjádřen celým číslem. Pavlovi je právě tolik let, kolik bude Petrovi, až bude Pavlovi třikrát tolik, jako bylo Petrovi, když bylo Pavlovi dvakrát tolik, kolik bylo Petrovi, když bylo Pavlovi půlkrát tolik, kolik je nyní Petrovi. Jak staří jsou Petr a Pavel?

**4.** Ze čtverce o straně $a = 111$ cm se má vystřihnout pět stejně velkých čtverců. Jakou nejdelší stranu mohou mít?

**5.** Je dán čtvrtkruh $SBC$ s poloměrem $r = SB = SC$. Bod $A$ je takový bod oblouku $BC$, pro nějž platí, že úhel $ASB$ se rovná šedesáti stupňům. Bod $X$ je libovolný bod úsečky $SC$.

a) Vyjádřete obsah útvaru omezeného úsečkami $BX$, $AX$ a obloukem $AB$ pomocí délky $x = SX$ a poloměru $r$.

b) Zjistěte, pro kterou hodnotu $x$ je obsah tohoto útvaru roven polovině obsahu čtvrtkruhu $SBC$, a porovnejte tuto hodnotu $x$ s délkou oblouku $BC$.

## JIHOČESKÝ KRAJ

**1a)** Ze sousedních obcí $A$, $B$ vyjeli proti sobě cyklisté Bedřich (z obce $A$) a Petr (z obce $B$). Poprvé se potkali 500 m od obce $A$. Ve vesnicích se oba hned obrátili a při zpáteční cestě se potkali 300 m od obce $B$. Bedřich jel rychlostí 10 km/h.

Jakou průměrnou rychlostí jel Petr a jaká je vzdálenost obcí $A$, $B$?

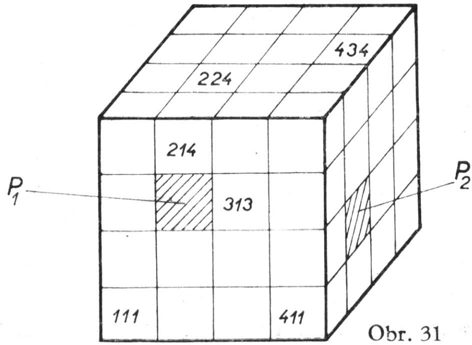
**1b)** Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25 % cínu a druhý druh 60 %. Smíšením obou druhů pájek a přidáním 2 kg čistého olova se má vyrobit 10 kg pájky obsahující 30 % cínu. Kolik kg každého druhu pájky se musí použít?

**2a)** Pionýrský oddíl „Všeználci“ má velmi schopnou vedoucí. Pro každou schůzku má připraveno nové překvapení. Dnes si přijdou na své bystré hlavy. Vedoucí Jarka přišla s tímto problémem: „Je možné pomocí právě čtyř trojek (ne víc a také ne méně) a čtyř základních početních úkonů (sčítání, odčítání, násobení, dělení) sestavit hodnoty od nuly do deseti?“ Aby všichni pochopili podstatu úlohy, přidala jedno řešení: $10 = 3 \times 3 + 3 : 3$.

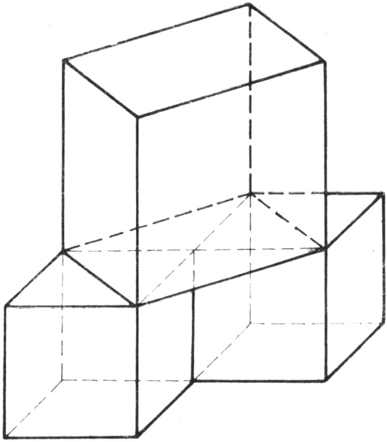
Váš úkol je nyní stejný. Zapsat hodnoty od nuly do devíti.

**2b)** Trenér družstva košíkové žákyň se po odchodu tří žaček do vyšší věkové kategorie rozhodl družstvo doplnit — omladit. Proto poslal pomocného cvičitele na výzvědy do sportovní přípravky. Po jeho návratu dostal na otázku: „Jak je to s výškou?“ (rozumějte děvčat) zajímavou odpověď: „Květa je vyšší než Irena, která je menší než Jarmila, ta je zase vyšší než Zdena, která je menší než Eva. Eva je vyšší než Jarmila. Květa je menší než Eva. Zdena je vyšší než Květa, která je menší než Jarmila. Zdena je vyšší než Irena a Irena je menší než Eva.“

1. O kolika děvčatech pomocný trenér vlastně mluvil?
2. Která tři jsou největší?



Obr. 31



Obr. 32

3. Seřaďte je všechna přesně podle velikosti od největší počínaje.

**3a)** Je dána krychle složená z 64 krychliček jednotkové velikosti. Krychličky jsou označeny trojcifernými čísly (složenými z cifer 1, 2, 3, 4), a to způsobem, který máte zjistit z obrázku (obr. 31).

a) Zkonstruujte „kanál" složený z krychliček tak, aby vycházel z pole $P_1$ a končil na poli $P_2$ a byl co nejkratší (kanál musí vést vnitřkem dané krychle). Vypište, které krychličky musíte při konstrukci „kanálu" vyjmout.

b) Vypočtěte velikost vnitřních stěn kanálu.

**3b)** Těleso na obrázku (obr. 32) je složeno ze tří krychlí.

a) Vypočtěte jeho objem.

b) Vypočtěte jeho povrch.

c) Narýsujte jeho síť.

**4a)** Je dána přímka $p$ a mimo ni bod $A$. Sestrojte kolmici z bodu $A$ na přímku $p$ pomocí pravítka (bez měřítka) a kružidla, jímž lze sestrojit kružnici pouze jednou (pak již kružidlo nefunguje).

**4b)** Je dána kružnice a mimo ni bod $C$. Z tohoto bodu jsou vedeny tečny k dané kružnici. Body dotyku označte $A$, $B$ ($AC = BC =$ 10 cm). Dále je vedena třetí tečna ke kružnici s dotykovým bodem $T$, která protíná úsečky $AC$, $BC$ v bodech $X$, $Y$.

Vypočtěte obvod trojúhelníku $XYC$.

## ZÁPADOČESKÝ KRAJ

**1.** Upravte výraz $V = a(b - 2c)^2 + b(a - 2c)^2 + 8abc - 2c(a + b)^2$ jako součin tří dvojčlenů a rozhodněte, jaký vztah platí mezi $a$, $b$, $c$, je-li $V = 0$.

**2.** Jaká musí být čísla $x$, $y$, je-li pěticiferné číslo $x321y$ dělitelné dvanácti. Najděte všechna řešení úlohy.

**3.** Je dán obdélník $ABCD$ o stranách $AB =$ 8 cm, $BC =$ 6 cm. Na úhlopříčce $AC$ určete bod $X$ (konstrukcí) tak, aby obsah trojúhelníku $XAB$ byl dvojnásobkem obsahu trojúhelníku $XBC$.

**4.** Dokažte, že v trojúhelníku, jehož strany $AB$, $BC$, $CA$ mají velikosti rovné třem po sobě následujícím přirozeným číslům větším nebo rovným třem, platí: Výška spuštěna na stranu $BC$ (prostřední velikost) dělí tuto stranu na úsečky, jejichž rozdíl má velikost rovnou 4.

## SEVEROČESKÝ KRAJ

**1.** Představte si, že napíšete všechna přirozená čísla od 1 do 5555. Kolik devítek přitom napíšete?

**2.** Je dána kružnice $k = (S; r)$ a přímka $p$ ve vzdálenosti $v = \frac{1}{2} r$ od bodu $S$. Sestrojte čtverec $ABCD$ opsaný kružnici $k$, jehož vrchol $A$ leží na přímce $p$.

**3.** Rozhodněte, který ze zlomků

$$\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}, \quad \frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$$

je větší.

**4.** Je dán čtverec $ABCD$ o straně $a = 10$ cm. Každá ze stran $BC$, $CD$ je rozdělena devíti body na deset shodných úseček. Střed $K$ strany $AB$ je spojen s dělicím bodem $X$ strany $BC$ a vrchol $B$ je spojen s dělicím bodem $Y$ strany $CD$. Které dělicí body $X$, $Y$ musíme vybrat, aby přímky $KX$, $BY$ byly navzájem kolmé?

## VÝCHODOČESKÝ KRAJ

**1.** Čtyřciferné číslo je zakončeno 2. Přesuneme-li tuto číslici na první místo a ostatní tři číslice ponecháme beze změny, dostaneme číslo, které je o 234 větší než původní číslo. Určete původní číslo.

**2.** Zuby 15zubového ozubeného kola na prvním hřídeli zapadají do zubů 36zubového ozubeného kola na druhém hřídeli. Na druhém hřídeli je ještě 16zubové ozubené kolo, jehož zuby zapadají do 50zubového ozubeného kola na třetím hřídeli. Po kolika otáčkách prvního hřídele se dostanou všechna ozubená kola poprvé znovu do původní polohy?

**3.** Je dán obecný trojúhelník $ABC$ o stranách $a$, $b$, $c$.

a) Vypočtěte poloměry kružnic, jež se vzájemně vně dotýkají a jejichž středy leží ve vrcholech $A$, $B$, $C$ trojúhelníka $ABC$. (Poloměry kružnic vyjádřete pomocí velikostí stran $a$, $b$, $c$.)

b) Sestrojte tyto kružnice pro pravoúhlý trojúhelník $ABC$, jehož odvěsny jsou $a = 6$ cm, $b = 8$ cm.

**4.** Je dán čtverec $ABCD$ o velikosti strany $a$ a čtverec $MNPQ$ o velikosti strany $b$, přičemž $a$ je větší než $b$ a vrcholy $M$, $N$, $P$, $Q$ leží na úhlopříčkách čtverce $ABCD$ ($M$, $P$ na úhlopříčce $AC$ a $N$, $Q$ na úhlopříčce $BD$).

Sestrojte čtverec $XYZT$ tak, aby jeho vrcholy ležely na obvodu čtverce $ABCD$ a aby body $M$, $N$, $P$, $Q$ ležely na obvodu čtverce $XYZT$ (hledaný čtverec $XYZT$ je čtverci $ABCD$ vepsán a čtverci $MNPQ$ opsán).

Proveďte rozbor, popis konstrukce a diskusi řešení vzhledem k velikostem stran $a$, $b$. Potom proveďte vlastní konstrukci pro $a = 10$ cm a $b = 6$ cm.

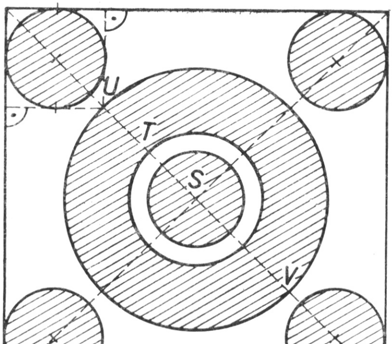
## JIHOMORAVSKÝ KRAJ

**1.** Kůň uběhl polovinu cesty bez nákladu rychlostí 12 km/h. Zbylou část cesty táhl vůz rychlostí 4 km/h. Jaká byla průměrná rychlost, tzn. jakou stálou rychlostí by se musil kůň pohybovat, aby celou cestu urazil ve stejném čase?

**2.** Přirozené číslo $x$ je dělitelné šestnácti, jeho ciferný součet v desítkové soustavě je 7, součin jeho číslic je 6. Určete všechna taková čísla $x$.

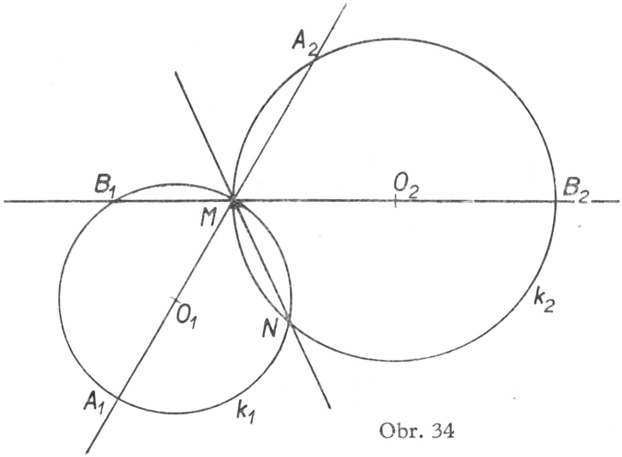
**3.** Ze čtverce materiálu o straně $a$ bylo vyřezáno 5 menších shodných kruhových podložek a jedna větší, která má tvar mezikruží (viz obr. 33; body $U$, $S$, $V$ dělí úhlopříčku čtverce na čtyři shodné části, bod $T$ je středem úsečky $US$).

Určete, zda odpad materiálu je menší než 50 %.




Obr. 33

**4.** Body $M$, $N$ jsou průsečíky dvou kružnic $k_1$, $k_2$ se středy $O_1$, $O_2$. Přímka $O_1M$ protíná kružnici $k_1$ v bodě $A_1$, kružnici $k_2$ v bodě $A_2$. Přímka $O_2M$ protíná kružnici $k_1$ v bodu $B_1$, kružnici $k_2$ v bodu $B_2$ (viz obr. 34). Dokažte, že bod $N$ leží na spojnici bodů $A_1$, $B_2$ a že přímka $MN$ prochází průsečíkem $C$ přímek $A_1B_1$ a $A_2B_2$.




Obr. 34

## SEVEROMORAVSKÝ KRAJ

**1.** Velitel čety, která měla 100 vojáků, zjistil, že mnoho vojáků onemocnělo chřipkou. Zkoušel sestavit ze zdravých vojáků ucelený útvar. Při nástupu do trojstupu mu zbyl jeden voják, do čtyřstupu dva, do pětistupu tři vojáci, do šestistupu čtyři vojáci. Kolik vojáků onemocnělo?

**2.** Jakým dvojčíslím končí číslo $3^{1977}$?

**3.** Z kůže tvaru půlkruhu o poloměru $r = 4$ cm je vystřižena kruhová záplata o poloměru 2 cm. Ze zbývajících částí kůže jsou vystřiženy dvě shodné kruhové záplaty o největším možném poloměru. Kolik procent kůže zůstalo po vystřižení všech tří záplat?

**4.** V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, $AB = 6$ cm, $CD = 4$ cm, $v = 5$ cm, střední příčka protíná úhlopříčky $AC$ a $BD$ v bodech $X$, $Y$. Určete a) velikost úsečky $XY$;

b) vzdálenost průsečíku $V$ úhlopříček $AC$, $BD$ od strany $AB$.

## KRAJE SLOVENSKÉ SOCIALISTICKÉ REPUBLIKY

**1.** Nájdite všetky dvojciferné čísla s dekadickým zápisom $ab$ tak, aby pre čísla s dekadickými zápismi $aa$, $bb$, $ab$, $ba$, $bbc$ platilo $aa + bb + ab + ba = bbc$.

**2.** a) Nájdite zlomok $\frac{p}{q}$ s celočíselným kladným menovateľom menším než 50 a s celočíselným čitateľom tak, aby

$$\frac{2}{17} < \frac{p}{q} < \frac{3}{25}.$$

b) Ukážte, že podmienkam úlohy a) vyhovuje jediný zlomok.

**3.** Daný je pravouhlý štvorsten $ABCD$ ($AD \perp BD \perp \perp CD \perp AD$; $AD = BD = CD = 2$ cm) a stred $Q$ hrany $AD$. Aké najmenšie je číslo $QX + XY$, ak $X$ leží na hrane $AB$ a $Y$ na hrane $BC$?

**4.** Daný je lichobežník $ABCD$ so základňou $AB$. Zvoľme vnútri úsečky $BC$ body $X_1$ a $X_2$ tak, aby platilo $BX_1 =$

$= X_1X_2 = X_2C = \frac{1}{3}BC$, a vnútri úsečky $AD$ body $Y_1$ a $Y_2$ tak, aby $AY_1 = Y_1Y_2 = Y_2D = \frac{1}{3}AD$.

a) Dokážte, že útvar $X_1X_2Y_2Y_1$ je lichobežník.

b) Vypočítajte obsah lichobežníka $X_1X_2Y_2Y_1$ pomocou obsahu lichobežníka $ABCD$.