30. ročník matematické olympiády

Kategória A

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); František Zítek (editor): 30. ročník matematické olympiády. Školní rok 1980-1981. 22. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983. pp. 103–140.

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

A - P - 1

V rovině je dána síť rovnostranných trojúhelníků o straně a, vytvořena třemi soustavami rovnoběžných přímek. Dokažte, že uvnitř každého čtverce, který leží v rovině sítě a má stranu větší než a, leží alespoň jeden vrchol sítě.

Riešenie: Najprv si uvedomíme dve jednoduché vlastnosti siete. Ich jednoduché dôkazy neuvádzame.

Ak X, Y sú dva rôzne vrcholy siete a ich vzdialenosť $|XY|$ je väčšia ako a, tak už platí

$$|XY| \geqq a\sqrt{3}.$$

Druhá vlastnosť je takáto. Nech Q je štvorec ležiaci v rovine siete. Ak na jednej jeho strane ležia dva rôzne vrcholy siete, potom aj v jeho vnútri leží nejaký vrchol siete. Teraz dokážeme pomocné tvrdenie: každý kruh v rovine siete o polomere $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ obsahuje vrchol siete.

Nech S je stred takého kruhu. Ak vytvoríme systém kruhov o polomere $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ so stredmi v každom vrchole siete, tak systém pokryje celú rovinu siete. Špeciálne, existuje vrchol siete X taký, že kruh nášho systému so stredom X obsahuje bod S. Vrchol X je hľadaný vrchol siete, ktorý leží v kruhu so stredom S a polomerom $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ukážeme, že ak štvorec o strane b neobsahuje vo svojom vnútri ani jeden vrchol siete, tak $b \leqq a$.

Nech $ABCD$ je štvorec o strane b, ktorý neobsahuje ani jeden vrchol siete vo svojom vnútri. Zväčšíme ho tak, aby obsahoval aspoň dva vrcholy siete na svojich stranách. Nech S je stred štvorca $ABCD$. Ak X je vrchol siete, označíme R_X priesečník polpriamky SX so stranou štvorca $ABCD$. Zrejme existuje taký vrchol siete X, že číslo $k = |SX| : |SR_X|$ je najmenšie zo všetkých takýchto čísiel. Keďže X neleží vnútri štvorca $ABCD$, tak $k \geqq 1$. Zväčšíme štvorec $ABCD$ rovnoľahlosťou so stredom S a koeficientom k na štvorce $A_1B_1C_1D_1$. Zrejme strana b_1 štvorca $A_1B_1C_1D_1$ je $b_1 = k.b \geqq b$, $A_1B_1C_1D_1$ neobsahuje vo svojom vnútri vrchol siete, ale vrchol X leží na jeho strane. Teraz rovnoľahlosťou so stredom X zväčšíme štvorec $A_1B_1C_1D_1$ na štvorec $A_2B_2C_2D_2$ taký, že vo svojom vnútri neobsahuje ani jeden vrchol siete, ale na jeho strane leží vrchol siete Y rôzny od X. Zrejme stačí uvažovať vrchol siete Y, pre ktorý je číslo $k_1 = |YX| : |XQ_Y|$ najmenšie (Q_Y je priesečník polpriamky XY so stranou štvorca) a k_1 vziať za koeficient rovnoľahlosti. Strana b_2 štvorca $A_2B_2C_2D_2$ je $b_2 = k_1b_1 \geqq b_1 \geqq b$.

Ak vrcholy siete X, Y ležia na susedných stranách štvorca $A_2B_2C_2D_2$, napr. na stranách A_2B_2, A_2D_2, tak vhodnou rovnoľahlosťou so stredom A_2 zväčšíme štvorec na štvorec $A_3B_3C_3D_3$, ktorý obsahuje vrchol siete aj na jednej zo strán B_2C_2, C_2D_2.

Máme teda štvorec $A'B'C'D'$ so stranou $b' \geqq b$, ktorý buď obsahuje dva vrcholy siete na tej istej strane alebo na nesusedných stranách a vo svojom vnútri neobsahuje vrchol siete.

Ak dva vrcholy siete ležia na tej istej strane štvorca $A'B'C'D'$, tak zrejme $b' \leqq a$ a teda aj $b \leqq a$. Ak dva vrcholy siete ležia na protiľahlých stranách a ich vzdialenosť je a, tak tiež platí $b' \leqq a$ a teda $b \leqq a$.

Zostáva nám prípad, že dva vrcholy siete X, Y ležia na protiľahlých stranách štvorca $A'B'C'D'$ a $|XY| \geqq a\sqrt{3}$. Potom uhlopriečka štvorca $A'B'C'D'$ nie je menšia ako $|XY|$, t.j.

$$b'\sqrt{2} \geqq a\sqrt{3}.$$

Teda

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} < \frac{3a}{2\sqrt{2}} \leqq \frac{b}{2}.$$

Z toho vyplýva, že kruh so stredom identickým so stredom štvorca $A'B'C'D'$ a polomerom $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ leží vnútri štvorca $A'B'C'D'$ a podľa pomocného tvrdenia obsahuje vrchol siete.

Takže posledný prípad nie je možný a v predchádzajúcich prípadoch sme ukázali, že $b \leqq a$.

A - P - 2

Nájdite všetky reálne korene rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x, \qquad (1)$$

kde p je reálny parameter.

Riešenie: Rovnicu (1) umocníme na druhú

$$x^2 - p + 4(x^2 - 1) + 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = x^2$$

a upravíme

$$4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = 4 + p - 4x^2. \qquad (2)$$

Túto rovnicu umocníme na druhú

$$16(x^4 - px^2 - x^2 + p) = 16 + p^2 + 16x^4 + 8p - 8px^2 - 32x^2$$

a upravíme

$$x^2(16 - 8p) = p^2 + 16 - 8p$$

teda

$$x^2(4 - 2p)4 = (p - 4)^2. \qquad (3)$$

Každé riešenie rovnice (1) je aj riešením rovnice (2) a každé riešenie rovnice (2) je aj riešením rovnice (3). Rovnica (3) má riešenia

$$x_1 = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$
$$x_2 = \frac{p-4}{2\sqrt{4-2p}} \tag{4}$$

za predpokladu $4 - 2p > 0$ a jediné riešenie $x = 0$ za predpokladu $p = 4$.

Zistíme, kedy riešenia rovnice (3) sú aj riešeniami rovnice (1). Každé riešenie x rovnice (2) je riešením rovnice (1) za predpokladu $x \geqq 0$, $x^2 - p \geqq 0$, $x^2 - 1 \geqq 0$. Teda rovnice (1) a (2) sú ekvivalentné za predpokladu

$$x \geqq 1, \quad x^2 \geqq p. \tag{5}$$

Ľahko vidieť, že za predpokladu $p = 4$ koreň $x = 0$ nie je koreň rovnice (1). Ak $p < 2$, tak skúsime, či korene (4) rovnice (3) vyhovujú podmienkám (5). Zrejme x_2 je vtedy záporný, teda nie je riešením rovnice (1). Pre koreň x_1 dostaneme

$$\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}} \geqq 1, \qquad \frac{(4-p)^2}{4(4-2p)} \geqq p. \tag{6}$$

Prvá z nerovníc (6) platí pre každé $p < 2$ a druhá dokonca pre každé p. Teda za predpokladu $p < 2$ každé riešenie rovnice (2) je aj riešením rovnice (1). Ešte musíme zistiť, kedy koreň x_1 je riešením rovnice (2). Zrejme je to vtedy, ak platí

$$x_1^2 \geqq p, \qquad x_1^2 \geqq 1, \qquad 4 + p - 4x_1^2 \geqq 0.$$

Prvé dve podmienky sú vlastne nerovnice (6) a platia pre každé $p < 2$. Z tretej podmienky dostávame:

$$4 + p - \frac{(p - 4)^2}{(4 - 2p)} \geqq 0$$

a po úprave (vieme, že $p < 2$)

$$-3p^2 + 4p \geqq 0,$$

t.j.

$$p(4 - 3p) \geqq 0.$$

Posledná nerovnica je ekvivalentná $0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$.

Záver: Ak $0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$, rovnica (1) má jediný koreň $x = \frac{4 - p}{2\sqrt{4 - 2p}}$. Ak $p < 0$ alebo $p > \frac{4}{3}$, rovnica (1) nemá reálny koreň.

A - P - 3

Jsou-li všechny výšky čtyřstěnu stejně velké, jsou všechny jeho stěny shodné trojúhelníky. Dokažte.

Riešenie je uvedené v brožúre Vybrané úlohy MO - A + MMO, úloha 87.

A - P - 4

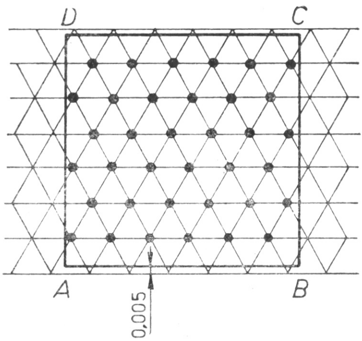
Je dán ostroúhlý trojúhelník T s obsahem P. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, který je obsažen v trojúhelníku T a má obsah větší nebo rovný $\frac{1}{3} P\sqrt{3}$.

Riešenie je uvedené v brožúrke 25. ročník MO, úloha A-II-3b.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

A - I - 1

Je daný štvorec $ABCD$ o dĺžke strany 6. Nájdite najmenšie také prirodzené číslo n, že vo vnútri štvorca $ABCD$ možno zvoliť n bodov tak, že vo vnútri každého štvorca o strane 1, ktorý celý leží v štvorci $ABCD$, sa nachádza aspoň jeden z uvažovaných bodov.



Obr. 21

Riešenie: Štvorec $ABCD$ možno rozdeliť na 36 štvorcov o strane 1, ktoré nemajú spoločné vnútorné body. Teda potrebujeme aspoň 36 bodov, aby sme vyhoveli požiadavke úlohy, t.j. $n \geqq 36$.

Ukážeme, že možno zvoliť 36 bodov s danou vlastnosťou. Vytvorme sieť rovnostranných trojuholníkov o strane 0,99 vytvorenú troma sústavami rovnobežných priamok. Umiestnime štvorec $ABCD$ do tejto siete podľa obr. 21. Pak 36 vrcholov siete, ležiacich vnútri štvorca $ABCD$, podľa úlohy A-P-1 vyhovuje požiadavke úlohy.

Záver: najmenšie prirodzené číslo požadovanej vlastnosti je číslo 36.

A - I - 2

Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí

$$\sqrt{2p + 1 - x^2} + \sqrt{3x + p + 4} = \sqrt{x^2 + 9x + 3p + 9}, \qquad (1)$$

kde p je reálny parameter.

Riešenie: Ak umocníme rovnicu (1) na druhú, dostaneme po úprave

$$2\sqrt{(2p + 1 - x^2)(3x + p + 4)} = 2x^2 + 6x + 4.$$

Túto rovnicu delíme číslom 2 a umocníme na druhú, dostaneme rovnicu

$$6px + 3x - 3x^3 + 2p^2 + p - px^2 + 8p + 4 - 4x^2 =$$
$$= x^4 + 9x^2 + 4 + 6x^3 + 4x^2 + 12x$$

a po úprave

$$x^4 + 9x^3 + (17 + p)x^2 + (9 - 6p)x - (2p^2 + 9p) = 0. \qquad (2)$$

Zrejme každé riešenie rovnice (1) je aj riešením rovnice (2). Rovnicu (2) však bezprostredne nevieme riešiť. Ak sa dívame na ľavú stranu rovnice (2) ako na kvadratický polynóm premennej p:

$$p^2(-2) + p(-9 - 6x + x^2) + (x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 9x) = 0, \qquad (3)$$

tak jeho diskriminant je

$$D = (-9 - 6x + x^2)^2 - 4.(-2)(x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 9x) =$$
$$= 9x^4 + 60x^3 + 154x^2 + 180x + 81 = (3x^2 + 10x + 9)^2.$$

Teda rovnica (3) má korene

$$p_{1,2} = \frac{9 + 6x - x^2 \pm (3x^2 + 10x + 9)}{-4},$$

po úprave

$$p_1 = -\tfrac{1}{2}(x^2 + 8x + 9), \qquad p_2 = x^2 + x.$$

Z uvedeného vyplýva, že rovnicu (2) môžeme ekvivalentne vyjadriť v tvare

$$[p + \tfrac{1}{2}(x^2 + 8x + 9)](p - x^2 - x) = 0,$$

a po úprave

$$(x^2 + 8x + 9 + 2p)(x^2 + x - p) = 0. \tag{4}$$

Rovnica (4) má korene

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{7 - 2p}, \qquad x_{3,4} = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4p}).$$

Zistíme, kedy tieto korene sú reálne korene rovnice (1).

Aby korene x_1, x_2 boli reálne, musí byť $2p \leqq 7$. Keby číslo $x = x_1$ alebo $x = x_2$ vyhovovalo rovnici (1), tak musí byť

$$x^2 + 9x + 3p + 9 \geqq 0$$
$$2p + 1 - x^2 \geqq 0.$$

Uvedené čísla však vyhovujú rovnici

$$x^2 + 8x + 9 + 2p = 0.$$

Ak od prvej nerovnice odčítame rovnicu, dostaneme

$$x + p \geqq 0.$$

Z rovnice potom vyplýva

$$(x + 3)^2 = -2x - 2p \leqq 0,$$

teda $x = -3$. Z druhej nerovnice potom dostávame $2p \geqq 8$. Teda x_1, x_2 nie sú reálne korene rovnice (1).

Vyšetríme korene x_3, x_4. Aby boli reálne, musí byť $p \geqq -\frac{1}{4}$. Pre $x = x_3, x_4$ platí $p = x^2 + x$, takže po dosadení máme

$$|x + 1| + |x + 2| = |2x + 3|. \tag{5}$$

Keďže $x_3 \geqq -\frac{1}{2}$, tak zrejme x_3 vyhovuje rovnici a teda aj rovnici (1).

Aby koreň x_4 vyhovoval rovnici (5), musí byť buď $x_4 + 1 \geqq 0$, $x_4 + 2 \geqq 0$ alebo $x_4 + 1 \leqq 0$, $x_4 + 2 \leqq 0$. Teda, buď $x_4 \geqq -1$ alebo $x_4 \leqq -2$. To platí práve vtedy, keď $p \leqq 0$ alebo $p \geqq 2$. Ešte si všimnime, že pre $p = -\frac{1}{4}$ platí $x_3 = x_4$.

Môžeme zhrnúť. Ak $p < -\frac{1}{4}$, tak rovnica (1) nemá reálne korene. Ak $p = -\frac{1}{4}$ alebo $p \in (0, 2)$, tak rovnica (1) má jediný reálny koreň $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4p})$. Pre $p \in (-\frac{1}{4}, 0\rangle \cup \langle 2, \infty)$ má rovnica (1) dva rôzne reálne korene $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4p})$.

A - I - 3

Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Množina M uzavřených intervalů má tyto vlastnosti:

1. Pro každý interval $\langle u, v\rangle \in M$ platí, že u, v jsou přirozená čísla, $1 \leqq u < v \leqq n$.

2. Pro každé dva různé intervaly $I \in M$, $I' \in M$ je $I \subset I'$ nebo $I' \subset I$ nebo $I \cap I' = \emptyset$.

Určete největší možný počet prvků množiny M.

Poznámka: Uzavřený interval $\langle u, v\rangle$ je množina všech reálných čísel r, pro které platí $u \leqq r \leqq v$.

Riešenie: Pre dané prirodzené číslo $n > 1$ označíme $f(n)$ najväčší možný počet prvkov množiny M.

Ak zvolíme $M = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \ldots, \langle 1, n\rangle\}$, tak M vyhovuje podmienkam 1. a 2. Teda $f(n) \geqq n - 1$. Ukážeme, že platí rovnosť $f(n) = n - 1$.

Pre $n = 2$ je $M \subseteq \{\langle 1, 2\rangle\}$ a teda $f(n) = 1$. Budeme pokračovať matematickou indukciou. Nech $n > 2$ a predpokladáme, že pre každé prirodzené číslo $k < n$, $k \geqq 2$ platí $f(k) = k - 1$. Nech M je množina s vlastnosťami 1. a 2., ktorá má maximálny počet prvkov. Množina M musí obsahovať interval $\langle 1, n \rangle$, totiž keby ho neobsahovala, tak by nemala maximálny počet prvkov, lebo $M \cup \{\langle 1, n \rangle\}$ tiež spĺňa podmienky 1. a 2. Označíme $M' = M - \{\langle 1, n \rangle\}$. Rozlíšime tri prípady.

a) Žiadny z intervalov $I \in M'$ neobsahuje číslo n. Potom pre M' platí podmienka 1) pre $n - 1$ a podľa indukčného predpokladu počet prvkov M' je nie väčší ako $n - 2$. Teda počet prvkov M je nie väčší ako $n - 2 + 1 = n - 1$.

b) Žiadny z intervalov $I \in M'$ neobsahuje číslo 1. Nech $M'' = \{\langle u - 1, v - 1 \rangle ; \langle u, v \rangle \in M'\}$. Potom M'' má podľa indukčného predpokladu najviac $n - 2$ prvkov. Teda M má najviac $n - 1$ prvkov.

c) Niektorý interval z M' obsahuje číslo n a niektorý interval z M' obsahuje číslo 1. Nech p je najväčšie prirodzené číslo také, že $\langle 1, p \rangle \in M'$. Nech q je zase najmenšie prirodzené číslo také, že $\langle q, n \rangle \in M'$. Označíme

$$M'' = \{I \in M'; I \subseteq \langle 1, p \rangle\},$$
$$M''' = \{I \in M'; I \subseteq \langle q, n \rangle\}.$$

Zrejme je $p < q$. Počet prvkov M' je rovný súčtu počtu prvkov M'' a M'''. Teda

$$|M| = |M'| + 1 = |M''| + |M'''| + 1.$$

Podľa indukčného predpokladu však

$$|M''| \leqq f(p) = p - 1.$$

Argumentom rovnakým ako v časti b) z indukčného predpokladu vyplýva

$$|M'''| \leqq f(n - q + 1) = n - q.$$

Teda

$$|M| \leqq (p - 1) + (n - q) + 1 \leqq n - 1.$$

A - I - 4

Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ktorého všetky vrcholy ležia na kružnici o polomere 1 a pre ktorý platí

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 > 8{,}999.$$

Riešenie: Nech ABC je rovnostranný trojuholník, ktorého vrcholy ležia na kružnici o polomere 1. Jeho strany sú potom dlhé $\sqrt{3}$ a teda

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 = 3 . 3 = 9.$$

Nech X je bod na kratšom oblúku kružnice určenom bodmi A, C. Uhol $\delta = \sphericalangle AXC$ nezávisí od polohy bodu X na tomto oblúku a je rovný $\delta = 120°$. Podľa kosínusovej vety platí

$$|CA|^2 = |AX|^2 + |XC|^2 - 2|AX| \cdot |XC| . \cos 120° = \\ = |AX|^2 + |XC|^2 + |AX| . |XC| .$$

Ak zvolíme bod $D = X$ tak, aby bolo

$$|CD| < \frac{\sqrt{3}}{3} . 0{,}001,$$

tak pre štvoruholník $ABCD$ platí

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 9 - |AD| \, . \, |CD|.$$

Ale $|AD| \leqq |AC| = \sqrt{3}$, teda

$$|AD| \, . \, |CD| < \sqrt{3} \, . \, \frac{\sqrt{3}}{3} \, . \, 0{,}001 = 0{,}001.$$

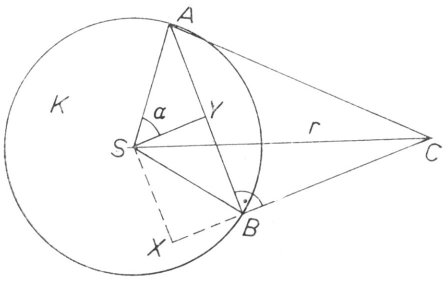
Potom

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 > 9 - 0{,}001 = 8{,}999.$$

A - I - 5

Nech K je kruh s priemerom 1. Nájdite v rovine kruhu K množinu všetkých bodov patriacich pravouhlým rovnoramenným trojuholníkom, ktorých aspoň dva vrcholy ležia v K.

Riešenie: Ľahko vidieť, že hľadaná množina M je kruh so stredom v strede kruhu K. Je potrebné určiť polomer kruhu M.



Obr. 22

Polomer kruhu M bude maximum čísiel r, kde r je vzdialenosť vrcholu C pravouhlého trojuholníka ABC takého, že vrcholy A, B ležia v kruhu K. Zrejme stačí uvažovať prípad, keď body A, B ležia na obvode kruhu K. Z obr. 22 zase vyplýva, že stačí uvažovať prípad, keď AB je odvesna pravouhlého trojuholníka. Kvôli jednoduchosti, nech AC je prepona a teda $|AB| = |BC|$.

Nech X je vrchol pri pravom uhle pravouhlého trojuholníka SCX, Y je stred úsečky AB a $\alpha = \sphericalangle ASY$. Zrejme platí

$$\begin{aligned} |SY| &= |XB| = \tfrac{1}{2}\cos\alpha\,, \\ |SX| &= |AY| = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\,, \\ |BC| &= |AB| = \sin\alpha. \end{aligned}$$

Potom podľa Pythagorovej vety dostávame

$$\begin{aligned} r^2 &= |XC|^2 + |SX|^2 = (\tfrac{1}{2}\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + \tfrac{1}{4}\sin^2\alpha = \\ &= \tfrac{1}{4}(3 - 2\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha) = \tfrac{1}{4}[3 + 2\sqrt{2}\sin(2\alpha - \tfrac{\pi}{4})]. \end{aligned}$$

Maximálna hodnota r bude pre $\alpha = \frac{3}{8}\pi$ a to

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(3 + 2\sqrt{2})} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Teda polomer kruhu M je $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

A - I - 6

Je dané prirodzené číslo n a štvorsten s vlastnosťami:

a) Veľkosti jeho strán sú prirodzené čísla rovné najviac n.

b) Obvody stien štvorstenu majú konštantnú veľkosť.

Dokážte, že pre $n \leqq 5$ steny štvorstenu tvoria rovnoramenné trojuholníky.

Platí rovnaké tvrdenie pre $n \geqq 6$?

Riešenie: Nech $ABCD$ je štvorsten s vlastnosťami a), b). Označíme dĺžky jeho hrán takto: $a_1 = |AB|$, $a_2 = |BC|$, $a_3 = |AC|$, $a_4 = |BD|$, $a_5 = |AD|$, $a_6 = |CD|$. Z podmienky b) vyplývajú rovnosti

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= c \\
a_2 + a_4 + a_6 &= c \\
a_1 + a_4 + a_5 &= c \\
a_3 + a_5 + a_6 &= c.
\end{aligned}
$$

Ak tieto rovnice sčítame, dostaneme

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_1 + a_1 = 2c.$$

Postupným odčítaním dostaneme odtiaľ

$$a_2 = a_5, \qquad a_1 = a_6, \qquad a_3 = a_4.$$

Z týchto rovníc vyplýva, že všetky strany štvorstenu sú zhodné trojuholníky. Teda stačí vyšetrovať jeden z nich, napr. ABC. Čísla a_1, a_2, a_3 sú prirodzené, nie väčšie ako 5 a musia spĺňovať trojuholníkoví nerovnosti. Máme pre ne 22 možností:

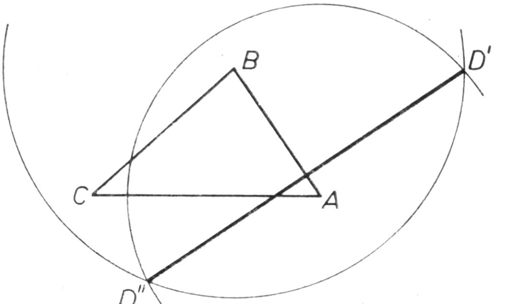
1,1,1; 1,2,2; 1,3,3; 1,4,4; 1,5,5;
2,2,2; 2,2,3; 2,3,3; 2,3,4; 2,4,4; 2,4,5; 2,5,5;
3,3,3; 3,3,4; 3,3,5; 3,4,4; 3,4,5; 3,5,5;
4,4,4; 4,4,5; 4,5,5;
5,5,5.

Všetky z nich, okrem 2,3,4; 2,4,5; 3,4,5, sú rovnoramenné trojuholníky. Ukážeme, že tieto prípady nenastanú, tj. že neexistuje štvorsten so stranami 2,3,4 (alebo 2,4,5; 3,4,5) a stenami zhodnými trojuholníkmi.

Stačí si uvedomiť, že vo všetkých troch prípadoch by bol uhol $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC \geqq 90°$. Ak označíme E stred strany AC, tak ľahko vidieť, že $|BE| = |DE| \leqq |AE| = \frac{a_3}{2}$. Keďže DEB je trojuholník, musí platiť $|BE| + |DE| > |DB| = a_3$. To však neplatí.

Tým sme dokázali, že pre $n \leqq 5$ každý štvorsten s vlastnosťami a) a b) má za steny rovnoramenné trojuholníky.

Ukážeme teraz, že existuje štvorsten, pre ktorý platí $a_1 = a_5 = 4$, $a_2 = a_6 = 5$, $a_3 = a_4 = 6$. Nech ABC je trojuholník o stranách $|AB| = 4$, $|BC| = 5$ a $|AC| = 6$. Nech bod D je spoločný bod guľových plôch o stredoch A, B, C a polomeroch 5, 6, 4. Ľahko vidieť, že body $ABCD$ tvoria



Obr. 23

štvorsten, pre ktorý platí $|AD| = |BC| = 5$, $|BD| = |AC| = 6$, $|CD| = |AB| = 4$, teda vyhovuje podmienkám a), b) pre $n = 6$ a jeho steny nie sú rovnoramenné trojuholníky.

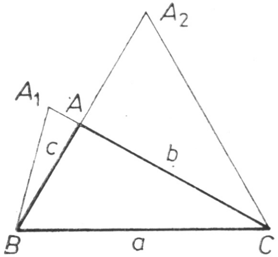
Nedokázali sme, že taký bod D existuje. Prienik guľových plôch $(A, 5)$ a $(B, 6)$ je kružnica k. Stačí ukázať, že táto kružnica pretína guľovú plochu $(D, 4)$. Priemet tejto kružnice do roviny ABC je úsečka $D'D''$, kde $|BD'| = |BD''| = 6$, $|AD'| = |AD''| = 5$ (pozri obr. 23). Stačí ukázať, že $|CD''| < 4 < |CD'|$. To sa však zistí jednoduchým výpočtom.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

Každý trojúhelník je obsažen v rovnoramenném trojúhelníku, jehož obsah je menší než tři poloviny obsahu původního trojúhelníku. Dokažte.

Riešenie: Uvažujme trojuholník ABC s obsahom P. Označíme a, b, c dĺžky jeho strán BC, AC, AB. Bez újmy na



Obr. 24

všeobecnosti môžeme predpokladať $a > b > c$. Nech A_1 je bod na polpriamke CA, pre ktorý platí $|A_1C| = a$ a A_2 je bod na polpriamke BA, pre ktorý platí $|A_2B| = |A_2C|$ (pozri obr. 24).

Označíme postupne v_a, v_a', v_a'' výšky trojuholníkov ABC, A_1BC, A_2BC na stranu BC. Z viet o podobnosti trojuholníkov vyplýva

$$\frac{v_a}{v_a'} = \frac{b}{a}, \tag{1}$$

$$\frac{v_a}{v_a''} = \frac{c}{|A_2B|}. \tag{2}$$

Obsah P_1 rovnoramenného trojuholníka A_1BC je podľa (1) teda rovný

$$P_1 = \frac{1}{2}\, a \,.\, v_a' = \frac{a}{b} \,.\, \frac{1}{2}\, a \,.\, v_a = \frac{a}{b}\, P. \tag{3}$$

V prípade $\dfrac{a}{b} < \dfrac{3}{2}$, trojuholník A_1BC je hľadaný trojuholník.

Predpokladajme teraz $\dfrac{a}{b} \geqq \dfrac{3}{2}$. Pre obsah P_2 rovnoramenného trojuholníka A_2BC podľa (2) platí

$$P_2 = \frac{1}{2} a \,.\, v_a'' = \frac{1}{2} a \,.\, \frac{|A_2B|}{c} \,.\, v_a = \frac{|A_2B|}{c} \,.\, P.$$

Ak β je veľkosť uhlu pri vrchole B, tak platí

$$\cos \beta = \frac{a}{2|A_2B|}$$

a teda

$$P_2 = \frac{a}{2c \cos \beta} P. \tag{4}$$

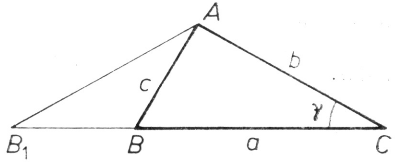
Podľa predpokladu je $b \leq \frac{2}{3} a$, teda

$$c > a - b \geq \frac{1}{3} a.$$

Potom použitím kosínusovej vety dostávame

$$\frac{a}{2c \cos \beta} = \frac{a^2}{2ac \cos \beta} = \frac{a^2}{a^2 + c^2 - b^2} < \frac{a^2}{a^2 + \frac{1}{9} a^2 - \frac{4}{9} a^2} =$$
$$= \frac{1}{\frac{6}{9}} = \frac{3}{2}.$$

Podľa vzťahu (4) v tomto prípade obsah trojuholníka A_2BC je menší ako tri polovice pôvodného trojuholníka.



Obr. 25

Iné riešenie: Použijeme označenie z predchádzajúceho riešenia. Uvažujme trojuholník B_1AC, kde B_1 je taký bod na polpriamke CB, pre ktorý platí $|B_1A| = b$. Označíme P_3 obsah rovnoramenného trojuholníka B_1AC. Ľahko vidieť, že platí (pozri obr. 25)

$$|B_1C| = 2b \cos \gamma$$

a teda

$$P_3 = \tfrac{1}{2}\,|B_1C|\,.\,v_a = \frac{2b \cos \gamma}{a}\,.\,\tfrac{1}{2}\,a\,.\,v_a = \frac{2b \cos \gamma}{a}\,P. \qquad (5)$$

Dokážeme, že platí

$$P_1 < \sqrt{2}\,.\,P$$

alebo

$$P_3 < \sqrt{2}\,.\,P.$$

To je silnejšie tvrdenie ako tvrdenie úlohy, lebo $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že $P_1 \geqq \sqrt{2}\,.\,P$, $P_3 \geqq \sqrt{2}\,.\,P$. Potom podľa (3) a (5) je

$$\frac{a}{b} \geqq \sqrt{2}, \quad \frac{2b}{a} \cos \gamma \geqq \sqrt{2}$$

a teda

$$\frac{a}{b}\,.\,\frac{2b}{a} \cos \gamma \geqq \sqrt{2}\,.\,\sqrt{2} = 2,$$

tj.

$$\cos \gamma \geqq 1.$$

To však nie je možné, lebo γ je uhol trojuholníka ABC.

Tým je tvrdenie dokázané.

A - II - 2

Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$1980x_1 + 1979x_2 + \ldots + 2x_{1979} + x_{1980} = 0, \qquad (1)$$

$$x_1 - x_{1980} = x_2 - x_{1979} = \ldots = x_{990} - x_{991} = 1981, \qquad (2)$$

$$x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \ldots = x_{989} - x_{990} = -1. \qquad (3)$$

Riešenie: Z rovníc (3) dostávame

$$x_{k+1} = x_k + 1 \text{ pre } k = 1, 2, \ldots, 989$$

a teda

$$x_k = x_1 + (k - 1) \text{ pre } k = 1, 2, \ldots, 990. \qquad (4)$$

Podľa rovníc (2) platí

$$x_k = x_{1981-k} - 1981 \text{ pre } k = 991, \ldots, 1980.$$

Použitím (4) dostaneme

$$x_k = x_1 - k - 1 \text{ pre } k = 991, \ldots, 1980. \qquad (5)$$

Ak takto získané výrazy dosadíme do rovnice (1), dostaneme

$$1980x_1 + 1979(x_1 + 1) + \ldots + 991(x_1 + 989) +$$
$$+ 990(x_1 - 992) + \ldots + 1.(x_1 - 1981) = 0.$$

Výraz na ľavej strane môžeme upraviť postupne takto:

$$\begin{aligned}
&x_1(1980 + 1979 + \ldots + 1) + \\
&+ 1.1979 + 2.1978 + \ldots + 989.991 - \\
&- 990.992 - 989.993 - \ldots - 1.1981 = \\
&= \tfrac{1}{2}x_1.1980.1981 + 1.(1979 - 1981) + \\
&+ 2(1978 - 1980) + \ldots + 989(991 - 993) - \\
&- 990.992 = x_1.990.1981 - \\
&- \tfrac{1}{2}.2.989.990 - 990.992 = \\
&= (x_1 - 1)\,990.1981.
\end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že $x_1 = 1$, lebo pravá strana rovnice (1) je nula.

Zistili sme teda, že ak čísla $x_1, \ldots, x_{1980}$ vyhovujú rovniciam (1), (2), (3), tak musí platiť

$$x_k = k \text{ pre } k = 1, 2, \ldots, 990$$

a

$$x_k = -k \text{ pre } k = 991, \ldots, 1980.$$

Skúškou ľahko zistíme, že je to skutočne jediné riešenie tejto sústavy rovníc.

A - II - 3a

Jsou dána přirozená čísla $n > 1$, k. Konečná posloupnost $I_1, I_2, \ldots, I_m$ uzavřených intervalů má tyto vlastnosti:

a) Pro každý její člen $I_j = \langle u_j, v_j \rangle$ platí, že u_j, v_j jsou přirozená čísla, $1 \leqq u_j < v_j \leqq n$.

b) Každé reálné číslo leží nejvýše v k jejích členech. Jaké hodnoty může nanejvýš nabývat číslo m?

Riešenie: Označíme s_i počet tých intervalov, ktoré majú ľavý koncový bod i. Teda

$$m = s_1 + \ldots + s_{n-1}.$$

Ak interval I má ľavý koncový bod i, tak $i + 1$ patrí do I. Teda číslo $i + 1$ patrí aj do intervalov s ľavým koncovým bodom i aj do intervalov s pravým koncovým bodom $i + 1$. Podľa podmienky b) z toho vyplýva

$$s_i + s_{i+1} \leqq k. \qquad (1)$$

Ak n je nepárne, $n = 2p + 1$, tak dostávame

$$m = (s_1 + s_2) + (s_3 + s_4) + \ldots + (s_{2p-1} + s_{2p}) \leqq pk.$$

Podobne pre n párne, $n = 2q$ z vzťahu (1) vyplýva

$$m = (s_1 + s_2) + \ldots + (s_{2q-2} + s_{2q-1}) + s_{2q} \leqq$$
$$\leqq (q - 1)k + k = qk.$$

Teda

$$m \leqq \left[\frac{n}{2}\right] k. \qquad (2)$$

Ľahko vidieť, že (2) je najlepšie ohraničenie čísla m, tj. existuje postupnosť intervalov $I_1, \ldots, I_m$ s vlastnosťami a) a b) taká, že $m = \left[\frac{n}{2}\right] k$. Stačí totiž položiť:

$$I_1 = \ldots = I_k = \langle 1, 2 \rangle,$$

$$I_{k+1} = \ldots = I_{2k} = \langle 3, 4 \rangle,$$

$$\vdots$$

$$I_{(k-1)\left[\frac{n}{2}\right]+1} = \ldots = I_{k\left[\frac{n}{2}\right]} = \left\langle 2\left[\frac{n}{2}\right] - 1, 2\left[\frac{n}{2}\right]\right\rangle.$$

Iné riešenie: Každý z intervalov $I_1, \ldots, I_m$ obsahuje párne číslo nie väčšie ako n. Párnych čísiel nie väčších ako n je $\left[\frac{n}{2}\right]$. Keďže každé smie byť najviac v k intervaloch, tak

$$m \leqq k\left[\frac{n}{2}\right].$$

Podľa riešenia *Igora Kříže,* žiaka II.D triedy gymnázia W. Piecka v Prahe 2.

A - II - 3b

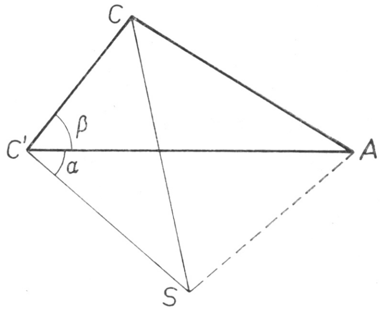
Určete množinu, kterou vyplní body všech krychlí, jejichž tělesová úhlopříčka je obsažena v dané kouli s jednotkovým poloměrem.

Riešenie: Nech S je stred gule G s polomerom 1. Označíme M hľadanú množinu.

Nech M' je množina bodov všetkých kociek K, ktorých telesová uhlopriečka t je tetivou gule G a štyri vrcholy kocky

K ležia v rovine určenej tetivou t a bodom S. Určíme množinu M' a ukážeme, že $M = M'$.

Uvažujme kocku $ABCDA'B'C'D'$ takú, že AC' je tetiva



Obr. 26

gule G a body A, A', C, C', S ležia v jednej rovine. Označíme $r = |SC|$, $\alpha = \sphericalangle SC'A$, $\beta = \sphericalangle AC'C$ (pozri obr. 26).

Jednoduchým výpočtom zistíme, že

$$|AC'| = 2 \cos \alpha, \ |C'C| = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{3}}$$

(lebo pomer $|C'C| : |CA| : |C'A|$ je $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$).

Podľa kosínusovej vety dostávame

$$r^2 = |SC'|^2 + |C'C|^2 - 2|SC'|.|C'C|.\cos(\alpha + \beta) =$$
$$= 1 + \frac{4 \cos^2 \alpha}{3} - \frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{3}} \cos(\alpha + \beta).$$

Zrejme platí $\cos \beta = \frac{|C'C|}{|AC'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Potom jednoduchou úpravou máme

$$r^2 = 1 + \frac{4 \cos^2 \alpha}{3} - \frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \alpha \right) =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 2\alpha.$$

Najväčšia hodnota r bude pre $\alpha = \frac{\pi}{4}$ a to $\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$. Ukážeme, že M' je guľa so stredom S a polomerom $\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

Ak bod X patrí do M', tak X patrí do nejakej kocky $ABCDA'B'C'D'$, a teda $|SX| \leqq |SC| \leqq \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$. Teda X patrí do gule so stredom S a polomerom $\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

Nech naopak X je bod tejto gule. Ak X patrí do gule G, tak sa ľahko zostrojí kocka, ktorej telesová uhlopriečka je priemer gule G a obsahuje bod X. Teda X patrí do M'. Ak X nepatrí do G, tak stačí zvoliť kocku $ABCDA'B'C'D'$ takú, že $SC = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$ a bod X leží na polpriamke SC. Potom X patrí do tejto kocky a teda X patrí do množiny M'.

Teraz ukážeme, že $M' = M$. Zrejme $M' \subseteq M$ - priamo podľa definícií. Nech bod X patrí do M. Ak X patrí do gule G, tak argumentom rovnakým ako vyššie možno ukázať, že bod X patrí do M'. Nech bod X nepatrí do gule G, ale patrí do kocky $ABCDA'B'C'D'$ a telesová uhlopriečka AC' patrí do gule. Rovnoľahlosťou s vhodným koeficientom a stredom na úsečke AC' zväčšíme kocku $ABCDA'B'C'D'$ tak, aby uhlopriečka AC' prešla do tetivy gule G. Dostaneme tak kocku K', ktorá obsahuje bod X. Pootočením okolo telesovej uhlopriečky, ktorá je tetivou gule G a potom okolo stredu S gule G dostaneme kocku K'', ktorá obsahuje bod X a štyri vrcholy má v rovine určenej stredom S a uhlopriečkou - tetivou. Odtiaľ vyplýva, že $X \in M'$.

Teda hľadaná množina je guľa so stredom S a polomerom $\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Najděte všechny reálné hodnoty parametru a, pro které platí:
nerovnice

$$x^4 + x^3 - 2(a + 1)x^2 - ax + a^2 < 0 \qquad (1)$$

má alespoň jedno řešení v oboru reálných čísel.

Riešenie: Ľavá strana nerovnice je kvadratický trojčlen v premennej a. Jeho diskriminant je

$$D = (-x - 2x^2)^2 - 4(x^4 + x^3 - 2x^2) =$$
$$= x^2 + 4x^4 + 4x^3 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 = 9x^2.$$

Korene trojčlenu sú $a_1 = x^2 + 2x$, $a_2 = x^2 - x$. Teda nerovnicu (1) môžeme napísať v tvare

$$(x^2 + 2x - a) . (x^2 - x - a) < 0. \qquad (2)$$

Všimnime si diskriminanty D_1, D_2 trojčlenov $x^2 + 2x - a$, $x^2 - x - a$ (v premennej x):

$$D_1 = 4 + 4a, \quad D_2 = 1 + 4a.$$

Ak $a \leqq -1$, tak $D_1 \leqq 0$, $D_2 < 0$ a pre každé x je $x^2 + 2x - a \geqq 0$, $x^2 - x - a > 0$. Teda nerovnica (2) nemá reálne riešenie.

Ak $a > 0$, stačí zvoliť $x = \sqrt{a}$. Našli sme aspoň jedno riešenie nerovnice (2).

Ak $a > -1$, $a \leqq 0$, tak $x^2 + 2x - a$ je záporné pre x z intervalu $(-1 - \sqrt{1 + a}, -1 + \sqrt{1 + a})$. Špeciálne, pre $x = -1$ je $x^2 - 2x - a < 0$. Ľahko vidieť, že $x^2 - x - a$ je kladné pre $x = -1$ a $a > -1$. Teda v tomto prípade nerovnica (2) má reálne riešenie $x = -1$.

Zistili sme, že nerovnica (1) má reálne riešenie pre $a > -1$. Pre $a \leqq -1$ reálne riešenie nemá.

A - III - 2

Nech $n \geqq 1$ je prirodzené číslo. Na priamke je daných $n^2 + 1$ uzavretých úsečiek. Potom platí aspoň jedno z nasledujúcich tvrdení:

a) Existuje medzi nimi $n + 1$ úsečiek, ktoré majú neprázdny prienik.

b) Existuje medzi nimi $n + 1$ úsečiek tak, že každé dve z nich majú prázdny prienik.

Dokážte.

Riešenie: Označíme dané úsečky $I_1, I_2, \ldots, I_{n^2+1}$. Nech A_i je ľavý a B_i pravý koncový bod úsečky I_i. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod A_i neleží vpravo od bodu A_{i+1}, tj. bod A_i buď splýva s bodom A_{i+1} alebo leží od neho vľavo.

Predpokladajme, že neplatí tvrdenie a). Teda každých $n + 1$ úsečiek má prázdny prienik. Špeciálne, prienik $n + 1$ úsečiek $I_{(k-1)n+1}, I_{(k-1)n+2}, \ldots, I_{kn}, I_{kn+1}$ je prázdny. Z toho vyplýva, že ľavý koncový bod A_{kn+1} úsečky I_{kn+1} nepatrí do niektorej z úsečiek $I_{(k-1)n+1}, \ldots, I_{kn}$. Označíme ju U_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Označíme $U_{n+1} = I_{n^2+1}$.

Ukážeme, že každé dve z úsečiek $U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}$ majú prázdny prienik. Skúmajme dve také úsečky U_i, U_j, kde $1 \leqq i < j \leqq n + 1$. Z definície úsečky U_i vyplýva, že bod A_{in+1} nepatrí do úsečky U_i. Teda pravý koncový bod úsečky U_i je vľavo od A_{in+1}. Z definície U_j však vyplýva, že ľavý koncový bod úsečky U_j je niektorý z bodov $A_{(j-1)n+1}, \ldots$ $\ldots, A_{jn}$ alebo A_{n^2+1}, ak $j = n$. Keďže $i < j$, tak $i \leqq j - 1$ a teda pravý koncový bod úsečky U_i je vľavo od ľavého koncového bodu úsečky U_j. Z toho už vyplýva, že $U_i \cap U_j = \emptyset$.

A - III - 3

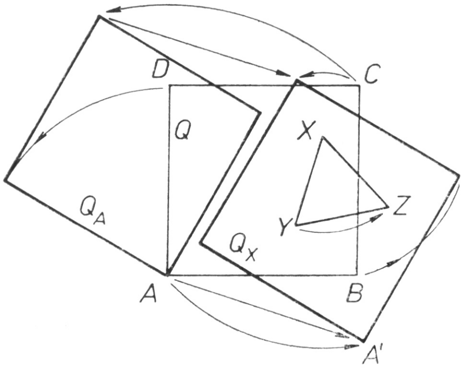
V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stranou $|AB| = 1$.

a) Určte v rovine množinu M, ktorú vyplnia tretie vrcholy všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých dva vrcholy ležia vo vnútri alebo na hranici daného štvorca $ABCD$.

b) Vypočítajte obsah množiny M.

Riešenie: Daný štvorec $ABCD$ označíme Q. Nech φ_X označuje otočenie roviny okolo stredu X o $60°$ v kladnom smere (proti smeru hodinových ručičiek) a ψ_X označuje otočenie roviny okolo stredu X o $60°$ v zápornom smere. Kvôli jednoduchosti, označíme $Q_X = \varphi_X(Q)$ obraz štvorca Q v otočení φ_X.

Ak XYZ je rovnostranný trojuholník (pozri obr. 27),



Obr. 27

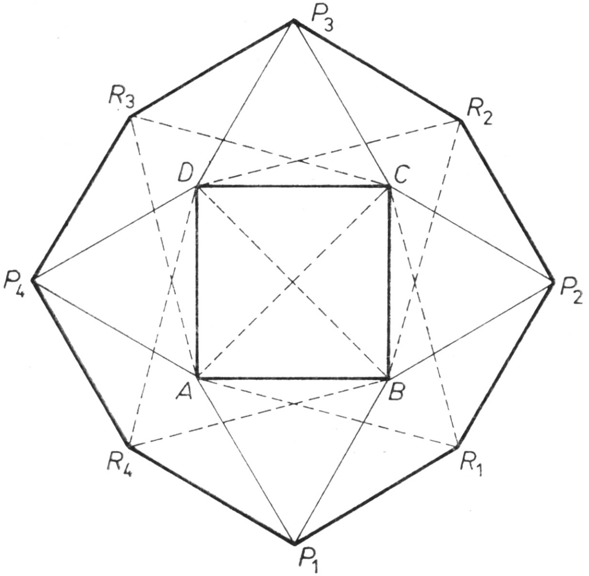
body X, Y ležia v štvorci Q, tak bod Z je obraz bodu Y pri otočení φ_X a teda $Z \in Q_X$. Z toho vyplýva, že hľadaná množina M je podmnožina zjednotení všetkých štvorcov Q_X pre $X \in Q$.

Ľahko vidieť, že štvorec Q_X vznikol zo štvorca Q_A posunutím o vektor AA', kde $A' = \varphi_X(A)$. Trojuholník $AA'X$

je rovnostranný, lebo $|AX| = |A'X|$ a $\sphericalangle A'XA = 60°$. Teda bod A' je obraz bodu X v otočení ψ_A. Označíme Q' obraz štvorca Q v otočení ψ_A. Potom bod $A' \in Q'$.

Z uvedeného vyplýva, že každý bod Z množiny M dostaneme z bodu A posunutím o vektor $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$, kde $E \in Q_A$ a $F \in Q'$. Označíme W množinu všetkých bodov Z, ktoré sú posunutím bodu A o vektor $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$, $E \in Q_A$, $F \in Q'$. Teda $M \subset W$.

Nech P_1, P_2, P_3, P_4 sú tretie vrcholy rovnostranných trojuholníkov ABP_1, BCP_2, CDP_3, DAP_4, ktoré ležia mimo



Obr. 28

štvorca Q. Označíme ďalej R_1, R_2, R_3, R_4 vrcholy rovnostranných trojuholníkov, ktorých jedna strana je uhlopriečka štvorca Q. Nech S je stred štvorca Q (pozri obr. 28).

Ukážeme, že W je podmnožina osemuholníka $P_1R_1P_2R_2P_3R_3P_4R_4$ a tento osemuholník je podmnožina hľadanej množiny M. Odtiaľ a z inklúzie $M \subseteq W$ vyplýva, že hľadaná množina M je uvedený osemuholník.

Ľahko vidieť, že $P_1 = \psi_A(B)$, $R_1 = \psi_A(C)$, $P_4 = \varphi_A(D)$, $R_3 = \varphi_A(C)$. Štvorec Q_A leží v polrovine určenej priamkou $R_3\varphi_A(B)$ obsahujúcou bod S. Ak túto polrovinu posunieme o vektor $\overrightarrow{AF}$, $F \in Q'$, tak bude podmnožinou polroviny určenej priamkou P_3R_2 obsahujúcou bod S. Teda množina W je podmnožina tejto polroviny. Štvorec Q' leží v polrovine určenej priamkou $\psi_A(D)R_1$ obsahujúcou bod S. Ak štvorec Q' posunieme o vektor $\overrightarrow{AE}$, $E = Q_A$, tak bude ležať v polrovine určenej priamkou R_2P_2 obsahujúcou bod S. Teda množina W je podmnožina tejto polroviny. Podobne by sme postupovali pre ďalšie polroviny. Odtiaľ vyplýva, že množina W je podmnožina osemuholníka $P_1R_1P_2R_2P_3R_3P_4R_4$.

Q_1, Q_3, Q_5, Q_7 budú štvorce, ktoré získame zo štvorca Q' posunutím o vektory $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{A\varphi_A(B)}$, $\overrightarrow{AR_3}$, $\overrightarrow{AP_4}$. Q_2, Q_4, Q_6, Q_8 budú štvorce, ktoré získame zo štvorca Q_A posunutím o vektory $\overrightarrow{AR_1}$, $\overrightarrow{A\psi_A(D)}$, $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AP_1}$. Zrejme zjednotenie $Q_1 \cup \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_8$ je osemuholník $P_1R_1P_2R_2P_3R_3P_4R_4$.

Ukážeme, že každé Q_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$ je podmnožina množiny M. Nech napr. bod Z patrí do množiny Q_3. Potom existuje bod $F \in Q'$ taký, že Z je posunutie bodu F o vektor $\overrightarrow{A\varphi_A(B)}$. Nech $X \in Q$ je taký bod, že $\psi_A(X) = \mathrm{F}$. Ľahko vidieť, že trojuholník XBZ je rovnostranný. Teda $Z \in M$. Pre ostatné Q_i postupujeme analogicky.

Zistili sme, že množina M je osemuholník $P_1R_1P_2R_2P_3R_3P_4R_4$.

b) Obsah množiny M je zrejme osemnásobok obsahu trojuholníka P_1R_1S. Uhol $\sphericalangle P_1SR_1$ je $45°$, pre dĺžky strán platí $|SP_1| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|SR_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}$. Teda obsah M je

$$8 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} \cdot \sin 45° = 3 + \sqrt{3}.$$

Spracované podľa riešenia *M. Engliša*, žiaka III.D triedy gymnázia W. Piecka v Prahe 2.

A - III - 4

Je dáno přirozené číslo n. Dokažte, že existuje prvočíslo p a posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ přirozených čísel tak, že všechny členy posloupnosti $p + na_1$, $p + na_2, \ldots$ jsou navzájem různá prvočísla.

Riešenie: Nech P je množina všetkých prvočísiel. Označíme P_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ množinu tých prvočísiel, ktoré pri delení číslom n dávajú zvyšok i. Potom

$$P = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{n-1}.$$

Množina P je nekonečná, teda existuje i také, že množina P_i je nekonečná, $0 \leq i < n$. Nech p je najmenší prvok množiny P_i. Potom každý prvok $x \in P_i$ je tvaru $x = p + na$ pre vhodné a. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ je očíslovanie množiny podľa veľkosti, tj. $x_n < x_{n+1}$. Stačí položit $a_i = \dfrac{x_i - p}{n}$.

A - III - 5

Je dané přirozené číslo n. Určte maximálnu hodnotu výrazu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ za predpokladu, že $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú celé nezáporné čísla vyhovujúce podmienke

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqq 7n.$$

Riešenie: Pre $n = 1$ je maximálna hodnota výrazu $x_1 = 1$. Nech $n \geqq 2$ a predpokladajme, že platí

$$x_1^3 + \ldots + x_n^3 \leqq 7n.$$

Najprv si všimneme, že niektoré z čísiel $x_1, \ldots, x_n$ musí byť menšie ako 2. Keby totiž $x_1 \geqq 2, \ldots, x_n \geqq 2$, tak

$$x_1^3 + \ldots + x_n^3 \geqq 8n > 7n.$$

Ak niektoré z čísiel $x_1, \ldots, x_n$ je väčšie ako 2, napr. $x_j > 2$, tak vytvoríme novú n-ticu. Niektoré z čísiel $x_1, \ldots, x_n$ musí byť menšie ako 2, napr. $x_i < 2$. Položíme

$$y_i = x_i + 1, y_j = x_j - 1, y_k = x_k \text{ pre } k \neq i, j.$$

Potom

$$y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_n$$

a

$$y_i^3 + y_j^3 = x_i^3 + x_j^3 + 3(x_i(x_i + 1) - x_j(x_j - 1)) <$$
$$< x_i^3 + x_j^3.$$

Teda

$$y_1^3 + \ldots + y_n^3 < 7n.$$

Z uvedeného vyplýva, že môžeme predpokladať toto: ak $x_1 + \ldots + x_n$ je maximálny, tak všetky čísla $x_1, \ldots, x_n$ sú menšie alebo rovné 2.

Keby všetky x_i boli ostro menšie ako 2, tak $(x_1 + 1)^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqq 2^3 + 1 + \ldots + 1 = 8 + (n - 1) < 7n$. Teda výraz $x_1 + \ldots + x_n$ nie je maximálny. Z toho vyplýva, že aspoň jedno z čísiel $x_1, \ldots, x_n$ je rovné 2.

Keby niektoré z čísiel $x_1, \ldots, x_n$ bolo rovné 0, napr. $x_i = 0$, niektoré rovné 2, napr. $x_j = 2$, tak

$$(x_i + 1)^3 + (x_j - 1)^3 = 1^3 + (x_j - 1)^3 < x_i^3 + x_j^3.$$

Môžeme zhrnúť: ak $x_1, \ldots, x_n$ sú také čísla, že výraz $x_1 + \ldots + x_n$ je maximálny, tak môžeme predpokladať $1 \leqq x_i \leqq 2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Je potrebné určiť, koľko čísiel z n-tice $x_1, \ldots, x_n$ môže byť rovné 2. Nech $x_1 = \ldots = x_k = 2$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$. Potom

$$k.3^3 + (n-k).1 \leqq 7n.$$

Teda

$$k \leqq \frac{6n}{7}.$$

Maximálna hodnota výrazu $x_1 + \ldots + x_n$ za uvedených podmienok je

$$2.\left[\frac{6n}{7}\right] + 1.\left(n - \left[\frac{6n}{7}\right]\right) = n + \left[\frac{6n}{7}\right].$$

A - III - 6

Vo vnútri gule s objemom V je daných 11 rôznych bodov. Potom existujú roviny ϱ, σ, ktoré obe obsahujú stred gule a určujú výseč s objemom $\frac{1}{8}$ V, ktorá neobsahuje vo svojom vnútri žiadny z daných 11 bodov. Dokážte.

Riešenie: Nech ϱ_1 je rovina obsahujúca stred gule a aspoň dva body danej množiny. Rozdelí guľu na dve pologule. Vnútri jednej z nich sú najviac 4 body. Nech rovina ϱ_2 obsahuje stred gule, je kolmá na rovinu ϱ_1 a obsahuje aspoň jeden z týchto štyroch bodov. Roviny ϱ_1, ϱ_2 vytnú štvrť gule, ktorá obsahuje vnútri najviac jeden bod. Nech rovina ϱ_3 je kolmá na ϱ_1, ϱ_2 a obsahuje stred gule. Rovina ϱ_3 rozdelí uvedenú štvrť gule na dve rovnaké časti o objeme $\frac{1}{8}$ V. Jedna z týchto častí neobsahuje žiaden z daných bodov vnútri.

Iné riešenie: Zrejme stačí nájsť výseč gule o objeme aspoň $\frac{1}{8}$ V, ktorá v svojom vnútri neobsahuje žiadny z daných bodov.

Nech π_1 je rovina obsahujúca stred gule a aspoň dva z daných bodov. Rozdelí guľu na dve pologule, z ktorých jedna obsahuje najviac 4 body. Dvoma z nich veďme rovinu π_2 obsahujúcu stred gule. Nech π_3, π_4 sú roviny, ktoré obsahujú zostávajúce dva body a priesečnicu rovín π_1 a π_2. Roviny π_2, π_3, π_4 rozdelia pologuľu na štyri výseče, ktoré neobsahujú vo svojom vnútri žiadny z daných bodov. Podľa Dirichletovho princípu aspoň jedna z týchto výsečí má objem väčší alebo rovný $\frac{1}{8}$ V.