33. ročník matematické olympiády

Kategorie A

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Beloslav Riečan (editor); Karol Križalkovič (editor): 33. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1983-84. 25. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. pp. 90–123.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/404786`

Kategorie A

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

A - I - 1

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, vyhovuje pro všechna přirozená čísla n rekurentnímu vztahu

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 9a_{n+1} + 9a_n . \tag{1}$$

Jestliže kromě toho pro každé přirozené číslo n platí

$$|a_n| \leqq 2^n , \tag{2}$$

pak tato posloupnost také vyhovuje rekurentnímu vztahu

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n \tag{3}$$

pro každé přirozené n. Dokažte.

Řešení. Označme $b_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + 3a_n$, pak je podle rekurentního vztahu (1)

$$b_{n+1} = 5a_{n+2} - 9a_{n+1} + 9a_n - 2a_{n+2} + 3a_{n+1} =$$

$$= 3(a_{n+2} - 2a_{n+1} + 3a_n) = 3b_n ,$$

takže

$$b_n = 3^{n-1}\, b_1\,.$$

Protože podle předpokladu (2) je

$$|b_n| \leqq |a_{n+2}| + 2|a_{n+1}| + 3|a_n| \leqq 2^{n+2} + 2\,.\,2^{n+1} + 3\,.\,2^n =$$

$$= 11\,.\,2^n\,,$$

platí pro každé přirozené n

$$3^{n-1}|b_1| \leqq 11\,.\,2^n, \quad \text{tj. } |b_1| \leqq 33\,.\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Proto je $b_1 = 0$, tedy $b_n = 3^{n-1}b_1 = 0$ pro každé n, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Obecné řešení rekurentního vztahu (1) najdeme řešením příslušné charakteristické rovnice

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 9 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,\,3} = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$. Každá posloupnost vyhovující rekurentnímu vztahu (1) pak má tvar

$$a_n = A\,.\,\lambda^n + B\,.\,\mathrm{Re}(\lambda_2^n) + C\,.\,\mathrm{Im}(\lambda_2^n), \tag{4}$$

kde A, B, C jsou libovolné konstanty (viz např. *A. Prágerová:* Diferenční rovnice. SNTL 1971). Z podmínky (2) pro posloupnost $\{a_n\}$ ovšem plyne, že ve vyjádření (4) musí být $A = 0$, jinými slovy, takové posloupnosti $\{a_n\}$ splňují rekurentní vztah (3) s charakteristickou rovnicí $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$.

A - I - 2

Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí

a) $\sin \pi x = \cos (\pi/x)$;

b) $\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{cotg} (\pi/x)$.

Řešení. a) Zřejmě musí být $x \neq 0$. Protože $\cos y = \sin \left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí $\sin \pi x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x}\right)$. Odtud plyne, že je buď

$$\pi x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} + 2k\pi$$

pro nějaké celé číslo k, nebo

$$\pi x = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{x} + 2k\pi$$

pro nějaké celé k.

V prvním případě dostaneme kvadratickou rovnici

$$2x^2 - (4k + 1)x + 2 = 0$$

s kořeny

$$x(k)_{1,2} = \frac{1}{4} (4k + 1 \pm \sqrt{(4k + 1)^2 - 16}).$$

Reálné kořeny dostáváme pro všechna celá $k \notin \{0, -1\}$, přitom žádný z kořenů není roven nule. V druhém případě dostaneme kvadratickou rovnici

$$2x^2 - (4k + 1)x - 2 = 0$$

s kořeny

$$x'(k)_{1,2} = \frac{1}{4}\left(4k + 1 \pm \sqrt{(4k + 1)^2 + 16}\right),$$

které jsou reálné a nenulové pro všechna celá k.

Řešením první rovnice jsou čísla $x(k)_{1,2}$ pro všechna celá $k \notin \{0, -1\}$ a čísla $x'(k)_{1,2}$ pro všechna celá k.

b) Zřejmě musí být $x \neq 0$, $\pi x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $\frac{\pi}{x} \neq n\pi$, kde m, n jsou celá čísla. Protože $\operatorname{cotg} y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí $\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x}\right)$. Odtud plyne, že je

$$\pi x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} + k\pi,$$

kde k je celé. Dostáváme tak kvadratickou rovnici

$$2x^2 - (2k + 1)x + 2 = 0,$$

která má kořeny tvaru

$$x(k)_{1,2} = \frac{1}{4}\left(2k + 1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}\right).$$

Ty jsou zřejmě reálné a nenulové pro všechna celá $k \notin \{-2, -1, 0, 1\}$. Vyšetříme nyní, pro jaká k jsou tyto kořeny tvaru $\frac{1}{2} + m$ nebo $\frac{1}{n}$ pro celá m, n.

Nechť $x(k)_{1,2} = \frac{1}{2} + m$, pak po úpravě dostaneme

$$2k + 1 = \frac{4m^2 + 4m + 5}{2m + 1} = 2m + 1 + \frac{4}{2m + 1}.$$

Kořen $x(k)$ může tedy být uvedeného tvaru jen pro $m = 0$ nebo $m = -1$, tj. pro $k \in \{-3, 2\}$. Výpočtem zjistíme, že pouze kořeny $x(2)_2 = \frac{1}{2}$, $x(-3)_1 = -\frac{1}{2}$ mají tvar $\frac{1}{2} + m$.

Nechť $x(k)_{1,2} = \frac{1}{n}$, $n \neq 0$ celé, pak po úpravě dostaneme

$$2k + 1 = 2n + \frac{2}{n}.$$

To je liché celé číslo jen pro $n = \pm 2$, pak je však $k \in \{-3, 2\}$ stejně jako v předchozím případě.

Tuto poslední část jsme už vlastně mohli vynechat. Všechny kořeny $x(k)_{1,2}$ jsou vlastně ta čísla x, pro která je

$x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$ celé číslo. Pro ně však je $\frac{1}{x}$ celé číslo, právě když $x + \frac{1}{2}$ je celé číslo, tj. právě když je x tvaru $\frac{1}{2} + m$ pro m celé.

Řešením druhé rovnice jsou čísla $x(k)_{1,2}$ pro všechna celá $k \notin \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ a čísla $-2, 2$.

A - I - 3

Nechť $n > 1$ je dané přirozené číslo. Najděte všechna přirozená m, pro něž je číslo $\log_n m$ iracionální.

Řešení. Nejprve najdeme všechna přirozená čísla m, pro která je $\log_n m$ racionální. Budiž tedy $\log_n m = \frac{p}{q}$, kde p a q jsou celá nesoudělná čísla, $p \geqq 0$, $q > 0$. Pak je

$$m = n^{\frac{p}{q}}, \text{ neboli } m^q = n^p.$$

Odtud je patrné, že každé prvočíslo, které dělí číslo m, musí také dělit číslo n.

Je-li

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} \tag{1}$$

rozklad čísla n na prvočinitele, v němž jsou p_i navzájem různá (kladná) prvočísla, má číslo m rozklad tvaru

$$m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}$$

a platí $qb_i = pa_i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Protože p a q jsou nesoudělná, dělí q každé a_i, takže dělí i jejich největší společný dělitel d, $d = qd'$. Označme $a_i' = \frac{a_i}{d}$, pak je $qb_i = pa_i = pda_i' = pqd'a_i'$, tedy $b_i = pd'a_i'$ a $m = (\sqrt[d]{n})^{pd'}$.

Ukázali jsme tedy, že je-li $\log_n m$ racionální, pak $m = (\sqrt[d]{n})^k$, kde $k \geqq 0$ je celé číslo. Naopak pro každé m tvaru $m = (\sqrt[d]{n})^k$ pro $k \geqq 0$ je $m^d = n^k$, $m = n^{\frac{k}{d}}$, a tedy $\log_n m$ je racionální.

Číslo $\log_n m$ je iracionální pro všechna přirozená čísla m, která nejsou nezápornou celou mocninou přirozeného čísla $\sqrt[d]{n}$, kde d je největší společný dělitel exponentů v rozkladu (1).

A - I - 4

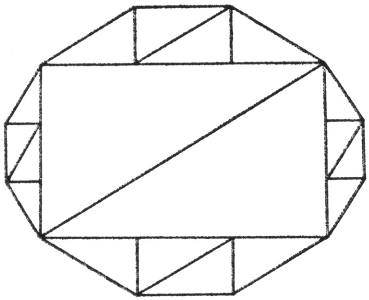
Určete největší přirozené číslo n s touto vlastností: Existuje konvexní n-úhelník, který lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu vzájemně se nepřekrývajících pravoúhlých trojúhelníků s ostrými úhly 30° a 60°.

Řešení. Nechť $A_1A_2\ldots A_n$ je konvexní n-úhelník s uvedenou vlastností. Každý z jeho vnitřních úhlů je sjednocením konečného počtu nepřekrývajících se úhlů velikosti 30°, 60° nebo 90°. To znamená, že velikost každého vnitřního úhlu mnohoúhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ je celočíselným násobkem 30° a není tedy větší než 150°. Protože součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku je $(n - 2).180°$, dostáváme nerovnici

$$(n-2).180 \leqq 150n$$

s řešením $n \leqq 12$.

Pro $n = 12$ skutečně existuje dvanáctiúhelník, který lze vyjádřit jako konečné sjednocení nepřekrývajících se pravoúhlých trojúhelníků s úhly 30° a 60° (obr. 17).



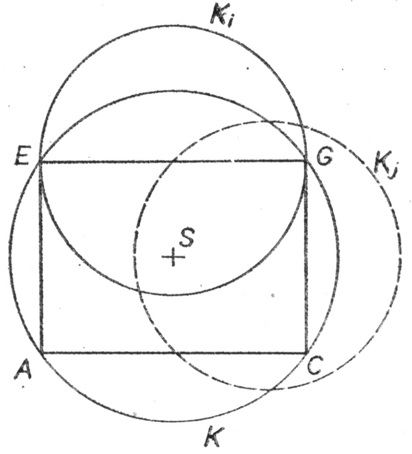
Obr. 17

A - I - 5

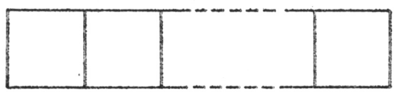
V kouli o poloměru 1 je dáno 73 různých bodů. Dokažte, že z těchto bodů lze vybrat 13 navzájem různých, které leží uvnitř nějaké koule s poloměrem $\frac{5}{6}$.

Řešení. K důkazu uvedeného tvrzení stačí najít 6 koulí s poloměrem nejvýše $\frac{5}{6}$ takových, že sjednocení jejich vnitřků obsahuje danou jednotkovou kouli. Pak bude úloha vyřešena, neboť alespoň jedna z nalezených koulí musí ve svém vnitřku obsahovat 13 nebo více ze zvolených bodů. Jinak by totiž uvnitř každé ze zmíněných šesti koulí leželo nejvýše 12 daných bodů, takže ve sjednocení jejich vnitřků by leželo nejvýše $6 . 12 = 72$ zvolených bodů a toto sjednocení by pak nemohlo obsahovat celou jednotkovou kouli.

Dokážeme nyní existenci uvedených šesti koulí. Do dané koule K o poloměru 1 vepišme nejprve krychli $Q = ABCD\,EFGH$. Roviny stěn krychle Q protnou povrch koule K v šesti kružnicích, každá z těchto kružnic je hlavní kružnicí jisté koule K_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, jejímž středem je střed příslušné stěny krychle. Určíme poloměr těchto koulí. Má-li krychle Q hranu velikosti a, pak její tělesová úhlopříčka měří $a\sqrt{3} = 2$, odkud $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Každá z koulí K_i má tedy poloměr $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{5}{6}$. Zbývá ukázat, že sjednocení všech šesti koulí K_i obsahuje kouli K. Čtyři tělesové úhlopříčky krychle Q, které se protínají ve středu S koule K, rozkládají krychli Q na šest čtyřbokých jehlanů, jejichž podstavy tvoří stěny krychle Q a jejichž společným vrcholem je střed S. Protože střed S krychle Q zřejmě leží v průniku všech šesti koulí K_i, každý z těchto jehlanů leží v jedné z uvedených koulí, takže krychle Q leží celá ve sjednocení koulí K_i, $i \in \{1, \ldots, 6\}$. Roviny proložené stěnami krychle Q oddělují z koule K ještě šest kulových úsečí. Také každá z těchto úsečí leží v některé kouli K_i, jak snadno zjistíme, provedeme-li řez koule K např. rovinou $ACGE$ (obr. 18). Leží tedy celá koule K ve sjednocení koulí K_i a aspoň jedna z nich obsahuje nejméně 13 zadaných bodů. Tím spíše je obsahuje příslušná koule s ní soustředná s větším poloměrem $\frac{5}{6}$.



Obr. 18



Obr. 19

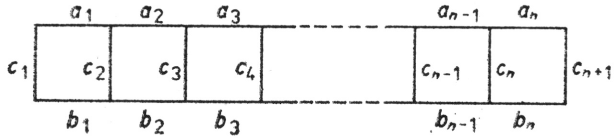
A - I - 6

Na obr. 19 je znázorněn »žebřík« skládající se z n navzájem shodných čtverců, kde n je dané přirozené číslo. Stranou žebříku budeme rozumět stranu libovolného z uvažovaných čtverců. Některé ze stran žebříku obarvíme červeně. Symbolem P_n označme počet všech takových obarvení žebříku, při nichž má každý ze čtverců alespoň jednu stranu červenou.

a) Určete nejmenší přirozené číslo n, pro které platí $P_n > 10^6$.

b) Dokažte, že pro všechna přirozená n je P_n liché číslo.

Řešení. Strany žebříku označme symboly $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2 \ldots$ podle obr. 20. Určíme nejprve P_1 a P_2.



Obr. 20

P_1 je zřejmě počet všech neprázdných podmnožin čtyřprvkové množiny, je tedy $P_1 = 2^4 - 1 = 15$. Pro $n = 2$ rozdělme všechna obarvení na dvě části. Těch, u nichž je c_2 obarvena, je $2^6 = 64$. Těch, u nichž c_2 není obarvena, je $(2^3 - 1)^2 = 49$. Celkem je tedy $P_2 = 64 + 49 = 113$.

Pro $n > 2$ odvodíme rekurentní vzorec. Všechna možná obarvení opět rozdělíme na dvě části. Takových obarvení, že je obarvena alespoň jedna ze stran a_n, b_n, c_{n+1}, existuje $(2^3 - 1)\,P_{n-1} = 7P_{n-1}$. Pokud strany a_n, b_n, c_{n+1} nejsou obarveny, musí být obarvena strana c_n a ke každému ze čtyř obarvení stran a_{n-1}, b_{n-1} existuje P_{n-2} obarvení zbylých stran žebříku. Celkem je tedy pro $n > 2$

$$P_n = 7P_{n-1} + 4P_{n-2},$$

což je hledaný rekurentní vzorec. Z tohoto vzorce plyne okamžitě matematickou indukcí, že P_n jsou lichá, neboť P_1 a P_2 jsou lichá čísla. Tím je vyřešena úloha b). Z rekurentního vzorce dále plyne, že $P_3 = 7P_2 + 4P_1 = 791 + 60 = 851$. Postupně pak dostáváme $P_7 > 7P_6 > 7^2P_5 > 7^3P_4 > 7^4P_3 > 40^2.800 > 10^6$. Na druhé straně, přičteme-li k oběma stranám rekurentního vzorce P_{n-1}, dostaneme

$$P_n + P_{n-1} < 8(P_{n-1} + P_{n-2}),$$

takže

$$P_6 + P_5 < 8(P_5 + P_4) < 8^2(P_4 + P_3) < 8^3(P_3 + P_2) = \\ = 512.964 < 10^6.$$

Protože $P_7 > 10^6$ a $P_6 < 10^6$, je hledané číslo $n = 7$. Tím je vyřešena úloha a).

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

A - S - 1

Je dáno přirozené číslo n. Určete $2n + 1$ za sebou jdoucích přirozených čísel, pro která platí: součet druhých mocnin prvních $n + 1$ čísel se rovná součtu druhých mocnin posledních n čísel.

Řešení. Označíme-li x první z hledaných $2n + 1$ čísel, má platit rovnost

$$x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = (x+n+1)^2 + \\ + \ldots + (x+n+n)^2$$

neboli

$$(n+1)x^2 + 2x(1+2+\ldots+n) +$$

$$+ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 =$$

$$= n(x+n)^2 + 2(x+n)(1+2+\ldots+n) +$$

$$+ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Protože $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, dostáváme odtud pro x kvadratickou rovnici

$$x^2 - 2n^2x - 2n^3 - n^2 = 0,$$

která má dva kořeny

$$x_{1,2} = n^2 \pm \sqrt{n^4 + 2n^3 + n^2} = n^2 \pm n(n+1),$$

z nichž pouze jeden je kladný. Je tedy $x = 2n^2 + n$ a řešením úlohy jsou čísla $2n^2 + n$, $2n^2 + n + 1$, ..., $2n^2 + 3n$.

A - S - 2

Je-li $\cos \alpha$ racionální číslo, pak je také $\cos 7\alpha$ racionální číslo. Dokažte.

Řešení. Podle součtových vzorců je

$$\cos 7\alpha = \cos 4\alpha \cos 3\alpha - \sin 4\alpha \sin 3\alpha =$$
$$= (1 - 2\sin^2 2\alpha)(\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha) -$$
$$- 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha(\sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha) =$$
$$= (1 - 8\sin^2\alpha \cos^2\alpha)[(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cos \alpha -$$
$$- 2\sin^2\alpha \cos \alpha] - 4\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot$$
$$\cdot [2\sin \alpha \cos^2\alpha + \sin \alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)] =$$
$$= (1 - 8\sin^2\alpha \cos^2\alpha)[(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cos \alpha -$$
$$- 2\sin^2\alpha \cos \alpha] - 4\sin^2\alpha \cos \alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot$$
$$\cdot (3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Protože $\cos \alpha$ je číslo racionální, jsou racionální i čísla $\cos^2\alpha$ a $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ a podle předcházejícího výpočtu je racionální i číslo $\cos 7\alpha$.

Jiné řešení. Podle Moivreovy věty je

$$\cos 7\alpha + i \sin 7\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^7,$$

takže stačí určit z Pascalova trojúhelníku binomické koeficienty $\binom{7}{k}$ pro lichá k, abychom dostali podle binomické věty vztah

$$\cos 7\alpha = \mathrm{Re}\,(\cos \alpha + i \sin \alpha)^7 =$$
$$= \cos^7\alpha - 21\cos^5\alpha \sin^2\alpha +$$
$$+ 35 \cos^3\alpha \sin^4\alpha - 7\cos\alpha \sin^6\alpha.$$

Protože $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ a $\cos \alpha$ je racionální, plyne odtud racionalita čísla $\cos 7\alpha$.

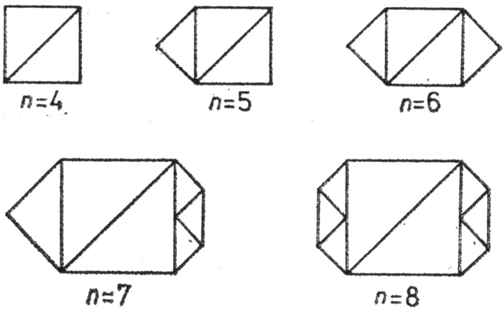
A - S - 3a

Určete všechna přirozená čísla $n > 3$ s touto vlastností: Existuje konvexní n-úhelník, který je sjednocením konečného počtu vzájemně se nepřekrývajících rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků.

Řešení. Má-li n-úhelník požadovanou vlastnost, je každý z jeho vnitřních úhlů sjednocením konečně mnoha nepřekrývajících se úhlů velikosti 45° nebo 90°. Je tedy velikost každého vnitřního úhlu takového mnohoúhelníku nejvýše 135°. Protože součet vnitřních úhlů n-úhelníku je $(n - 2)$. .180°, dostáváme pro n nerovnici

$$(n - 2).180 \leqq 135\, n,$$

které vyhovuje $n \leqq 8$. Pro každé $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ existuje n-úhelník s požadovanou vlastností (obr. 21).

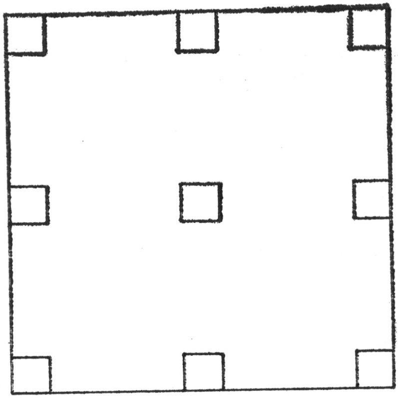


Obr. 21

A - S - 3b

Rozhodněte, zda platí tvrzení: Je-li ve čtverci C o straně velikosti 1 dáno 999 různých bodů, pak existuje čtverec, který obsahuje 112 z daných bodů, přičemž jeho strany jsou rovnoběžné se stranou čtverce C a mají velikost 0,4.

Řešení. Tvrzení neplatí - uvedeme protipříklad. V rozích čtverce C, v jeho středu a při středech jeho stran zvolíme malé čtverce o straně 0,04, celkem tedy 9 čtverců (obr. 22).



Obr. 22

V každém z nich zvolme 111 různých bodů. Mezi dvěma sousedními čtverečky je vždy vzdálenost 0,44. Proto každý čtverec o straně 0,4, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami čtverce C, může mít společné body nejvýše s jedním z devíti zvolených čtverečků, a proto může obsahovat nejvýše 111 ze zvolených 999 bodů.

A - II - 1

Nechť $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Dokažte, že tg α je racionální číslo, právě když pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí: je-li tg $n\alpha$ definovaný, pak je tg $n\alpha$ racionální číslo.

Řešení. Nejprve dokážeme tuto implikaci: je-li tg α racionální, pak pro každé přirozené n platí, že buď není tg $n\alpha$ definovaný, nebo je tg $n\alpha$ racionální. Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$. Předpokládejme, že platí pro $n = m$, a dokážeme je pro $n = m + 1$. Pokud není tg $m\alpha$ definovaný, tak je

$m\alpha = (2k + 1) \dfrac{\pi}{2}$ pro nějaké celé číslo k, takže

$$\operatorname{tg}(m + 1)\,\alpha = \operatorname{tg}\left(\alpha + (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

je číslo racionální. Je-li naopak tg $m\alpha$ racionální, je buď $\operatorname{tg} m\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, což znamená, že je $\cos\,(m + 1)\,\alpha = 0$ a tg $(m + 1)\alpha$ není definovaný, nebo

$$\operatorname{tg}(m + 1)\,\alpha = \frac{\operatorname{tg} m\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} m\alpha \operatorname{tg}\alpha}$$

je číslo racionální. Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Předpokládejme nyní obráceně, že pro každé přirozené $n > 1$ je $\mathrm{tg}\, n\alpha$ racionální nebo není definovaný. Tento předpoklad stačí použít pro $n = 2$ a $n = 3$. Není-li $\mathrm{tg}\, 2\alpha$ definovaný, je $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ a $\mathrm{tg}\, \alpha = 1$ je racionální. Hodnota $\mathrm{tg}\, 3\alpha$ není definovaná pro $\alpha = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, pro takové hodnoty však není $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \sqrt{3}$ racionální. Je-li konečně $\mathrm{tg}\, 2\alpha$ i $\mathrm{tg}\, 3\alpha$ racionální, pak je

$$1 + \mathrm{tg}\, 2\alpha\, \mathrm{tg}\, 3\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha \cos 3\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos 2\alpha\,(\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha)} \neq 0$$

a

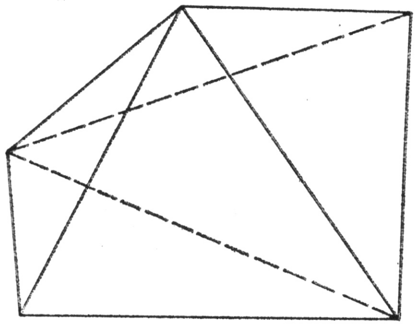
$$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\mathrm{tg}\, 3\alpha - \mathrm{tg}\, 2\alpha}{1 + \mathrm{tg}\, 2\alpha\, \mathrm{tg}\, 3\alpha}$$

je racionální číslo.

A - II - 2

Určete nejmenší přirozené číslo n, pro které existuje mnohostěn s n hranami, jehož všechny vrcholy s výjimkou nejvýše dvou mají stupeň alespoň 4. (Stupněm vrcholu mnohostěnu nazýváme počet hran, které z tohoto vrcholu vycházejí.)

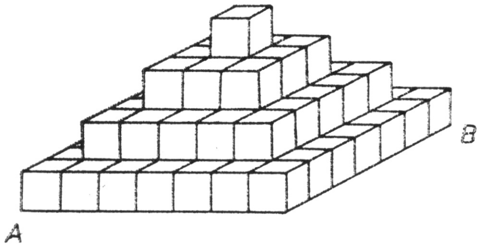
Řešení. Označme v $(v \geqq 4)$ počet vrcholů mnohostěnu, který má n hran a splňuje podmínky úlohy. Z každého vrcholu vycházejí aspoň tři hrany, podle předpokladu však vycházejí ze všech vrcholů kromě nejvýše dvou aspoň čtyři hrany. Celkem má tedy takový mnohostěn aspoň $\frac{4(v-2)+3.2}{2}$ hran (každá hrana přísluší dvěma vrcholům). Je tedy $n \geqq 2(v-2)+3 = 2v-1$. Nemůže být $v = 4$, protože ve čtyřstěnu je stupeň každého vrcholu 3. Pro $v = 5$ máme $n \geqq 9$ a mnohostěn s pěti vrcholy a devíti hranami opravdu existuje (obr. 23).



Obr. 23

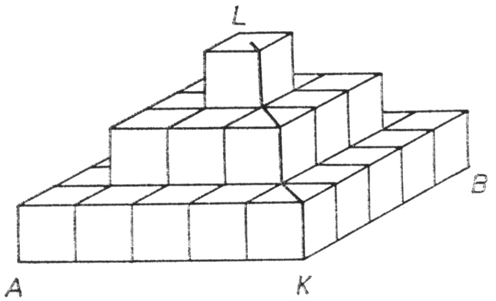
A - II - 3a

Pyramida z jednotkových krychlí má $N > 1$ vrstev (na obr. 24 je taková pyramida pro $N = 4$). Najděte nejkratší spojnici protějších vrcholů A, B podstavy vedenou po povrchu pyramidy (vylučuje se spojnice procházející vnitřkem podstavy).



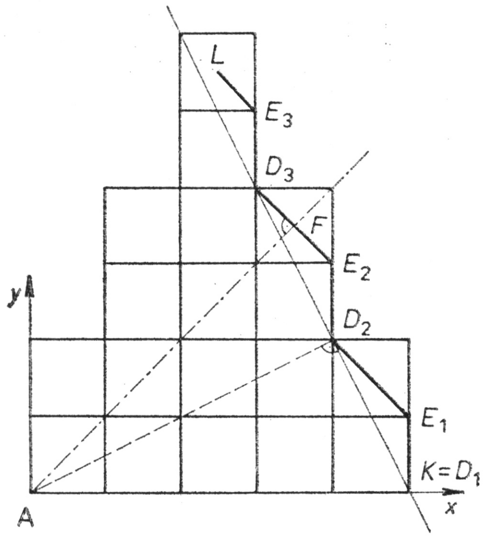
Obr. 24

Řešení. Vzhledem k souměrnosti pyramidy můžeme předpokládat, že spojnice bodů A, B prochází některým bodem C na spojnici bodů L a K, která leží v rovině souměrnosti bodů A a B (obr. 25 pro $N = 3$). Abychom našli bod C, pro který je spojnice AC nejkratší, rozvineme pří-



Obr. 25

slušnou část povrchu pyramidy do roviny (obr. 26). Je zřejmé, že je vždy $|AD_k| < |AE_k|$, takže z bodů úsečky D_kE_k $(1 \leqq k \leqq N)$ má nejmenší vzdálenost od bodu A bod D_k. Z bodů úsečky E_kD_{k+1} má nejmenší vzdálenost od bodu A vždy některý z jejích krajních bodů s výjimkou



Obr. 26

případu, kdy je $|AE_k| = |AD_{k+1}|$ (v každém jiném případě je trojúhelník AE_kD_{k+1} tupoúhlý nebo pravoúhlý). V tomto případě má z bodů úsečky E_kD_{k+1} od bodu A nejmenší vzdálenost její střed F, pak je ale $|AF| > |AD_k|$. Zjistili jsme tedy, že hledaným bodem C je některý z bodů D_k $(1 \leqq k \leqq N)$.

Zvolme soustavu souřadnic s počátkem v bodě A tak, aby bylo $D_1 = (2N - 1, 0)$. Pak leží body $D_k = (2N - k, 2k - 2)$ na přímce, která má rovnici $y + 2x = 4N - 2$, a kolmice vedená k ní bodem A ji protíná v bodě

$$P = \left(\frac{8N - 4}{5}, \frac{4N - 2}{5}\right).$$

Hledaným bodem C je ten z bodů D_k, který je nejblíže bodu P, k je tedy takové celé číslo, pro které je rozdíl

$$\left| 2N - k - \frac{8N - 4}{5} \right| = \left| \frac{2N + 4}{5} - k \right|$$

nejmenší. Jak snadno zjistíme, nejbližší celé číslo k číslu $\dfrac{2N + 4}{5}$ je

$$k = \left[\frac{2N + 4}{5} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{4N + 13}{10} \right].$$

(Pro čísla tvaru $m + \frac{1}{2}$, kde m je celé, existují ovšem taková celá čísla dvě: m a $m + 1 = \left[m + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]$.)

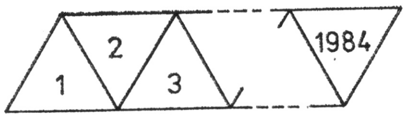
Jinak můžeme také k určit v závislosti na zbytku čísla N při dělení pěti:

N	k
$5n$	$2n + 1 = \dfrac{2N + 5}{5}$
$5n + 1$	$2n + 1 = \dfrac{2N + 3}{5}$
$5n + 2$	$2n + 2 = \dfrac{2N + 6}{5}$
$5n + 3$	$2n + 2 = \dfrac{2N + 4}{5}$
$5n + 4$	$2n + 2 = \dfrac{2N + 2}{5}$

Poznámka. Nalezený výsledek zřejmě platí i pro $N = 1$.

A - II - 3b

Na obr. 27 je útvar složený z 1984 shodných trojúhelníků. Některé z jejich vrcholů obarvíme tak, aby každý z 1984 uvažovaných trojúhelníků měl aspoň jeden vrchol obarven.



Obr. 27

Rozhodněte, je-li počet takovýchto obarvení sudý nebo lichý.

Řešení. Označme B_n počet všech přípustných obarvení pro útvar složený z n trojúhelníků. Je-li $n > 3$, můžeme takto obarvené útvary rozdělit do tří disjunktních skupin podle toho, jak jsou obarveny vrcholy n-tého trojúhelníku PQR (označení volíme tak, aby bod P patřil posledním třem, Q posledním dvěma a R jen poslednímu trojúhelníku).

Do první skupiny dáme útvary, jejichž vrchol R je obarven - takových obarvení je B_{n-1}. Do druhé skupiny dáme útvary, jejichž vrchol R není obarven a vrchol Q je obarven - takových obarvení je B_{n-2}. Do třetí skupiny dáme útvary, jejichž vrcholy R a Q nejsou obarveny, takže musí být obarven vrchol P - takových obarvení je B_{n-3}. Platí tedy rekurentní vzorec

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}.$$

Přímo zjistíme, že $B_1 = 7$, $B_2 = 13$, $B_3 = 24$. Vzhledem k rekurentnímu vzorci následují za sebou v posloupnosti $\{B_n\}$ vždy dvě lichá čísla a dvě sudá čísla, pak opět dvě lichá a dvě sudá čísla, atd. Proto je číslo B_{1984} sudé.

Jiné řešení. Pro $n \geqq 1$ označme B_n počet všech přípustných obarvení útvaru složeného z n trojúhelníků a vrchol, který náleží pouze poslednímu n-tému trojúhelníku, označme P_n. Ke každému z B_{n-1} obarvení $n - 1$ trojúhelníků máme pro obarvení vrcholu P_n dvě možnosti (obarvit či neobarvit). Pouze v případě, kdy ani P_{n-2}, ani P_{n-1} obarveny nejsou, musí být obarven jak vrchol P_n, tak i vrchol

P_{n-3}. To nastane právě v B_{n-4} případech. Platí tedy pro $n > 4$ rekurentní vztah

$$B_n = 2B_{n-1} - B_{n-4}.$$

Protože na základě stejné úvahy je $B_4 = 2B_3 - 4$, což je číslo sudé, plyne z uvedeného rekurentního vztahu, že číslo B_{1984} je také sudé.

ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

V prostoru je dána krychle $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Označme S její střed (průsečík tělesových úhlopříček). Najděte všechna přirozená čísla k, pro která existuje rovina neobsahující bod S a protínající právě k z polopřímek $SA_1, SA_2, \ldots, SA_8$.

Řešení. Označme M množinu všech rovin, které neobsahují bod S. Především je $k \geqq 2$, neboť čtyři přímky A_1A_7, A_2A_8, A_3A_5, A_4A_6 se protínají v bodě S a žádné tři z nich neleží v jedné rovině. Je tedy každá rovina z M rovnoběžná nejvýše se dvěma z nich, tj. protíná aspoň dvě z těchto přímek neboli protíná alespoň dvě z polopřímek SA_1, $SA_2, \ldots, SA_8$.

Dále je $k \leqq 4$, protože rovina neprocházející bodem S může protínat vždy jen jednu z polopřímek k sobě opačných.

Rovina σ_1 obsahující body A_2, A_3 a rovnoběžná s rovinou $A_1A_4A_7$ protíná právě dvě polopřímky SA_2 a SA_3.

Rovina σ_2 obsahující body A_3, A_6 a rovnoběžná s přímkou A_2A_8 protíná právě tři polopřímky SA_3, SA_6, SA_7. Konečně rovina libovolné stěny krychle protíná právě čtyři z polopřímek SA_1, SA_2, ..., SA_8. Úloze tedy vyhovují čísla 2, 3, 4.

A - III - 2

Nechť pro vnitřní úhly konvexního čtyřúhelníku platí

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta = 0,$$

pak je to tětivový čtyřúhelník, lichoběžník nebo rovnoběžník. Dokažte.

Řešení. Je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, takže použitím známých vzorců postupně dostaneme

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right) =$$

$$= -4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{4}\sin\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{4},$$

neboť je

$$\cos\frac{\gamma+\delta}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Dále je

$$\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{4} = \sin\frac{\alpha+\gamma-\pi}{2} = -\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

a

$$\sin\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{4} = -\cos\frac{\alpha+\delta}{2},$$

takže dostáváme

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta =$$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2} = 0.$$

Z poslední rovnosti plyne, že je součet dvou sousedních nebo dvou protějších úhlů roven 180°, tedy daný čtyřúhelník je lichoběžník nebo rovnoběžník anebo čtyřúhelník tětivový.

A - III - 3

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňuje rekurentní vztah

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n\,. \tag{1}$$

Definujme posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ vztahem

$$b_n = \left[\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right],$$

přičemž klademe $b_n = 1$ pro $a_{n-1} = 0$. Dokažte, že od jistého členu počínaje splňuje posloupnost $\{b_n\}$ rovněž rekurentní vztah (1). ($[x]$ značí celou část čísla x.)

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}$ splňující vztah (1) je monotónní, jak dokážeme indukcí. Nechť $a_0 \leqq a_1$ a předpokládejme, že je $a_0 \leqq \ldots \leqq a_{n-1} \leqq a_n$. Pak je

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} \geqq a_n .$$

Přitom je tato posloupnost buď konstantní, nebo ostře monotónní. Je-li konstantní, je posloupnost $\{b_n\}$ rovněž konstantní a vyhovuje rekurentnímu vztahu (1).

Předpokládejme tedy, že posloupnost $\{a_n\}$ je nekonstantní, pak je od jistého členu počínaje (pro všechna $n \geqq n_0$ pro vhodné n_0) buď stále kladná, nebo stále záporná. Položíme-li $c_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, je $c_n > 0$ pro $n \geqq n_0$ a ze vztahu (1) plyne rovnost

$$c_n = 4 - \frac{3}{c_{n-1}} ,$$

takže je buď

(a) $0 < c_n < 1$ pro všechna $n \geqq n_0 + 1$,

nebo

(b) $1 < c_n \leqq 3$ pro všechna $n \geqq n_0 + 1$,

nebo

(c) $3 < c_n < 4$ pro všechna $n \geqq n_0 + 1$.

Přitom je v případě (a) a (c) $c_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{c_n} > c_n$, v případě

(b) je $c_{n+1} \leqq c_n$. Posloupnost $\{c_n\}$ stejně jako posloupnost $\{c_n c_{n+1}\}$ je tedy od určitého členu počínaje monotónní a omezená. Proto je posloupnost

$$b_n = \left[\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right] = [c_n c_{n+1}]$$

od určitého členu počínaje již konstantní. Konstantní posloupnosti však splňují rekurentní vztah (1).

Jiné řešení. Rekurentnímu vztahu (1) přísluší charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0\,,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Členy posloupnosti $\{a_n\}$ mají tedy tvar

$$a_n = A.3^n + B\,,$$

kde A, B jsou reálné konstanty. Posloupnost $\{a_n\}$ je zřejmě monotónní, takže pokud není konstantní, je od jistého členu počínaje nenulová. Pak je ale

$$b_n = \left[\frac{3^{n+1} A + B}{3^{n-1} A + B}\right] = \left[\frac{9\,.\,3^{n-1} A + 9B - 9B + B}{3^{n-1} A + B}\right] =$$

$$= 9 + \left[\frac{-8B}{3^{n-1} A + B}\right],$$

přičemž posloupnost $\dfrac{-8B}{3^{n-1}A+B}$ konverguje monotónně k nule. V každém případě je tedy posloupnost $\{b_n\}$ od jistého členu počínaje již konstantní, a každá konstantní posloupnost splňuje rekurentní vztah (1).

A - III - 4

Nechť r je přirozené číslo větší než 1. Potom existují kladná iracionální čísla x, y taková, že platí

$$x^y = r\,.$$

Dokažte.

Řešení. Zvolme libovolné prvočíslo p, které nedělí číslo r, a položme $x = \sqrt{p}$. Snadno se dokáže, že x je (kladné) iracionální číslo. Logaritmus čísla r při základu $\sqrt{p}$ označme y, tj.

$$(\sqrt{p})^y = r\,.$$

Kdyby nyní y bylo racionální, tj. $y = \dfrac{a}{b}$ pro přirozená čísla a, b, dostali bychom

$$p^a = r^{2b}\,,$$

což je spor, neboť p nedělilo r.

Jiné řešení. Předpokládejme, že tvrzení neplatí, tj. že pro každé iracionální x je číslo $y = \log_x r$ racionální. Vezměme

$x = \sqrt{2}$ a $x = \sqrt{3}$. Existují tedy racionální čísla y, z (jejich společný jmenovatel označme q) taková, že

$$(\sqrt{2})^y = (\sqrt{3})^z = r$$

neboli

$$2^{yq} = 3^{zq}.$$

To je zřejmě spor, protože yq a zq jsou celá čísla.

Jiné řešení. Množina $\left\{r^{\frac{1}{y}} : y \in (0, 1) \text{ je iracionální}\right\}$ je nespočetná, existuje v ní tedy takové iracionální číslo x, že je

$$x = r^{\frac{1}{y}};$$

A - III - 5

Najděte všechna přirozená čísla n, pro která existuje konvexní mnohostěn s n hranami, přičemž z právě jednoho jeho vrcholu vycházejí čtyři hrany a ze všech ostatních vrcholů tři hrany.

Řešení. Nechť n je přirozené číslo vyhovující podmínce úlohy, označme k počet vrcholů příslušného konvexního mnohostěnu. Sečteme-li hrany v každém vrcholu, dostaneme dvojnásobný počet hran, tj.

$$2n = 4 + 3(k - 1) = 3k + 1.$$

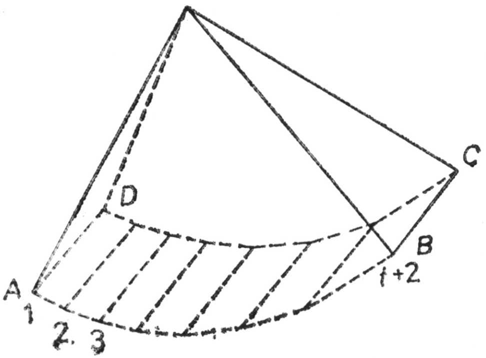
Protože $1 = 2 . 8 - 3 . 5$, můžeme předchozí neurčitou rovnici upravit na tvar

$$2(n-8) = 3(k-5),$$

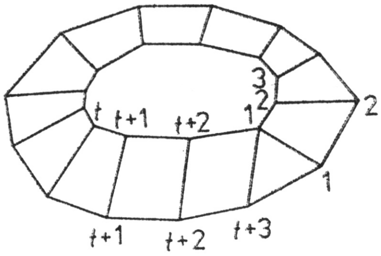
přičemž je $k \geqq 5$, neboť čtyřstěn zřejmě nevyhovuje podmínce úlohy. Protože čísla 2 a 3 jsou nesoudělná, mají všechna řešení předchozí rovnice tvar

$$n = 8 + 3t, \quad k = 5 + 2t, \qquad t \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Ukážeme, že pro každé takové n existuje konvexní mnohostěn, který vyhovuje podmínce úlohy. Pro $n = 8$ ($t = 0$) vyhovuje např. čtyřboký jehlan. Předpokládejme, že jsme již sestrojili pro $t \geqq 0$ mnohostěn s $n = 8 + 3t$ hranami, který splňuje podmínku úlohy. Vezměme jeho libovolný vrchol, z kterého vycházejí právě tři hrany, a na každé z nich zvolme jeden vnitřní bod. Uvedené tři body určují rovinu, která rozdělí původní mnohostěn na trojboký jehlan a konvexní mnohostěn s $8 + 3(t + 1)$ hranami, který zřejmě splňuje podmínku úlohy. Z principu matematické indukce plyne existence



Obr. 28



Obr. 29

konvexního mnohostěnu s danou vlastností pro každé n tvaru $n = 8 + 3t$, kde $t \geqq 0$ je celé číslo.

Jiný příklad mnohostěnu s $n = 8 + 3t$ hranami, který splňuje podmínku úlohy, je na obr. 28, kde mezi hranami BC a AD je $t \geqq 0$ hran, a na obr. 29, kde $t + 3$ hran spojuje vrcholy $(t + 2)$-úhelníku s vrcholy $(t + 3)$-úhelníku.

A - III - 6

Zobrazení f množiny Z všech celých čísel do sebe splňuje pro všechna $m \in$ Z podmínku

$$f(f(m)) = -m. \qquad (1)$$

Potom platí

a) f je bijektivní (tj. prosté zobrazení množiny Z na sebe),

b) pro všechna $m \in$ Z je $f(-m) = -f(m)$,

c) $f(m) = 0$, právě když $m = 0$.

Dokažte tato tvrzení a sestrojte příklad zobrazení f, které vyhovuje podmínce (1).

Řešení. Ze vztahu $f(m) = f(k)$ plyne

$$m = -f(f(m)) = -f(f(k)) = k,$$

f je tedy prosté, a protože pro každé $k \in \mathrm{Z}$ je $f(f(-k)) = k$, zobrazuje f množinu Z na sebe.

Ze vztahu $f(f(m)) = -m$ plyne

$$f(-m) = f(f(f(m))) = -f(m).$$

Pro $m = 0$ odtud speciálně dostáváme $f(0) = 0$, a protože f je prosté, platí c).

Definujme zobrazení f nyní takto:

$$f(0) = 0,$$

$$f(2k-1) = 2k, \qquad f(2k) = -2k + 1,$$

$$f(-(2k-1)) = -2k, \; f(-2k) = 2k - 1$$

pro libovolné k přirozené. Zobrazení f funguje podle následujícího schématu a splňuje zřejmě podmínku (1):

$$\begin{tikzcd}
& 2k \arrow[dr] & \\
2k-1 \arrow[ur] & & -(2k-1) \arrow[dl] \\
& -2k \arrow[ul] &
\end{tikzcd} \qquad k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$