34. ročník matematické olympiády

Kategorie Z7

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Milan Koman (editor); Karol Križalkovič (editor): 34. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1984/85. 26. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. pp. 41–61.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404796

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

Z7 - I - 1

Nahraďte písmena číslicemi tak, aby vznikl správný zápis sčítání:

```
   P S I C I
   P S I C I
   P S I C I
 -----------
 H A F A N I
```

Řešení. Zápis přepíšeme do tabulky a označíme sloupce:

f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*
	P	S	I	C	I
	P	S	I	C	I
	P	S	I	C	I
H	A	F	A	N	I

Ze sloupce a je vidět, že pro I mohou nastat jen dvě možnosti

(1) $$\mathrm{I} = 0 \quad \text{nebo} \quad \mathrm{I} = 5.$$

Ze sloupců e, d plyne, že

$$\mathrm{P} + \mathrm{P} + \mathrm{P} + (\text{přenos ze sloupce } d) \leqq 29,$$

proto je

(2) $$\mathrm{H} = 1 \quad \text{nebo} \quad \mathrm{H} = 2.$$

Protože platí (1), plyne ze sloupců b, a

$$\mathrm{C} + \mathrm{C} + \mathrm{C} + (\text{přenos ze sloupce } a) \leqq 28.$$

Proto je

(3) $$\mathrm{A} = \mathrm{I} + 1 \quad \text{nebo} \quad \mathrm{A} = \mathrm{I} + 2.$$

Protože musí být $\mathrm{A} \neq \mathrm{H}$, stačí podle (1) a (3) rozlišit šest případů:

a) $\mathrm{I} = 0, \mathrm{H} = 1, \mathrm{A} = 2$

f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*
	P	S	0	C	0
	P	S	0	C	0
	P	S	0	C	0
1	2	F	2	N	0

Odtud postupně dostaneme:

$P = 4$ (neboť přenos ze sloupce $d \leqq 2$)
$S = 3$ ($S \geqq 3$, neboť $S \neq 1$, $S \neq 2$ a $S \leqq 3$, neboť $P = 4$)
$F = 9$
$C = 7$ ($C \geqq 7$, neboť přenos ze sloupce b je 2,
$C \neq 8$, neboť $P \neq N$ a $C \neq 9$, neboť $C \neq F$)

Ale pro $C = 7$ dostaneme $N = 1$, což není možné, protože $H = 1$. Možnost a) je tedy vyloučena.

b) $I = 0$, $H = 2$, $A = 1$

f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*
	P	S	0	C	0
	P	S	0	C	0
	P	S	0	C	0
2	1	F	1	N	0

Odtud postupně dostaneme:

$P = 7$, $S = 3$, $F = 9$,
$C = 6$ ($C \neq 4$, neboť $N \neq 2$; $C \neq 5$, neboť $C \neq N$;
$C \neq 8$, neboť podle sloupce c je $C + C + C < 20$),
$N = 8$.

Tím dostáváme řešení:

(4)

	7	3	0	6	0
	7	3	0	6	0
	7	3	0	6	0
2	1	9	1	8	0

c) I = 5, H = 1, A = 6

f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
1	6	F	6	N	5

Tento případ vzhledem k sloupci *e* nenastane, neboť P $\neq$ 5.

d) I = 5, H = 1, A = 7

f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
1	7	F	7	N	5

Tento případ nemůže opět nastat, neboť P $\neq$ 5.

e) I = 5, H = 2, A = 6

f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
2	6	F	6	N	5

V tomto případě musí být P = 8 a odtud S = 7 nebo S = 9, neboť přenos ze sloupce *d* je roven 2. Protože přenos ze sloupce *c* je roven 1, dostáváme v prvním případě F = 2, v druhém případě F = 8. Ale ani jedna z těchto možností nemůže nastat, neboť číslo 2 je rovno již H a číslo 8 je rovno již P.

f) I = 5, H = 2, A = 7

f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
2	7	F	7	N	5

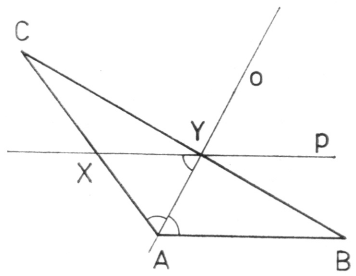
Dostaneme P = 9. Odtud a ze sloupců c, b plyne, že C = 8. Ale to nemůže nastat, neboť $N \neq 5$.

Závěrem vidíme, že úloha má jediné řešení, které je dané zápisem (4).

Z7 - I - 2

Narýsujte trojúhelník ABC; $d(AB) = 5$ cm, $d(BC) =$ $= 10$ cm, $d(AC) = 6$ cm. Na straně AC sestrojte bod X a na straně BC bod Y tak, aby platilo: $\leftrightarrow XY \parallel \leftrightarrow AB$ a současně $d(AX) = d(XY)$.

Řešení. *Rozbor.* Načrtneme obrázek, na kterém doplníme přímku $o = AY$ (obr. 1). Protože $AX \cong XY$ je trojúhelník



Obr. 1

AXY rovnoramenný s rameny AX a XY. Proti těmto ramenům jsou shodné úhly

$$(1) \qquad \sphericalangle XAY \cong \sphericalangle XYA.$$

Úhly XYA a YAB jsou střídavé úhly vyťaté přímkou o na rovnoběžkách XY a AB. Proto jsou shodné, takže

$$(2) \qquad \sphericalangle XYA \cong \sphericalangle YAB.$$

Ze zápisů (1) a (2) vidíme, že

$$(3) \qquad \sphericalangle XAY \cong \sphericalangle YAB,$$

tzn. AY je osou úhlu CAB.

Konstrukce

1. $\triangle ABC$;
   $d(AB) = 5$ cm, $d(BC) = 10$ cm, $d(AC) = 6$ cm (*sss*)
2. o; o je osa $\sphericalangle CAB$
3. Y; $Y \in o \cap BC$
4. p; $p \parallel AB$, $Y \in p$
5. X; $X \in p \cap AC$

*Zkouška**). Z konstrukce plyne, že platí (3) a (2). Proto platí i (1), tzn. $\triangle AYX$ je rovnoramenný, takže je skutečně $d(AX) = d(XY)$.

Z7 - I - 3

Představte si, že máte 81 dvoukorun, z nich jednu falešnou. Falešná mince je lehčí než pravá. K dispozici máte přesné dvouramenné váhy. Kolik nejméně vážení potřebujete k tomu, abyste našli falešnou minci? (Své tvrzení odůvodněte.)

Řešení se skládá ze dvou částí. V první části ukážeme,

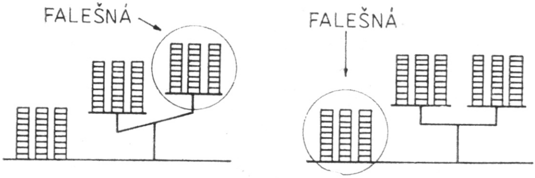
---

*) Od řešitelů nebyla vyžadována.

že k nalezení falešné mince stačí provést čtyři vážení. V druhé části pak ukážeme, že počet vážení už nelze zmenšit, tzn. že tři vážení nestačí k určení falešné mince.

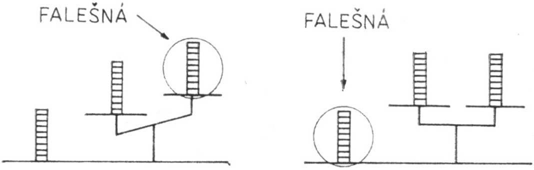
(I) Mince rozdělíme na tři hromádky po 27 kusech.

1. vážením zjistíme, ve které z těchto hromádek je hledaná falešná mince. Zvážíme prvé dvě hromádky. Když se váha vychýlí, je falešná mince na misce vah, která je výše. Jsou-li váhy v rovnováze, je falešná mince ve třetí hromádce (obr. 2). Hromádku, ve které je falešná mince, opět rozdělíme na tři stejné hromádky po 9 mincích.



Obr. 2

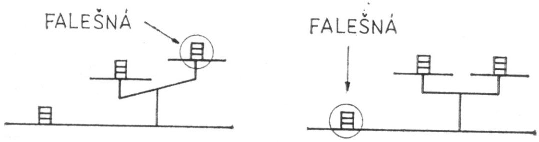
2. vážením (stejným postupem jako při 1. vážení) zjistíme, ve které z těchto hromádek se hledaná falešná mince nachází (obr. 3). Tuto hromádku opět rozdělíme na tři stejné hromádky po 3 mincích.



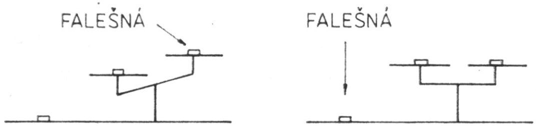
Obr. 3

3. vážením (opět stejným způsobem) určíme, ve které z těchto hromádek je hledaná falešná mince (obr. 4). Po třech váženích zůstanou jen tři mince, mezi kterými se falešná mince musí nacházet.

4. vážením zjistíme, která z těchto tří je falešná (obr. 5). Tím jsme ukázali, že čtyři vážení budou určitě stačit.



Obr. 4



Obr. 5

(II)*) Nyní dokážeme, že tři vážení nestačí k nalezení falešné mince.

1. Bez vážení falešnou minci mezi třemi mincemi nepoznáme.

2. Jedním vážením nerozeznáme falešnou minci mezi devíti mincemi. Ať rozdělíme mince jakkoliv na tři hromádky a dvě z nich dáme na váhy, pak vždy nejméně jedna z těchto

*) Druhá část řešení nebyla od řešitelů požadována.

hromádek má aspoň tři mince. Může se stát, že po prvním vážení zjistíme, že falešná mince je právě v této hromádce. Ale bez druhého vážení falešnou minci nenajdeme.

3. Podobně zjistíme, že dvě vážení nestačí k rozeznání falešné mince mezi 27 mincemi. Ať rozdělíme mince kterýmkoliv způsobem na misky váhy a zbývající mince, vždy má aspoň jedna hromádka nejméně 9 mincí. A na vyhledání falešné mince mezi nimi by zbylo jen jedno vážení.

4. Stejným způsobem zjistíme, že tři vážení nestačí k rozeznání falešné mince mezi 81 mincemi.

Poznámka. Řešení úlohy souvisí s trojkovou soustavou. Postup stručně naznačíme.
Mince očíslujeme čísly 1, 2, ..., 81 a zapíšeme tato čísla v trojkové soustavě.

$1 = 0001_3$	$10 = 0101_3$	$19 = 0201_3$
$2 = 0002_3$	$11 = 0102_3$	$20 = 0202_3$
$3 = 0010_3$	$12 = 0110_3$	$21 = 0210_3$
$4 = 0011_3$	$13 = 0111_3$	$22 = 0211_3$
$5 = 0012_3$	$14 = 0112_3$	$23 = 0212_3$
$6 = 0020_3$	$15 = 0120_3$	$24 = 0220_3$
$7 = 0021_3$	$16 = 0121_3$	$25 = 0221_3$
$8 = 0022_3$	$17 = 0122_3$	$26 = 0222_3$
$9 = 0100_3$	$18 = 0200_3$	$27 = 1001_3$

atd.

Mince při prvním vážení rozmístíme podle číslic na posledním místě takto:

levá miska .... $\boxed{\ldots 0}_3$

pravá miska .... $\boxed{\ldots 1}_3$

mimo váhu .... $\boxed{\ldots 2}_3$

Podobně postupujeme při dalších váženích podle číslic na dalších místech od konce.

Číslo falešné mince určíme v trojkové soustavě podle pravidla:

Podle výsledku i-tého vážení ($i = 1, 2, 3, 4$) určíme i-tou číslici a_i od konce takto:

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{levá miska je nahoře} \\ 1 & \text{levá miska je dole} \\ 2 & \text{misky jsou v rovnováze} \end{cases}$$

Vyzkoušejte si to sami.

Z7 - I - 4

Anička, Václav, Jakub a Lukáš jsou čtyřčata. Anička ví, že Lukáš nikdy nelže, naopak Jakub lže vždycky a Václav ten to střídá: jednou lže, hned potom zase mluví pravdu a potom zase lže atd.

Jednou odpoledne přiběhli všichni domů a jeden říká Aničce: »Maminka na tebe čeká v OBUVI.« »Dobře, Lukáši,« odpověděla Anička. Vtom se bratr zasmál a řekl: »Já jsem Václav.«

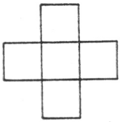
Můžete říci, který z bratrů vyřídil Aničce matčin vzkaz? Byl vzkaz pravdivý?

Řešení. Lukáš Aničce vzkaz nevyřizoval, neboť vždy mluví pravdu a neřekl by o sobě, že je Václav. Vzkaz mohl vyřídit Jakub. V obou tvrzeních lže a vzkaz je tedy nepravdivý. Vzkaz mohl vyřídit i Václav. Ve svém druhém tvrzení by mluvil pravdu, tudíž v prvním by musel lhát a vzkaz by byl opět nepravdivý.

Závěr. Vzkaz je nepravdivý, ale nelze jednoznačně určit, zda jej vyřídil Jakub nebo Václav (s určitostí pouze víme, že Lukáš to nebyl).

Z7 - I - 5

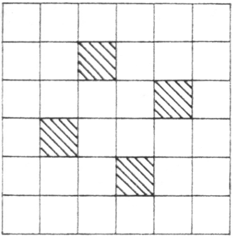
Kolik čtverečků musíme vyšrafovat na šachovnici skládající se ze 6×6 čtverečků, aby se útvar (kříž) sestavený z pěti čtverečků nedal nakreslit na zbytek (nevyšrafované) šachovnice (obr. 6)?



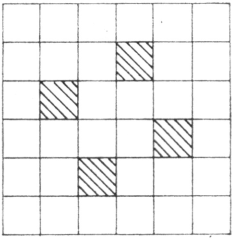
Obr. 6

Řešení. Stačí vyšrafovat čtyři vhodně zvolené čtverečky a kříž se na šachovnici už nevejde. Šrafování lze provést dvěma způsoby (obr. 7a, b).

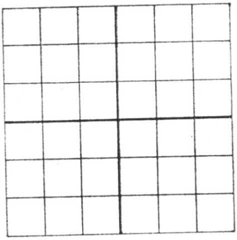
Vyšrafujeme-li jen tři čtverečky (nebo dokonce ještě méně), vždy lze na šachovnici kříž umístit. Aspoň v jednom ze 4 čtverců 3×3 (viz obr. 8) nebude žádné šrafované pole, takže se do něho kříž vejde.



Obr. 7a



7b



Obr. 8

Z7 - I - 6

Představte si, že vynásobíte všechna přirozená čísla od 1 do 63. Potom vynásobíte všechna přirozená čísla od 1 do 61. Nakonec tyto součiny odečtete; je tento rozdíl dělitelný číslem 71?

Řešení. Napíšeme rozdíl

$R = (1.2.3. \ldots .61.62.63) - (1.2.3. \ldots .59.60.61)$

Z rozdílu R vytkneme součin $s = 1.2.3. \ldots .59.60.61$. Dostaneme

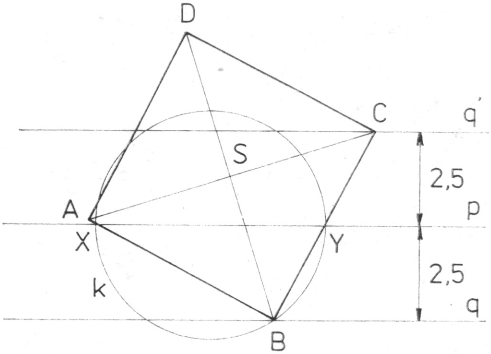
$$R = s\,.\,(62.63 - 1) = s.3905 = s.71.55.$$

Rozdíl je dělitelný číslem 71.

Z7 - II - 1

Je dána přímka p a na ní dva různé body X, Y ($d(XY) \leqq 6$ cm). Sestrojte takový čtverec $ABCD$, aby strana AB procházela bodem X, strana BC procházela bodem Y, aby úhlopříčka čtverce měla délku 8 cm a aby bod B měl od přímky p vzdálenost 2,5 cm. Má úloha vždy řešení? Kolik může mít úloha nejvýše řešení?

Řešení. *Rozbor.* Načrtneme si obrázek. Bod B leží na přímce q nebo q', které jsou rovnoběžné s přímkou p a mají od p vzdálenost 2,5 cm. Dále leží bod B na Thaletově kružnici k opsané nad průměrem XY. Střed S hledaného čtverce leží na ose úhlu XBY. Bod S má od bodu B vzdálenost rovnou polovině úhlopříčky, proto je $d(BS) = 4$ cm (obr. 9).



Obr. 9

Zápis konstrukce

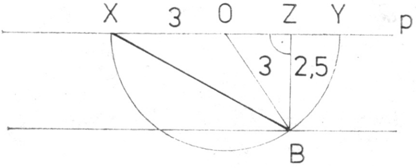
0. p: $X, Y \in p$, $d(X, Y) \leqq 6$ cm. (Zadání úlohy)
1. q, q' : $q \parallel p \parallel q'$, $v(p, q) = v(p, q') = 2{,}5$ cm
2. k: Thaletova kružnice s průměrem XY
3. B: $B \in (q \cup q') \cap k$
4. $\mapsto BX$, $\mapsto BY$
5. polopřímka u: osa $\sphericalangle XBY$
6. S: $S \in u$, $d(BS) = 4$ cm
7. v: $v \perp u$, $S \in v$
8. A, C: $A \in \mapsto BX \cap v$, $C \in \mapsto BY \cap v$
9. D: S je střed úsečky BD
10. $\square$ $ABCD$

*Zkouška**). Podle věty *usu* jsou $\triangle ABS$, $\triangle CBS$ shodné. Protože jsou pravoúhlé a úhly při vrcholech B jsou poloviny pravého úhlu, jsou tyto trojúhelníky rovnoramenné. Úsečky BS, AS a CS jsou tedy shodné. Také úsečka DS je s nimi shodná. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky k sobě kolmé, dlouhé 8 cm a půlí se, proto je tento čtyřúhelník čtverec.

Zbývá ukázat, že body X, Y leží na stranách čtverce $ABCD$ jdoucích z vrcholu B, tzn., že $BX \leqq AB$ a $BY \leqq BC$. Můžeme předpokládat, že $BX \geqq BY$. Úsečka BX bude zřejmě nejdelší, bude-li také XY nejdelší, tzn. $d(XY) =$ $= 6$ cm (obr. 10). Z pravoúhlého $\triangle OZB$ vypočítáme podle Pythagorovy věty délky OZ

$$d(OZ) = \sqrt{3^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{2{,}75} \doteq 1{,}67.$$

*) Od řešitelů se zkouška nepožadovala.



Obr. 10

Nyní určíme délku XZ a podle Pythagorovy věty vypočítáme z trojúhelníku XZB délku XB.

$$d(XB) = \sqrt{4{,}67^2 + 2{,}5^2} \doteq \sqrt{28{,}06} \doteq 5{,}30.$$

Strana čtverce $ABCD$ má délku

$$d(AB) = 4 \,.\, \sqrt{2} \doteq 5{,}66.$$

Tedy je skutečně $d(AB) > d(XB)$.

Diskuse. Úloha má buď čtyři, nebo dvě, anebo žádné řešení. Počet řešení závisí na počtu společných bodů kružnice k a rovnoběžek q, q'.

Z7 - II - 2

Určete číslice x a y, jestliže víte, že trojciferné číslo xyy je dělitelné sedmi, trojciferné číslo yxy je dělitelné čtyřmi a trojciferné číslo xyx je dělitelné třemi.

Řešení. Protože číslo yxy je dělitelné čtyřmi, musí být poslední dvojčíslí xy dělitelné čtyřmi. Napíšeme tabulku těchto čísel, přitom obě číslice x, y jsou různé od nuly (jinak by xyy a yxy nebyla trojciferná čísla).

12	16	24	28	32	36	44	48	52
56	64	68	72	76	84	88	92	96

Protože xyx je dělitelné třemi, musí být ciferný součet $(2x + y)$ dělitelný třemi. Z tabulky čísel ponecháme pouze ta, která splňují tuto podmínku:

28 36 44 52 88 96

Jim odpovídají čísla xyy:

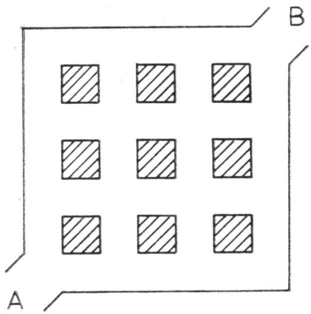
288 366 444 522 888 966.

Z nich je dělitelné sedmi pouze číslo 966.

Výsledek je $x = 9$, $y = 6$.

Z7 - II - 3

V místě A (obr. 11) vběhla do bludiště vyděšená myší rodina. Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B. (Hladový kocour prská v místě A.) Z rozhovoru udýchaných myší se dozvídáme:



Obr. 11

1. Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru;

2. žádné dvě myši neběžely stejnou cestou;

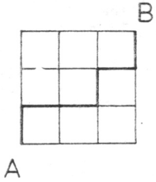
3. kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé dvě myši musely běžet po stejné cestě.

Kolik členů měla myší rodina?

Řešení. Musíme najít počet cest z A do B, které probíhají pouze vpravo a nahoru. Tento počet můžeme určit např. výčtem všech možností. Místo kreslení použijeme »čárkovací metodu«, při níž např. cestu z obr. 12 zapíšeme takto

/ — —/ — /

(svislé a vodorovné čárky udávají postupně průběh cesty).



Obr. 12

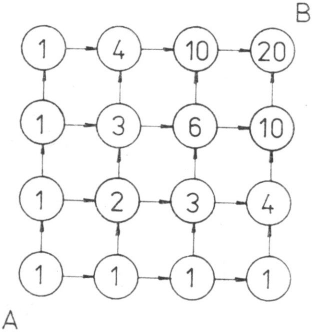
Napíšeme tabulku všech cest.

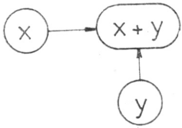
(T)

/	/	/	—	—	—	—	/	/	/	—	—
/	/	—	/	—	—	—	/	/	—	/	—
/	/	—	—	/	—	—	/	/	—	—	/
/	/	—	—	—	/	—	/	—	/	/	—
/	—	/	/	—	—	—	/	—	/	—	/
/	—	/	—	/	—	—	/	—	—	/	/
/	—	/	—	—	/	—	—	/	/	/	—
/	—	—	/	/	—	—	—	/	/	—	/
/	—	—	/	—	/	—	—	/	—	/	/
/	—	—	—	/	/	—	—	—	/	/	/

Těchto cest je celkem 20.

Počet cest můžeme určit i početně bez tabulky (T). Použijeme schématu z obrázku 13a sestaveného podle klíče z obrázku 13b.





Obr. 13a 13b

Čísla udávají počet cest z bodu A na křižovatku, kde je příslušné číslo uvedeno.*)

Možných cest je 20, a tedy i myší rodina má 20 členů.

Z7 - II - 4

Ivan čekal s otcem a pejskem Haríkem na vlak. Čas si krátili vážením na osobní váze. Zjistili, že:

---

*) Čtenáři z tříd s rozšířenou výukou matematice a přírodovědným předmětům jistě poznávají ve schematu tabulku Pascalových čísel (sestavenou od zdola). Takže příslušný počet můžeme určit buď Pascalovým, nebo kombinačním číslem

$$P(3, 3) = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

1. Všichni dohromady mají hmotnost 106 kg.
2. Otec je o 50 kg těžší než Ivan s Haríkem.
3. Harík má přesně $\frac{2}{5}$ Ivanovy hmotnosti.

Vypočítejte hmotnost každého z nich.

Řešení 1 - úsudkem. Z podmínky 2 plyne, že otec váží o 25 kg více než je polovina ze 106 kg. Otec má tedy hmotnost 78 kg (53 + 25). Hmotnost Ivana s Haríkem je dohromady 28 kg (53 − 25). Těchto 28 kg tvoří součet hmotnosti Ivana a $\frac{2}{5}$ hmotnosti Ivana (= hmotnost Haríka). Proto 28 kg je rovno $\frac{7}{5}$ hmotnosti Ivana. Odtud snadno vypočítáme, že hmotnost Haríka je 8 kg a hmotnost Ivana 20 kg.

Řešení 2 - rovnicí. Hmotnost Ivana označíme x.

Hmotnost Ivana	x kg
Hmotnost Haríka	$\frac{2}{5}x$ kg
Hmotnost otce	$\left(x + \frac{2}{5}x + 50\right)$ kg
Celkem......................	106 kg

Dostaneme rovnici

$$x + \frac{2}{5}x + \left(x + \frac{2}{5}x + 50\right) = 106$$

Jejím řešením dostaneme kořen

$$x = 20.$$

Ivan má hmotnost 20 kg, Harík 8 kg a otec 78 kg.

Zkouška. Podmínka 1. $20 + 8 + 78 = 106$

Podmínka 2. $78 = (20 + 8) + 50$

Podmínka 3. $8 = \frac{2}{5} \, . \, 20$