34. ročník matematické olympiády

Kategorie A

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Milan Koman (editor); Karol Križalkovič (editor): 34. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1984/85. 26. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. pp. 110–146.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404800

Kategorie A

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

A - I - 1

Nechť $M = A_1A_2\ldots A_n$ je konvexní n-úhelník ($n \geqq 3$), $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reálná čísla. Pro $X \in M$ označme

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i,$$

kde d_i je vzdálenost bodu X od přímky A_iA_{i+1}, $1 \leqq i \leqq n$ ($A_{n+1} = A_1$).

a) Jestliže existují tři body X_1, X_2, X_3 neležící v přímce tak, že

$$f(X_1) = f(X_2) = f(X_3),$$

pak je funkce f konstantní na M.

b) Nalezněte všechny trojúhelníky a čtyřúhelníky, pro které je funkce f při $c_i = 1$ konstantní (tj. součet vzdáleností bodu X od stran M je konstantní).

Řešení. a) Označme $\mathbf{u}_i$ jednotkový normálový vektor přímky A_iA_{i+1} směřující ven z daného n-úhelníku. Vzdálenost d_i bodu $X \in M$ od přímky A_iA_{i+1} pak dostaneme jako skalární součin

$$d_i = (\mathbf{XA}_i, \mathbf{u}_i).$$

Vzhledem k tomu, že

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i = \sum_{i=1}^{n} c_i (\mathbf{XA}_i, \mathbf{u}_i), \text{ je}$$

$$f(X) - f(X_1) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{XA}_i - \mathbf{X}_1\mathbf{A}_i, c_i\mathbf{u}_i) = (\mathbf{XX}_1, \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{u}_i).$$

Rovnost $f(X_1) = f(X_2) = f(X_3)$ tedy znamená, že pro vektor $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{u}_i$ platí

$$(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2, \mathbf{u}) = (\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3, \mathbf{u}) = 0.$$

Avšak vektory $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ a $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3$ jsou lineárně nezávislé, protože body X_1, X_2, X_3 neleží v přímce. Proto musí být $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ a pro libovolný bod $X \in M$ pak platí

$$f(X) - f(X_1) = (\mathbf{XX}_1, \mathbf{u}) = 0,$$

neboli f je na M konstantní.

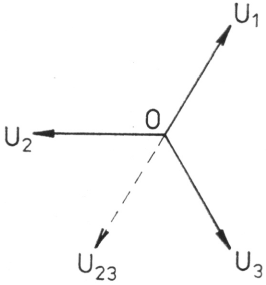
b) Jak plyne z předcházející části, funkce f je pro $c_i = 1$ konstantní na M, právě když

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{o}.$$

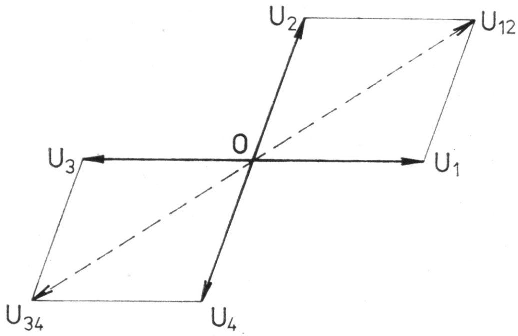
Umístěme vektory $\mathbf{u}_i$ do počátku soustavy souřadnic. Je-li $n = 3$, musí být (obr. 43)

$$|OU_2| = |OU_3| = |OU_{23}| = 1,$$

takže trojúhelník OU_2U_{23} je rovnostranný podobně jako trojúhelník OU_3U_{23}. Vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ tedy svírají navzájem úhel $120°$, odkud plyne, že M je rovnostranný trojúhelník.



Obr. 43



Obr. 44

Je-li $n = 4$, musí být (obr. 44) $|OU_{12}| = |OU_{34}|$, takže trojúhelníky $OU_{12}U_2$, $U_{34}OU_3$, $U_{12}OU_1$ a $OU_{34}U_4$ jsou shodné. Je tedy $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_4$ a $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_3$, což ale znamená, že M je rovnoběžník.

To, že obráceně pro každý rovnostranný trojúhelník a pro každý rovnoběžník je uvedená funkce f při $c_i = 1$ konstantní, je zřejmé.

A - I - 2

Nechť m je přirozené číslo, p prvočíslo. Označme

$$\begin{aligned} m!! &= 1.3.5. \ldots .m \quad \text{pro } m \text{ liché},\\ &= 2.4.6. \ldots .m \quad \text{pro } m \text{ sudé} \end{aligned}$$

tzv. dvojný faktoriál. Určete nejvyšší mocninu prvočísla p, která ještě dělí číslo $m!!$.

Řešení. Nejdříve zjistíme, že pro $m = 2k$ sudé je

$$(2k)!! = 2.4. \ldots .2k = 2^k k!,$$

pro $m = 2k + 1$ liché je

$$(2k+1)!! = 1.3. \ldots .(2k+1) = \frac{(2k+1)!}{(2k)!!} = \frac{m!}{2^k k!}.$$

Je-li p prvočíslo, je mezi n činiteli čísla $n!$ právě $\left[\dfrac{n}{p}\right]$ čísel tvaru p, $2p$, $3p$, ..., kde $[x]$ označuje největší celé číslo nejvýše rovné x. Mezi těmito čísly je ovšem ještě právě $\left[\dfrac{n}{p^2}\right]$

čísel dělitelných p^2 a ovšem ještě $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ čísel dělitelných dokonce p^3 atd. Celkem můžeme tedy z čísla $n!$ vytknout p^a, kde

$$a = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots = \sum_{i \geqq 1} \left[\frac{n}{p^i}\right]$$

(přitom uvedený součet má zřejmě jen konečný počet nenulových sčítanců).

Pro $m = 2k$ je tedy

$$a = \sum_{i \geqq 1} \left[\frac{k}{p^i}\right] \quad \text{pro} \quad p > 2,$$

$$a = k + \sum_{i \geqq 1} \left[\frac{k}{2^i}\right] = \sum_{i \geqq 0} \left[\frac{k}{2^i}\right] \quad \text{pro} \quad p = 2.$$

Pro $m = 2k + 1$ je

$$a = \sum_{i \geqq 1} \left(\left[\frac{m}{p^i}\right] - \left[\frac{k}{p^i}\right]\right) \quad \text{pro} \quad p > 2,$$

$$a = \sum_{i \geqq 1} \left(\left[\frac{m}{2^i}\right] - \left[\frac{k}{2^i}\right]\right) - k = \sum_{i \geqq 1} \left(\left[\frac{m}{2^i}\right] - \left[\frac{k}{2^{i-1}}\right]\right) =$$

$= 0$ pro $p = 2$,

protože pro $i \geqq 1$ je $\left[\frac{2k + 1}{2^i}\right] = \left[\frac{k}{2^{i-1}}\right]$.

Místo posledního výpočtu si ovšem můžeme uvědomit, že $m!!$ je pro liché m rovněž liché.

A - I - 3

Dokažte, že

a) v tětivovém pětiúhelníku s vnitřními úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ (v tomto pořadí) platí

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_5 = 3\pi,$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 > \pi, \alpha_2 + \alpha_4 > \pi, \ldots, \alpha_5 + \alpha_2 > \pi;$$

b) jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ duté úhly $(0 < \alpha_i < \pi)$ splňující všechny uvedené vztahy, pak existuje tětivový pětiúhelník s vnitřními úhly α_i (v tomto pořadí).

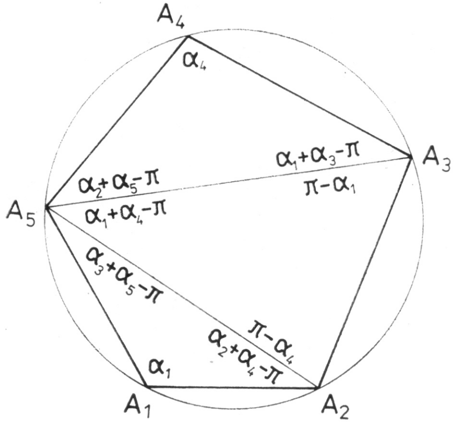
Řešení. Část a) je velmi jednoduchá. Snadno zjistíme (rozdělením na trojúhelníky), že součet úhlů v libovolném n-úhelníku (i nekonvexním, požadujeme pouze, aby se uzavřená lomená čára určená posloupností vrcholů n-úhelníku neprotínala) je $(n - 2)\pi$. Je tedy speciálně

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_5 = 3\pi.$$

Dále použijeme toho, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když pro jeho úhly platí $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$. Pomocí tohoto vztahu spočteme úhly na obr. 45. Odtud plynou nerovnosti

$$\alpha_1 + \alpha_3 > \pi, \alpha_2 + \alpha_4 > \pi, \ldots, \alpha_5 + \alpha_2 > \pi.$$

b) Splňují-li duté úhly α_i uvedené nerovnosti, můžeme sestrojit trojúhelník $A_1A_2A_5$ s úhly α_1, $\alpha_3 + \alpha_5 - \pi$, $\alpha_2 +$



Obr. 45

$+ \alpha_4 - \pi$ a v polorovině opačné k $A_2A_5A_1$ trojúhelník $A_2A_3A_5$ s úhly $\pi - \alpha_4$, $\pi - \alpha_1$, $\alpha_1 + \alpha_4 - \pi$. Protože $|\sphericalangle A_5A_1A_2| + |\sphericalangle A_2A_3A_5| = \alpha_1 + \pi - \alpha_1 = \pi$, leží vrchol A_3 na kružnici opsané trojúhelníku $A_1A_2A_5$. Podobně lze sestrojit trojúhelník $A_5A_3A_4$ v polorovině opačné k $A_3A_5A_2$, a protože $|\sphericalangle A_5A_2A_3| + |\sphericalangle A_3A_4A_5| = \pi$, leží vrchol A_5 na kružnici opsané čtyřúhelníku $A_1A_2A_3A_4$. Takto sestrojený pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ je tedy tětivový a snadno zjistíme, že jeho úhly jsou $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$.

A - I - 4

Nechť x_i jsou kladná reálná čísla, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 2$. Pak pro každé celé k, $1 \leqq k < n$, je

$$\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} x_i + \frac{1}{(n-k)^2}\sum_{i=k+1}^{n} x_i \geqq 2.$$

Dokažte.

Řešení. Položme nejprve

$$y_i = \frac{1}{k}, \quad 1 \leqq i \leqq k,$$

$$y_i = \frac{1}{n-k}, \quad k+1 \leqq i \leqq n.$$

Máme tedy dokázat nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 x_i \geqq 2 = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Uvedená nerovnost však plyne z Cauchyovy nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2};$$

stačí, když napíšeme

$$2 = \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \sqrt{x_i}\,\frac{1}{\sqrt{x_i}} \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 x_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}},$$

a protože $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 2$, plyne odtud požadovaná nerovnost.

Najděte nejmenší k taková, že platí: je-li dán libovolný trojúhelník ABC se stranami $a \leqq b \leqq c$, pak existuje

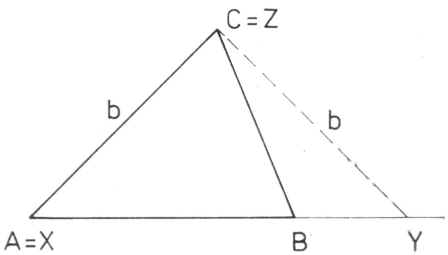
a) rovnoramenný trojúhelník XYZ,

b) pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYZ,

který obsahuje trojúhelník ABC a pro jehož obsah platí

$$P_{XYZ} \leqq kb^2.$$

Řešení. a) Uvažujme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC, jeho obsah je $P_{ABC} = \dfrac{1}{2} b^2$. Pro každý rovnoramenný trojúhelník XYZ, který obsahuje trojúhelník ABC, je tedy $P_{XYZ} \geqq \dfrac{1}{2} b^2$, tedy $k \geqq \dfrac{1}{2}$. Zároveň je zřejmé, že ke každému trojúhelníku ABC se stranami $a \leqq b \leqq c$ sestrojíme rovnoramenný trojúhelník XYZ s vrcholy $X = A$, $Z = C$, jehož dvě ramena mají délku b (obr. 46) a jehož obsah je $P_{XYZ} =$

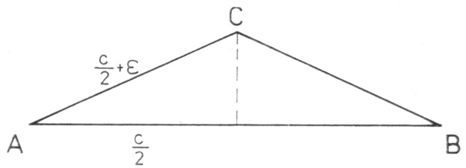


Obr. 46

$= \frac{1}{2} b^2 \sin\gamma \leqq \frac{1}{2} b^2$. Odtud plyne, že v tomto případě je $k = \frac{1}{2}$.

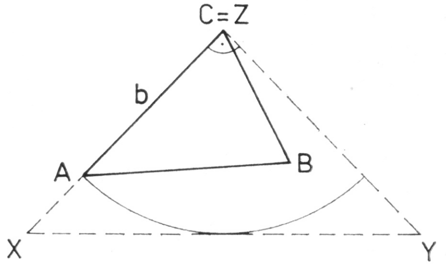
b) Pro každý pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYZ, který obsahuje trojúhelník ABC se stranami $a \leqq b \leqq c$, zřejmě platí, že jeho přepona je alespoň c, je tedy $P_{XYZ} \geqq \geqq \frac{1}{4} c^2$.

Uvažujme rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou c a rameny délky $b = \frac{c}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (obr. 47). Pro takový trojúhelník pak ale máme $P_{XYZ} \geqq (b - \varepsilon)^2$, což musí platit pro libovolné $\varepsilon > 0$, je tedy $k \geqq 1$.



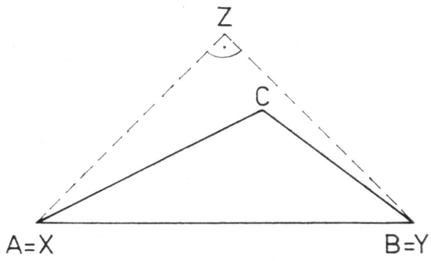
Obr. 47

Je-li nyní ABC ostroúhlý (nebo pravoúhlý) trojúhelník se stranami $a \leqq b \leqq c$, pak leží v pravoúhlé kruhové výseči se středem C a poloměrem b (obr. 48), a pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYZ, který obsahuje uvedenou výseč a má pravý úhel při vrcholu $Z = C$, má obsah $P_{XYZ} = b^2$.

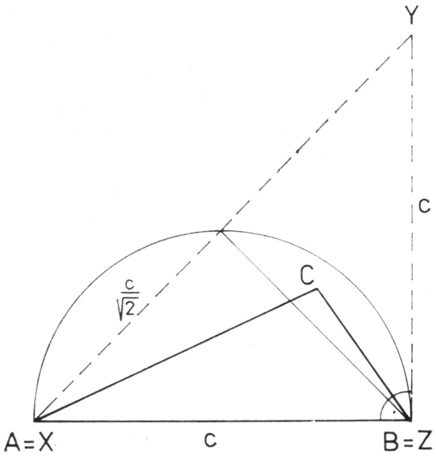


Obr. 48

Je-li ABC tupoúhlý trojúhelník se stranami $a \leqq b \leqq c$, pak je buď celý obsažen v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku s přeponou c (obr. 49), anebo je obsažen v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku s odvěsnou c (obr. 50). První případ nastane pro $\alpha \leqq \beta \leqq 45°$, přičemž $P_{XYZ} = \frac{c^2}{4} \leqq b^2$, protože $c \leqq a + b \leqq 2b$. V druhém případě je $45° < \beta < 90°$ a $b \geqq \frac{c}{\sqrt{2}}$, takže $P_{XYZ} = \frac{1}{2} c^2 \leqq b^2$. V případě b) je tedy $k = 1$.

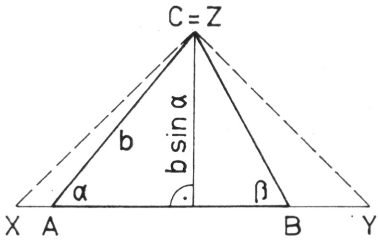


Obr. 49



Obr. 50

Poznámka. Pro ostroúhlý trojúhelník ABC se stranami $a \leqq b \leqq c$ můžeme ovšem najít pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYZ, který splňuje nerovnost $P_{XYZ} \leqq \frac{3}{4} b^2$.



Obr. 51

Je-li $\alpha \leqq 45°$, stačí sestrojit trojúhelník XYZ s vrcholy $X = A$, $Z = C$ a pravým úhlem při vrcholu Z. Pro $45° < < \alpha \leqq 60°$ sestrojíme trojúhelník XYZ s pravým úhlem při vrcholu $Z = C$ a s výškou, která splývá s výškou trojúhelníku ABC (obr. 51). Pak je $P_{XYZ} = b^2 \sin^2\alpha \leqq \frac{3}{4} b^2$.

Je pro ostroúhlý trojúhelník ABC konstanta $k = \frac{3}{4}$ nejmenší?

A - I - 6

Mějme n^2 reálných čísel uspořádaných do čtvercové tabulky $n \times n$ a nechť je jejich součet roven nule. Označme C aritmetický průměr čtverců těchto čísel, s_j aritmetický průměr čísel v j-tém sloupci, r_i aritmetický průměr čísel v i-tém řádku tabulky, S bude aritmetický průměr čísel s_j^2 a R aritmetický průměr čísel r_i^2. Potom platí nerovnost

$$C \geqq R + S.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

Řešení. Označme x_{ij} číslo v i-tém řádku a j-tém sloupci tabulky. Potom platí

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} = 0, \quad r_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad s_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij},$$

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i^2, \quad S = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} s_j^2.$$

Zřejmě také platí

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} s_j = 0,$$

takže je

$$\sum_{i,j=1}^{n} r_i s_j = \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{j=1}^{n} s_j = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (r_i + s_j)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (r_i^2 + 2r_i s_j + s_j^2) = \sum_{i,j=1}^{n} (r_i^2 + s_j^2).$$

Zároveň je

$$R + S = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{j=1}^{n} s_j^2 \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} (r_i^2 + s_j^2),$$

máme tedy dokázat nerovnost

$$\sum_{i,j=1}^{n} (r_i + s_j)^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2.$$

Položme

$$d_{ij} = x_{ij} - (r_i + s_j),$$

pak je

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} - ns_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - nr_i = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (d_{ij} + r_i + s_j)^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (r_i + s_j)^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} (r_i + s_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (r_i + s_j)^2 \geqq \sum_{i,j=1}^{n} (r_i + s_j)^2,$$

což jsme chtěli dokázat. Přitom rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je

$$d_{ij} = 0, \quad \text{tj.} \quad x_{ij} = r_i + s_j.$$

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

A - S - 1

Dané sú reálne nezáporné čísla a_1, a_2, b_1, b_2. Dokážte, že platí

$$(a_1b_1 + a_2b_2)(a_1b_2 + a_2b_1) \leqq \frac{(a_1 + a_2)^2 (b_1 + b_2)^2}{4} .$$

Kedy platí rovnosť?

Řešení. Pro libovolná dvě reálná čísla platí

$$xy \leqq \frac{(x + y)^2}{4},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $x = y$. Položíme-li $x = a_1b_1 + a_2b_2$, $y = a_1b_2 + a_2b_1$, dostaneme dokazovanou nerovnost, přičemž rovnost platí, právě když

$$a_1b_1 + a_2b_2 = a_1b_2 + a_2b_1,$$

což můžeme upravit na tvar

$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = 0.$$

V uvedené nerovnosti tedy nastane rovnost, právě když je $a_1 = a_2$ nebo $b_1 = b_2$.

A - S - 2

Je dán konvexní tětivový pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ s vnitřními úhly α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 (v tomto pořadí). Vypočtěte velikosti β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 úhlů $A_4A_1A_3$, $A_5A_2A_4$, $A_1A_3A_5$, $A_2A_4A_1$, $A_3A_5A_2$.

Řešení. Čtyřúhelníky $A_1A_2A_3A_4$ a $A_1A_3A_4A_5$ jsou tětivové. V trojúhelníku $A_1A_3A_4$ tedy platí

$$|\sphericalangle A_1A_4A_3| = 180° - \alpha_2,$$

$$|\sphericalangle A_1A_3A_4| = 180° - \alpha_5,$$

takže

$$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_5 - 180°,$$

ostatní velikosti dostaneme cyklickou záměnou indexů:

$$\beta_2 = \alpha_3 + \alpha_1 - 180°, \beta_3 = \alpha_4 + \alpha_2 - 180°,$$

$$\beta_4 = \alpha_5 + \alpha_3 - 180°, \beta_5 = \alpha_1 + \alpha_4 - 180°.$$

A - S - 3a

V rovině se zvolenou pravoúhlou soustavou souřadnic je dán rovnostranný trojúhelník se stranou délky $2\sqrt{3}$ a kruh o poloměru $\frac{1}{2}$. Dokažte, že existuje aspoň jeden mřížový bod, který leží uvnitř daného trojúhelníku a neleží uvnitř daného kruhu. (Mřížový bod je bod, jehož obě souřadnice jsou celá čísla.)

Řešení. Poloměr kružnice vepsané danému trojúhelníku je 1, proto odpovídající kruh K obsahuje aspoň dva mřížové body. Každý bod roviny leží totiž aspoň ve dvou kruzích o poloměru 1 se středy v mřížových bodech. Přitom leží buď dva mřížové body uvnitř kruhu, nebo je středem kruhu K mřížový bod a další čtyři mřížové body leží na jeho hranici, takže nejvýše jeden z nich leží na hranici daného trojúhelníku. V každém případě leží uvnitř daného trojúhelníku aspoň dva mřížové body. Uvnitř každého kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$ však leží nejvýše jeden mřížový bod, proto aspoň jeden mřížový bod leží uvnitř daného trojúhelníku a neleží uvnitř daného kruhu.

A - S - 3b

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je najmenší spoločný násobok čísel $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ deliteľný číslom $\binom{2n}{n}$.

Řešení. Číslo $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$ rozložíme v součin mocnin prvočísel; nechť v tomto rozkladu je prvočíslo p s exponentem a. Pak je

$$a = \sum_{i \geqq 1} \left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2 \sum_{i \geqq 1} \left[\frac{n}{p^i}\right].$$

Protože pro každé reálné číslo x je $0 \leqq [2x] - 2[x] \leqq 1$, rovná se a nejvýše počtu nenulových sčítanců v prvním součtu, tedy $a \leqq b$, kde b je největší celé číslo, pro něž ještě platí $p^b \leqq 2n$. Číslo p^a tedy dělí jedno z čísel $1, 2, \ldots, 2n$, totiž p^b, proto p^a dělí i jejich nejmenší společný násobek. Protože to platí pro každé prvočíslo p v rozkladu čísla $\binom{2n}{n}$ na prvočinitele, je důkaz hotov.

ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

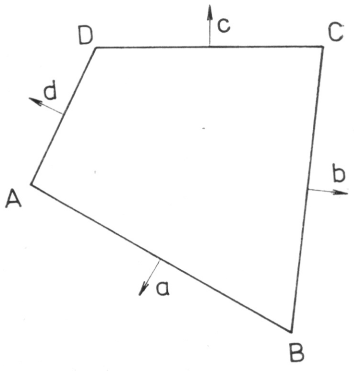
Je-li X vnitřním bodem konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, označme u, v, x, y jeho vzdálenosti od přímek AB, BC,

CD, DA. Dokažte, že existují kladná čísla α, β, γ, δ taková, že součet $\alpha u + \beta v + \gamma x + \delta y$ je stejný pro všechny vnitřní body čtyřúhelníku $ABCD$.

Řešení. Úsečky AX, BX, CX a DX rozdělí čtyřúhelník $ABCD$ na čtyři nepřekrývající se trojúhelníky, proto je $|AB|u + |BC|v + |CD|x + |DA|y = 2P$, kde P je obsah čtyřúhelníku $ABCD$. Uvedený součet tedy nezávisí na volbě bodu X uvnitř či na hranici čtyřúhelníku, můžeme proto za α, β, γ a δ vzít velikosti úseček AB, BC, CD a DA, případně jejich násobky libovolným kladným číslem k.

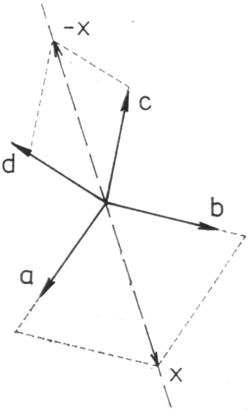
Jiné řešení. Můžeme ovšem také použít stejného postupu jako při řešení úlohy A-I-1. Označíme-li $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vnější normálové (jednotkové) vektory jednotlivých stran čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 52), máme dokázat existenci kladných čísel α, β, γ, δ takových, že $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

Z lineární závislosti čtyř vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ v rovině plyne



Obr. 52

pouze existence *reálných* konstant. Stačí si však uvědomit, že vektory **a**, **b**, **c**, **d** při umístění do počátku nemohou všechny ležet v jedné polorovině (libovolné dva sousední vektory spolu svírají dutý úhel), existuje tedy přímka (obr. 53),



Obr. 53

která prochází počátkem a leží jak mezi vektory **a**, **b**, tak mezi vektory **c**, **d**. Vezmeme-li libovolné dva opačné vektory ve směru uvedené přímky, je zřejmé, že existují kladná čísla α, β a γ, δ taková, že

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \; -\mathbf{x} = \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d},$$

tj.

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Můžeme si ovšem též uvědomit, že vektor **a** dostaneme z vektoru **AB** otočením o $-90°$ a vynásobením číslem $|\mathbf{AB}|$, podobně dostaneme i další vektory **b**, **c**, **d**. Protože **AB** + + **BC** + **CD** + **DA** = **0**, plyne odtud stejný výsledek jako v prvním řešení.

A - II - 2

Dané sú celé čísla n, k také, že $n > k > 0$. Dokážte, že existujú celé nezáporné čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ také, že

$$k(c_1 + \ldots + c_k) + (n - k)(c_{k+1} + \ldots + c_n) \leqq$$

$$\leqq p(c_1 + \ldots + c_p) + (n - p)(c_{p+1} + \ldots + c_n)$$

platí pre všetky $p \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$.

Řešení. Takto formulovaná úloha je vcelku triviální, neboť za celá *nezáporná* čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ můžeme ve všech nerovnostech volit samé nuly. K osudné záměně s čísly celými kladnými došlo až při konečné úpravě textů úloh II. kola, když se ukázalo, že termín »přirozená čísla« není v současných školních textech jednotně definován. Pro úplnost uveďme ještě i »netriviální« řešení.

Podobně jako při řešení úlohy A-I-4 použijeme nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 x_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2,$$

která pro nezáporná reálná čísla x_i, y_i, $x_i \neq 0$, plyne z Cauchyovy nerovnosti. Pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = p$, $x_{p+1} = \ldots = x_n = n - p$ $(1 \leqq p < n)$ a pro $y_i = \sqrt{c_i}$ dostaneme nerovnosti

$$p(c_1 + \ldots + c_p) + (n - p)(c_{p+1} + \ldots + c_n) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2}(\sqrt{c_1} + \ldots + \sqrt{c_n})^2.$$

Pro dané k, $0 < k < n$, zkusme položit $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = A$, $c_{k+1} = c_{k+2} = \ldots = c_n = B$, pak je

$$\frac{1}{2}(\sqrt{c_1} + \ldots + \sqrt{c_n})^2 = \frac{1}{2}(k\sqrt{A} + (n - k)\sqrt{B})^2$$

a

$$k(c_1 + \ldots + c_k) + (n - k)(c_{k+1} + \ldots + c_n) =$$

$$= k^2A + (n - k)^2B.$$

Rovnost

$$\frac{1}{2}(k\sqrt{A} + (n - k)\sqrt{B})^2 = k^2A + (n - k)^2B,$$

neboli

$$(k\sqrt{A} - (n - k)\sqrt{B})^2 = 0$$

je splněna např. pro celá kladná čísla $A = (n - k)^2$, $B = k^2$.

Uvedeným nerovnostem tedy vyhovují např. přirozená čísla $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = (n - k)^2$, $c_{k+1} = \ldots = c_n = k^2$.

Nájdite všetky celé nezáporné čísla k také, že $\binom{2k-1}{k}$ je číslo nepárne.

Řešení. Podle definice kombinačního čísla je

$$\binom{2k-1}{k} = \frac{(2k-1)!}{(k-1)!\,k!} =$$

$$= \frac{1.3.5.\ \ldots\ .(2k-1).2.4.\ \ldots\ .(2k-2)}{(k-1)!\,k!} =$$

$$= (2k-1)!!\,\frac{2^{k-1}}{k!}\,.$$

Číslo $(2k-1)!!$ je liché a pro nejvyšší mocninu 2^a, která dělí číslo $k!$, platí (viz řešení úlohy A-I-2)

$$a = \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{k}{2^s}\right],$$

kde $2^s \leqq k < 2^{s+1}$. Zároveň je

$$a \leqq \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \ldots + \frac{k}{2^s} = k\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) =$$

$$= k - \frac{k}{2^s} \leqq k - 1.$$

Protože číslo $\binom{2k-1}{k}$ je liché, právě když $a = k - 1$, plyne z uvedené nerovnosti, že číslo $\binom{2k-1}{k}$ je liché právě pro všechna přirozená čísla k tvaru $k = 2^s$, kde s je celé nezáporné.

A - II - 3b

V rovině se zvolenou pravoúhlou soustavou souřadnic je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, úhlem γ při vrcholu C a výškou na základnu

$$v_c = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right).$$

Dokažte, že trojúhelník ABC obsahuje aspoň čtyři mřížové body.

Řešení. Pro poloměr r kružnice vepsané trojúhelníku ABC platí

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{v_c - r},$$

takže je

$$v_c = \sqrt{2}\left(1 + \frac{v_c - r}{r}\right) = \frac{\sqrt{2}}{r}\,v_c,$$

neboli $r = \sqrt{2}$. Ovšem v každém kruhu o poloměru $\sqrt{2}$ leží aspoň čtyři mřížové body, protože každý bod leží v některém jednotkovém čtverci s vrcholy v mřížových bodech a jeho vzdálenost od každého z vrcholů tohoto čtverce je nejvýše $\sqrt{2}$.

ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

V rovině je dán pravidelný 1 985-úhelník. Každou jeho stranou proložme přímku. Určete počet částí, na které tyto přímky rozdělí rovinu.

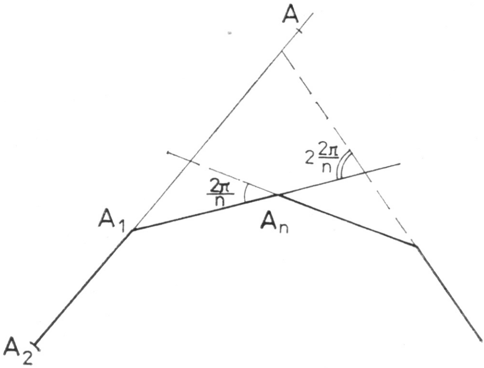
Řešení. Uvažujme n přímek v rovině takových, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem (to nastane speciálně i tehdy, proložíme-li přímky stranami pravidelného n-úhelníku, je-li n liché). Označme $p(n)$ počet oblastí, na které těchto n přímek rozdělí rovinu. Zřejmě je $p(3) = 7$. Je-li nyní p další přímka, která protíná každou z n uvažovaných přímek, rozdělí n průsečíků přímku p na $n + 1$ částí a přitom každá z těchto částí přímky p dělí některou z $p(n)$ oblastí na dvě části. Je tedy $p(n + 1) = p(n) + n + 1$. Odtud plyne, že

$$p(n) = n + p(n - 1) = n + (n - 1) + \dots + 4 + p(3) = \frac{n(n + 1)}{2} + 1.$$

Pro $n = 1\,985$ máme $p(1\,985) = 1\,985 \cdot 993 + 1 = 1\,971\,106$.

Poznámka. Soustava přímek v rovině rozdělí rovinu na části, jejichž počet pro danou soustavu označme s, počet průsečíků přímek soustavy označme v a počet hran (tj. těch částí přímek, na něž jsou přímky rozděleny jednotlivými průsečíky) označme h. Pak platí (Eulerova věta) $s + v = h + 1$ (jsme v rovině, nikoli v prostoru!). Protože průsečíky i hrany můžeme snadno spočítat, dostaneme odtud též předchozí výsledek.

Jiné řešení. Uvažujme uvedenou úlohu pro libovolný pravidelný n-úhelník a označme $p(n)$ počet částí, na které příslušné přímky rozdělí rovinu. Spočtěme nejprve počet



Obr. 54

$s(n)$ těch částí roviny, které leží v úhlu AA_1A_n, kde A_1A je polopřímka opačná k polopřímce A_1A_2 (obr. 54). Z velikostí úhlů snadno zjistíme, že vnitřkem úhlu AA_1A_n prochází právě k přímek A_jA_{j+1}, kde k je největší celé číslo takové, že $k\dfrac{2\pi}{n} < \pi$. Ty rozdělí úhel AA_1A_n na $k + 1$

částí, tedy

$$s(n) = k + 1 = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Všechny vnější části zřejmě dostaneme postupným otáčením kolem středu pravidelného n-úhelníku o úhel $\frac{2\pi}{n}$, je tedy

$$p(n) = 1 + n\,s(n) = 1 + n\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Pro $n = 1\,985$ odtud máme $p(1\,985) = 1\,985 . 993 + 1$.

A - III - 2

Nech A_1, A_2, A_3 sú neprázdné množiny celých čísel také, že pre $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ platí

$$(x \in A_i, y \in A_j) \Rightarrow [(x + y) \in A_k, (x - y) \in A_k].$$

Dokážte, že aspoň dve z množín A_1, A_2, A_3 sa rovnajú. Môžu byť niektoré z týchto množín disjunktné?

Řešení. Nechť $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Obsahuje-li některá z množin A_1, A_2, A_3 nulu, řekněme A_j, pak je zřejmě $A_i = A_k$. Podle předpokladu je totiž pro libovolné $x \in A_i$ také $x + 0 \in A_k$, tj. $A_i \subset A_k$, a obráceně, napíšeme-li implikaci ve tvaru

$$(x \in A_k, y \in A_j) \Rightarrow [(x + y) \in A_i, (x - y) \in A_i],$$

dostaneme pro $y = 0$ zas inkluzi $A_k \subset A_i$. (Rozmyslete si dobře tuto formální úvahu, která využívá rovnosti množin $\{i, j, k\} = \{k, j, i\}$. Je dobře si uvědomit, že při konkrétní volbě indexů i, j, k dává předpoklad úlohy vlastně tři různé implikace pro množiny A_1, A_2, A_3.) Odtud plyne, že pro dvě z množin A_1, A_2, A_3 s neprázdným průnikem, $A_i \cap A_k \neq \emptyset$, pak už musí být $A_i = A_k$, neboť pro $y \in A_i \cap A_k$ z předpokladu plyne $0 = y - y \in A_j$. Navíc zřejmě platí $x \in A_i$, právě když $-x \in A_i$.

Můžeme tedy dále předpokládat, že nula neleží v žádné z množin A_1, A_2, A_3 a že všechny tři množiny jsou navzájem disjunktní. Označme $m_i = \min \{|x|: x \in A_i\} > 0$ a zvolme označení tak, aby platilo $m_i > m_j > m_k$. Pak je ale také $m_i > m_j - m_k$, to je však spor s definicí čísla m_i, neboť podle předpokladu je $m_j - m_k \in A_i$. Tím je důkaz hotov.

Je-li L množina všech lichých celých čísel a S množina všech sudých čísel, mají množiny L, L, S požadované vlastnosti a je $L \cap S = \emptyset$.

Pokuste se popsat všechny množiny A_1, A_2, A_3, které splňují podmínky úlohy! Jakou roli tu hraje Euklidův algoritmus?

A - III - 3

Jsou-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektory v rovině takové, že součet jejich délek je alespoň 1, pak mezi nimi najdeme vektory, jejichž součet bude vektor délky alespoň $\sqrt{2}/8$. Dokažte.

Řešení. Zvolme v rovině kartézskou soustavu souřadnic a označme (a_j, b_j) souřadnice vektoru $\mathbf{u}_j$. Je-li $M = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$, položme

$$\mathsf{M}_1 = \{(a, b) \in \mathsf{M}: |b| \leqq a\},$$
$$\mathsf{M}_2 = \{(a, b) \in \mathsf{M}: |a| \leqq b\},$$
$$\mathsf{M}_3 = \{(a, b) \in \mathsf{M}: |b| \leqq -a\},$$
$$\mathsf{M}_4 = \{(a, b) \in \mathsf{M}: |a| \leqq -b\}.$$

Protože $\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2 \cup \mathsf{M}_3 \cup \mathsf{M}_4 = \mathsf{M}$, musí podle předpokladu aspoň pro jednu z uvedených množin platit

$$\sum_{(a_j, b_j) \in \mathsf{M}_k} \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \geqq \frac{1}{4},$$

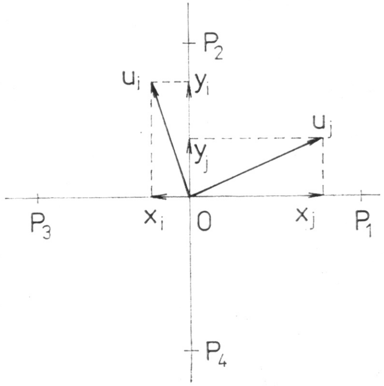
pišme $\mathsf{M}_k = \{(c_1, d_1), \ldots, (c_m, d_m)\}$. Protože pro reálná čísla x, y platí

$$\max(|x|, |y|) \geqq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 + y^2},$$

je podle definice množiny M_k buď $|\sum c_j| \geqq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ (to když $k \in \{1, 3\}$), nebo $|\sum d_j| \geqq \frac{\sqrt{2}}{8}$ (je-li $k \in \{2, 4\}$). Vektor $(c_1, d_1) + \ldots + (c_m, d_m)$ má tedy délku alespoň $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Jiné řešení. Zvolme v rovině kartézskou soustavu souřadnic a umístěme všechny vektory $\mathbf{u}_j$, $1 \leqq j \leqq n$, do počátku. Každý z vektorů rozložme na součet dvou vektorů (obr. 55)

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j,$$



Obr. 55

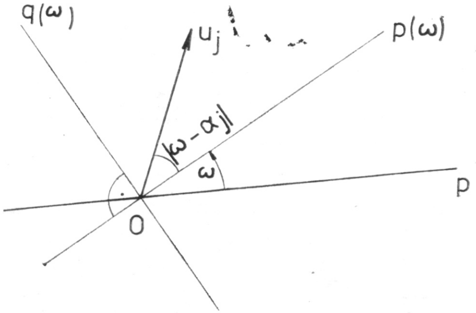
kde $\mathbf{x}_j$ má směr osy x a $\mathbf{y}_j$ má směr osy y. Protože

$$|\mathbf{u}_j| \leqq |\mathbf{x}_j| + |\mathbf{y}_j|,$$

je součet délek všech projekcí $\mathbf{x}_j$ a $\mathbf{y}_j$ rovněž alespoň 1. Z polopřímek OP_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ můžeme tedy vybrat takovou, že příslušné projekce vektorů $\mathbf{u}_j$ na ni budou mít součet délek alespoň $\frac{1}{4}$. Projekce součtu vektorů na přímku je součtem jednotlivých projekcí, má tedy součet odpovídajících vektorů na vybranou polopřímku projekci délky alespoň $\frac{1}{4}$, takže tento součet je vektor délky aspoň $\frac{1}{4} > \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Jiné řešení. Zvolme libovolnou přímku p v dané rovině a bod O na p a uvažujme libovolnou přímku $p(\omega)$ procházející bodem O a svírající s přímkou p úhel ω, $\omega \in (0, \pi)$ (obr. 56). Umístěme všechny vektory $\mathbf{u}_j$ do bodu O a označme α_j úhel, který vektor $\mathbf{u}_j$ svírá s přímkou p, součet délek projekcí vektorů $\mathbf{u}_j$ na přímku $p(\omega)$ pak je

$$\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{u}_j|\ |\cos(\omega - \alpha_j)|,$$



Obr. 56

přičemž pro vektory v jedné z polorovin určených kolmicí $q(\omega)$ na přímku $p(\omega)$ v bodě O je tento součet aspoň

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{u}_j|\ |\cos(\omega - \alpha_j)|.$$

Označme $S(\omega)$ příslušnou množinu indexů těch vektorů, které leží v uvedené polorovině. Definujeme-li na intervalu $(0, \pi)$ funkci f předpisem

$$f(\omega) = \Big|\sum_{j \in S(\omega)} \mathbf{u}_j\Big|,$$

je zřejmě

$$f(\omega) \geqq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{u}_j| \, |\cos(\omega - \alpha_j)|.$$

Přitom f je nezáporná funkce, pro kterou platí

$$\int_0^\pi f(\omega)\, d\omega \geqq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{u}_j| \int_0^\pi |\cos(\omega - \alpha_j)|\, d\omega =$$

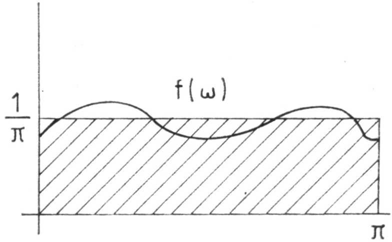
$$= \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{u}_j| \geqq 1,$$

neboť funkce $|\cos\omega|$ je periodická s periodou π a je

$$\int_0^\pi |\cos(\omega - \alpha_j)|\, d\omega = \int_0^\pi |\cos \omega|\, d\omega = 2.$$

Z nerovnosti

$$\int_0^\pi f(\omega)\, d\omega \geqq 1$$



Obr. 57

ovšem plyne, že existuje aspoň jedna hodnota $\omega \in (0, \pi)$, pro kterou je $f(\omega) \geqq \frac{1}{\pi}$ (obr. 57 - jinak by muselo být $\int_0^\pi f(\omega)\, d\omega < 1$), tj. existuje dokonce taková podmnožina množiny vektorů $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, pro niž má vektor součtu délku aspoň $\frac{1}{\pi} > \frac{1}{4} > \frac{\sqrt{2}}{8}$.

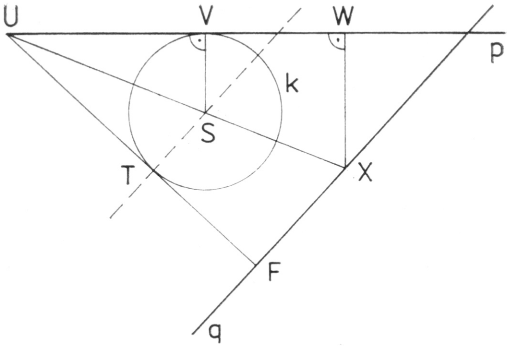
Poznámka. Hodnotu $\frac{1}{\pi}$ již nelze zlepšit, protože pro množinu $n = 2k$ vektorů umístěných ve středu pravidelného $2k$-úhelníku a s koncovými body v jeho vrcholech se tato hodnota asymptoticky nabývá. Pro pevné n však obecně lze konstantu $\frac{1}{\pi}$ ještě zlepšit.

A - III - 4

V rovině jsou dány dvě přímky p, q a na přímce q bod F, $F \notin p$. Určete množinu všech bodů X, které lze dostat touto konstrukcí:

V rovině zvolíme bod S, který neleží ani na p, ani na q, a sestrojíme kružnici k se středem S, která se dotýká přímky p. Na kružnici k zvolíme bod T tak, aby $ST \parallel q$. Protne-li přímka FT přímku p v bodě U, je X průsečík přímek SU a q.

Řešení. Označme V bod dotyku kružnice k s přímkou p, takže $|SV| = |ST|$. Označíme-li W kolmý průmět bodu X na přímku p, pak z podobnosti zřejmě plyne (obr. 58) $|XW| = |XF|$, bod X tedy leží na parabole s ohniskem F a řídicí



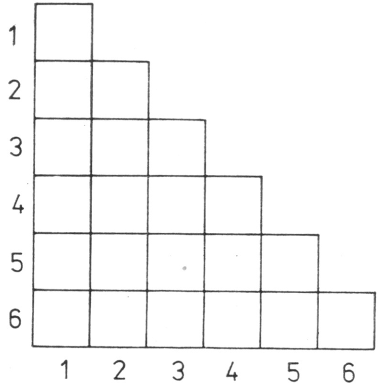
Obr. 58

přímkou p. Množina bodů X tedy nezávisí na volbě bodu S a je dána pouze vzájemnou polohou přímky q a paraboly určené bodem F a přímkou p. Pokud je $p \perp q$, je hledaná množina jednobodová, v opačném případě dostaneme dva body, které popsanou konstrukcí snadno sestrojíme.

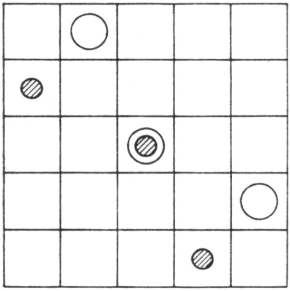
A - III - 5

Je dána trojúhelníková tabulka s n řádky a n sloupci (na obr. 59 pro $n = 6$). V každém políčku tabulky je napsáno některé z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se v sjednocení k-tého řádku a k-tého sloupce vyskytují všechna čísla $1, 2, \ldots, n$. Dokažte, že v případě lichého n je každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ napsáno v posledním políčku některého řádku.

Řešení. Doplňme tabulku na šachovnici $n \times n$ (obr. 60). Pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme M množinu těch polí tabulky, na kterých je napsáno číslo i, a M' množinu souměrně sdru-



Obr. 59



Obr. 60

ženou s M podle úhlopříčky šachovnice procházející levým horním rohem. Z předpokladu úlohy plyne, že v každém řádku i v každém sloupci šachovnice leží právě jedno políčko z množiny $M \cup M'$. Označíme-li D množinu polí úhlopříčky, platí

$$n = |M \cup M'| = 2\,|M| - |M \cap D|,$$

takže $|M \cap D|$ je pro liché n rovněž liché číslo a číslo i se proto na úhlopříčce vyskytuje aspoň jednou. Protože úhlopříčka má n políček, je tvrzení úlohy dokázáno.

A - III - 6

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n > 1$ existuje poradie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čísel $1, 2, \ldots, n$ také, že číslo a_{j+1} delí súčet $a_1 + a_2 + \ldots + a_j$ pre každé $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Řešení. Snadno je vidět, že platí-li tvrzení úlohy pro $n > 1$ sudé, platí i pro $n + 1$, protože $n + 1$ dělí součet $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, takže stačí pak vzít $a_{n+1} = n + 1$.

Nechť tedy $n = 2k$, pak je $1 + 2 + \ldots + n = k(2k + 1)$. Především musí platit $a_{2k} \mid k(2k + 1)$. Zkusme tedy položit $a_{2k} = k$, pak by mělo být $a_{2k-1} \mid k \cdot 2k$, vezměme proto $a_{2k-1} = 2k$, atd. Takto zjistíme, že pořadí

$$k + 1, 1, k + 2, 2, \ldots, 2k, k$$

vyhovuje podmínce úlohy. Opravdu, pro $1 \leqq i \leqq k$ snadno spočteme, že je

$$(k + 1) + 1 + (k + 2) + \ldots + (k + i) =$$

$$= ik + \frac{i(i + 1)}{2} + \frac{i(i - 1)}{2} = i(k + i)$$

a

$$(k + 1) + 1 + (k + 2) + \ldots + (k + i) + i = i(k + i + 1).$$

To však není jediné pořadí, které splňuje podmínky úlohy. Řešením je i pořadí

$$2k, 2, k + 1, 3, \ldots, 2k - 1, 1,$$

neboť pro $1 \leqq i \leqq k - 2$ je

$$2k + 2 + (k + 1) + 3 + \ldots + (k + i) =$$

$$= 2k - 1 + \frac{(i + 1)(i + 2)}{2} + ik + \frac{i(i + 1)}{2} =$$

$$= k(i + 2) + (i + 1)^2 - 1 = (i + 2)(k + i)$$

a

$$2k + 2 + (k + 1) + 3 + \ldots + (k + i) + (i + 2) =$$

$$= (i + 2)(k + i + 1).$$

Poznámka. Není těžké sestavit všechna vhodná pořadí pro malá n, řekněme $n \leqq 8$. Jejich prozkoumáním můžeme odhalit ještě další obecná řešení jako např. následující dvě pořadí pro lichá $n = 2k + 1$, která nedostaneme z již uvedených pořadí pro $n = 2k$:

$$2k + 1, 1, 2, k + 2, 3, \ldots, k, 2k, k + 1;$$

$$k + 2, 1, k + 3, 2, \ldots, 2k + 1, k, k + 1.$$