35. ročník matematické olympiády na středních školách

27. mezinárodní matematická olympiáda

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Hvorecký (editor); Branislav Rovan (editor): 35. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. 27. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 189–206.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404818

27. mezinárodní matematická olympiáda

1. PRŮBĚH MMO

Dvacátá sedmá mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve Varšavě ve dnech 4.–15. července 1986. Zúčastnilo se jí 210 soutěžících středoškoláků, kteří tu reprezentovali 37 zemí celého světa: Alžírsko, Austrálii, Belgii, Brazílii, Bulharsko, Československo, ČLR, Finsko, Francii, Island, Itálii, Izrael, Jugoslávii, Kanadu, Kolumbii, Kubu, Kuvajt, Kypr, Lucembursko, Maďarsko, Maroko, Mongolsko, NDR, Norsko, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Španělsko, Švédsko, Tunisko, Turecko, USA, Velkou Británii a Vietnam. Z tradičních účastníků tedy tentokrát chybělo Nizozemí.

Uvedené země měly také své zastoupení v mezinárodní porotě, jejímž předsedou byl (stejně jako na 14. MMO v roce 1972) *prof. S. Balcerzyk* z Toruně. Členové poroty se sjeli do Varšavy v pátek 4. července a zahájili přípravné práce spojené s výběrem a formulací soutěžních úloh. Z návrhů 79 úloh zaslaných třiadvaceti zeměmi ze třiceti sedmi zúčastněných zemí připravili polští organizátoři předběžný výběr 21 úloh, z nichž pak porota v poměrně krátké době vybrala soutěžní šestici. Oč rychleji proběhl vlastní výběr, o to více času spotřebovala debata o formulaci textů, kdy se střetávala značně odlišná stanoviska. Konečné znění (zvláště textu čtvrté úlohy) je výsledkem určitého kompromisu, který neodpovídá vždy zvyklostem naší MO, kde bychom texty formulovali patrně poněkud jinak.

Pro 27. MMO byly tak vybrány tyto úlohy:

1. Nechť d je kladné celé číslo, různé od 2, 5, 13. Dokažte, že v množině $\{2, 5, 13, d\}$ lze nalézt dva různé prvky a, b takové, že $\sqrt{ab - 1}$ není celé číslo.

2. V rovině je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a libovolný bod P_0. Položme $A_{k+3} = A_k$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ a sestrojme posloupnost bodů $P_0, P_1, P_2, \ldots$ tak, že pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ bude bod P_k obrazem bodu P_{k-1} při otočení o úhel 120° (v záporném smyslu) okolo středu A_k.
Jestliže $P_{1986} = P_0$, pak trojúhelník $A_1A_2A_3$ je rovnostranný; dokažte.

3. Každému vrcholu pravidelného pětiúhelníku je přiřazeno celé číslo; součet těchto pěti čísel je kladný. Jestliže třem po sobě jdoucím vrcholům jsou přiřazena čísla x, y, z, přičemž $y < 0$, je dovoleno provést tuto operaci: čísla x, y, z nahradíme po řadě čísly $x + y, -y, z + y$. Takovéto operace provádíme tak dlouho, dokud je aspoň jednomu z vrcholů přiřazeno záporné číslo.
Rozhodněte, zda tento proces nutně vždy skončí po konečném počtu kroků.

4. Je dán pravidelný n-úhelník, $n \geqq 5$; označme A a B dva jeho sousední vrcholy, O jeho střed. V rovině n-úhelníku se pohybuje trojúhelník XYZ, shodný s trojúhelníkem OAB, a to tak, že nejprve $X = O$, $Y = A$, $Z = B$ a potom Y a Z probíhají oba celý obvod n-úhelníku, přičemž X leží stále uvnitř n-úhelníku.
Určete množinu všech možných poloh vrcholu X.

5. Určete všechny funkce f, které zobrazují množinu R^+ všech nezáporných reálných čísel do R^+ a splňují podmínky

$$f(x \,.\, f(y)) \,.\, f(y) = f(x + y) \text{ pro } x \in \mathsf{R}^+, y \in \mathsf{R}^+, \tag{1}$$

$$f(2) = 0, \tag{2}$$

$$f(x) \neq 0 \text{ pro } 0 \leqq x < 2. \tag{3}$$

6. V rovině se souřadnou soustavou je dána konečná množina M bodů s celočíselnými souřadnicemi. Rozhodněte, zda je vždy možné obarvit některé body z M červenou a ostatní pak bílou barvou tak, aby pro každou přímku p rovnoběžnou s některou ze souřadných os se počet červených bodů ležících na p lišil od počtu bílých bodů na p nejvýše o 1.

Tyto úlohy pocházely z návrhů, jež zaslaly ČLR (2.), Island (4.), NDR (3. a 6.), NSR (1.) a Velká Británie (5.). Každá z úloh byla pak, jak je v posledních letech na MMO zvykem, ohodnocena sedmi body, takže každý soutěžící mohl získat maximálně 42 bodů.

Soutěžící žáci a zástupci vedoucích delegací přijeli do Varšavy většinou v pondělí 7. července. Stejně jako členové poroty byli i žáci ubytováni ve Varšavě, ovšem dostatečně daleko od poroty. Zástupci vedoucích byli tentokrát po celou dobu společně s porotou, takže žáci byli svěřeni výhradně péči polských průvodců.

V sobotu 5. července byli členové poroty přijati polskou ministryní osvěty a výchovy paní *J. Michałovskou-Gumowskou.* V úterý 8. července odpoledne se konalo slavnostní zahájení 27. MMO v kinosále odborné školy elektroniky na Žoliboři; v jeho programu zhlédli účastníci ukázky polských lidových tanců v provedení tanečního kroužku žáků školy.

Vlastní soutěž 27. MMO proběhla ve dnech 9. a 10. července; každý den měli soutěžící čtyři a půl hodiny na řešení tří soutěžních úloh; během první půlhodiny mohli klást písemné dotazy, jestliže něčemu v textu úloh neporozuměli. Oprava a koordinace hodnocení žákovských řešení zabíraly pak celý pracovní čas poroty až do sobotního večera, kdy byly schváleny definitivní výsledky. Porota se rozhodla udělit celkem 107 cen, z toho 18 prvních (žákům, kteří získali 34—42 bodů), 41 druhých (za zisk 26—33 bodů) a 48 třetích (za 17—25 bodů). Vedle toho bylo rozhodnuto udělit jednu zvláštní cenu J. Keaneovi z USA za originální řešení třetí úlohy.

V průběhu pobytu ve Varšavě měli všichni účastníci možnost prohlédnout si obnovený královský zámek. V neděli 13. července se pak všichni zúčastnili autobusového výletu, jehož cílem byl Nieborów (prohlídka zámku) a Żelazowa Wola (Chopinův památník).

V pondělí 14. července odpoledne se (opět v kinosále školy) konalo slavnostní rozdílení diplomů a cen. Diplomy předávala ministryně osvěty a výchovy J. Michałowska-Gumowska. Věcné ceny tvořily broušené skleněné vázy a poháry. V průběhu tohoto zasedání vystoupil také vedoucí kubánské delegace *prof. Luis J. Davidson*, který pozval všechny zúčastněné země na 28. MMO, která se konala v červenci 1987 v Havaně.

27. MMO byla zakončena společnou večeří uspořádanou v menze vysoké školy zemědělské na Ursynově (nedaleko kolejí téže školy, v nichž byli ubytováni vedoucí delegací a jejich zástupci). Nazítří, 15. července, se pak zahraniční delegace začaly rozjíždět do svých domovů.

2. VÝSLEDKY 27. MMO

Celkový obraz o výsledcích jednotlivých delegací podává připojená tabulka 5. Z tohoto přehledu i z detailní výsledkové listiny lze vyčíst některé zajímavé údaje:

– ze všech 210 soutěžících dosáhli pouze tři žáci maximálního zisku 42 bodů: dva sovětští a jeden maďarský účastník,

– s opačným extrémem nulového bodového zisku skončil pouze jeden soutěžící z Brazílie,

– průměrný bodový zisk připadající na jednoho žáka byl 18,138 bodu, na šestičlenné družstvo tedy 108,829 bodu,

– sedm delegací odjíždělo z Varšavy bez cen a naopak v šesti družstvech měl i žák s nejhorším výsledkem aspoň třetí cenu,

– průměrný bodový zisk žáka odměněného první cenou byl 37,944, druhou cenou 29,293 a třetí cenou 20,208,

– průměrný bodový zisk žáka za první úlohu byl 3,910, za druhou 4,114, za třetí 0,838, za čtvrtou 3,252, za pátou 4,195 a za šestou 1,929.

3. ČESKOSLOVENSKÁ ÚČAST NA 27. MMO

Československo se aktivně podílelo na všech fázích příprav a průběhu 27. MMO. Již na jaře byly polským organizátorům zaslány návrhy tří úloh pro soutěž. Jedna z nich byla zahrnuta do výběru 21 úloh předložených mezinárodní porotě; uvažovalo se pak o ní jako o alternativě k první úloze, které však nakonec byla dána přednost.

Tabulka 5

Celkové výsledky 27. MMO

Země	Počet žáků	Počet získaných cen 1.	2.	3.	Celkový součet bodů
Alžírsko	6	—	—	2	80
Austrálie	6	—	—	5	117
Belgie	6	—	1	2	79
Brazílie	6	1	—	—	69
Bulharsko	6	1	3	2	161
Československo	6	—	3	3	149
ČLR	6	3	1	1	177
Finsko	6	—	—	1	60
Francie	6	1	1	2	131
Island	4	—	—	—	37
Itálie	3	—	—	2	49
Izrael	6	—	2	2	119
Jugoslávie	6	—	—	2	84
Kanada	6	—	2	1	112
Kolumbie	6	—	—	—	58
Kuba	6	—	—	—	51
Kuvajt	5	—	—	—	48
Kypr	6	—	1	—	53
Lucembursko	2	—	—	—	22
Maďarsko	6	1	2	2	151
Maroko	6	—	1	2	90
Mongolsko	6	—	—	—	54
NDR	6	1	3	2	172
Norsko	6	—	1	—	68
NSR	6	2	4	—	196
Polsko	6	—	—	3	93

Tabulka 5 - pokračování

Země	Počet žáků	Počet získaných cen 1.	2.	3.	Celkový součet bodů
Rakousko	6	—	2	2	127
Rumunsko	6	2	2	1	171
Řecko	6	—	—	2	63
SSSR	6	2	4	—	203
Španělsko	4	—	1	2	78
Švédsko	6	—	—	1	57
Tunisko	6	—	—	1	85
Turecko	6	—	—	—	55
USA	6	3	3	—	203
Velká Británie	6	—	2	3	141
Vietnam	6	1	2	2	146
Celkem	210	18	41	48	3 809

Jedinou zvláštní cenu získal žák Joseph Keane z USA za řešení třetí úlohy; jeho celkový výkon byl ohodnocen první cenou za zisk 41 bodů.

V průběhu debat o formulaci úloh podporovala čs. delegace stanoviska zdůrazňující požadavek přesnosti a jednoznačnosti textu před snahami o názornost. Většinový systém rozhodování v porotě si však často vynucoval kompromisy.

Do soutěže vyslalo Československo šest žáků, resp. čerstvých absolventů gymnázií, vesměs vítězů 3. kola naší MO kategorie A. Před odjezdem na MMO absolvovali tito žáci třítýdenní přípravné soustředění (8.—27. června 1986 v Pardubicích), kde soustavně řešili úlohy olympiádního typu. Šestice reprezentantů byla vybrána na základě výkonů na tomto soustředění i v předchozích kolech a ročnících MO a vzbuzovala naděje na vyrovnané výsledky na slušné úrovni.

Výsledky našich reprezentantů na 27. MMO shrnuje tabulka 6. Vcelku lze říci, že v soutěži obstáli: zisk tří druhých a tří třetích cen odpovídal našim možnostem v porovnání s ostatními zeměmi.

Z tabulky je vidět, že naši žáci neměli potíže s úlohami s klasickou olympiádní tematikou, jakou je geometrie (2. a (4. úloha), kombinatorika (6. úloha) či funkcionální rovnice (5. úloha). Poněkud překvapil neúspěch při řešení první úlohy, jež byla všeobecně považována za lehkou. Sami naši žáci uváděli jako důvod nedostatečné soustředění na začátku soutěže: za druhý soutěžní den získali zhruba dvojnásobek bodů z prvního dne. Potvrdila se tak známá skutečnost, že pro tak náročnou soutěž, jakou dnes MMO je, nestačí jen faktické znalosti, ale že je potřebná i dobrá psychická kondice.

Největší, ba nepřekonatelné potíže měli naši žáci se třetí úlohou. V tom se příliš nelišili od ostatních soutěžících: tuto úlohu správně vyřešilo jen jedenáct z 210 účastníků. Naproti tomu zvládli naši reprezentanti celkem dobře šestou úlohu a zařadili se v ní mezi světovou špičku.

Ve světle výsledků 27. MMO můžeme přípravu našich reprezentantů hodnotit pozitivně co do obsahové stránky, určité rezervy jsou stále v takticko-psychologické přípravě na náročné podmínky velké soutěže.

Tabulka 6

Výsledky čs. žáků na 27. MMO

Žák	Počet bodů za úlohu č. 1	2	3	4	5	6	Celkem	Cena
Petr Hájek 4. r., GWP Praha	0	7	0	7	7	7	28	II.
Vladimír Kordula 4. r., GMK Bílovec	2	7	0	7	7	7	30	II.
Marcel Polakovič 3. r., GAM Bratislava	7	7	0	6	6	0	27	II.
Roman Soták 3. r., GŠ Košice	3	7	0	0	6	5	21	III.
Petr Šleich 4. r., G Děčín	2	0	0	3	6	7	18	III.
Adam Zach 4. r., GWP Praha	0	7	1	7	3	7	25	III.
Družstvo celkem	14	35	1	31	35	33	149	

1. Volíme-li prvky a, b z množiny $\{2, 5, 13\}$, je $\sqrt{ab - 1}$ vždy celé číslo. Máme tedy dokázat, že pro každé kladné celé číslo d alespoň jedno z čísel $2d - 1$, $5d - 1$, $13d - 1$ není čtvercem celého čísla. Předpokládejme naopak, že existují kladná celá čísla d, x, y, z taková, že zároveň platí

$$2d - 1 = x^2, \tag{1}$$

$$5d - 1 = y^2, \tag{2}$$

$$13d - 1 = z^2; \tag{3}$$

z tohoto předpokladu odvodíme spor.

Z (1) je vidět, že x musí být liché, položme tedy $x = 2v + 1$, v je celé nezáporné číslo. Potom je $d = 2v(v + 1) + 1$, takže d je nutně liché číslo. Z (2) a (3) však potom vyplývá, že čísla y, z jsou obě sudá, můžeme je tedy psát $y = 2p$, $z = 2q$, kde p, q jsou kladná celá čísla. Odečtením (2) od (3) dostaneme rovnost $8d = z^2 - y^2$ neboli $2d = q^2 - p^2 = (q + p)(q - p)$. Čísla $p + q$ a $q - p$ jsou buď obě sudá, nebo obě lichá. Kdyby byla obě lichá, muselo by být liché i číslo $2d$, což není. Kdyby byla obě sudá, muselo by být sudé i číslo d, což také není. V obou případech jsme tak dospěli ke sporu a tím je tvrzení dokázáno.

2. Označme $O_j (j = 1, 2, 3)$ operaci otočení o úhel $120°$ (v záporném smyslu) okolo středu A_j. Složením těchto tří otočení dostaneme zobrazení, které lze vyjádřit jako složení otočení o $360°$ okolo jistého středu S s jistým posunutím P.

Otočení o 360° je však identita, zbývá tedy jen posunutí P. Podle znění úlohy opakujeme sled tří otočení O_1, O_2, O_3 celkem 662krát ($1\,986 = 3\,.\,662$). Výsledná operace je tedy 662násobné posunutí P. Poněvadž však $P_{1\,986} = P_0$, musí být toto posunutí nulové.

Máme tedy dokázat toto tvrzení: jestliže složením tří operací otočení O_1, O_2, O_3 (o úhel 120° okolo středů A_1, A_2, A_3) vznikne identita, je trojúhelník $A_1A_2A_3$ rovnostranný.

Označme A' obraz bodu A_1 při otočení O_2 a A'' obraz bodu A' při otočení O_3. Poněvadž obrazem bodu A_1 při otočení O_1 je zřejmě bod A_1 sám a poněvadž složením otočení O_1, O_2, O_3 vznikne identita, musí být $A'' = A_1$. To je však možné právě tehdy, je-li A_3 obrazem bodu A_2 v osové symetrii s osou AA'. Je tedy $|A_1A_3| = |A_1A_2|$ a zároveň $\measuredangle\, A_2A_1A_3 = 2\,.\measuredangle\, A_2A_1A' = 60°$. Trojúhelník $A_1A_2A_3$ je tedy rovnostranný.

3. Pro každou pětici čísel x, y, z, u, v přiřazenou vrcholům pětiúhelníku (v daném pořadí) vypočteme hodnotu součtů

$$S(x, y, z, u, v) = x + y + z + u + v = S,$$

$$\sum(x, y, z, u, v) =$$

$$= (x - z)^2 + (y - u)^2 + (z - v)^2 + (u - x)^2 + (v - y)^2.$$

Předpokládejme nyní, že $y < 0$ a že provedeme operaci popsanou v textu úlohy, tzn. že pětici (x, y, z, u, v) nahradíme pěticí $(x + y, -y, y + z, u, v)$. Ihned je vidět, že součet S se při tom nezmění:

$$S(x+y, -y, y+z, u, v) =$$

$$= x + y - y + y + z + u + v = S$$

Naproti tomu bude nová hodnota druhého součtu

$$\sum(x+y, -y, y+z, u, v) =$$

$$= (x-z)^2 + (u+y)^2 + (z+y-v)^2 + (x+y-u)^2 +$$

$$+ (v+y)^2.$$

Porovnáním dostaneme

$$\sum(x, y, z, u, v) - \sum(x+y, -y, y+z, u, v) = -2yS.$$

Podle předpokladu je $S > 0$, $y < 0$. Při provedení operace záměny se tedy hodnota $\sum$ zmenší. Avšak $\sum$ je součet čtverců celých čísel; je to tedy vždy nezáporné celé číslo. Poněvadž neexistuje žádná nekonečná klesající posloupnost nezáporných celých čísel, musí se proces po konečném počtu kroků zastavit – všechna čísla při vrcholech pětiúhelníku pak budou nezáporná.

Jiné řešení – předložené na 27. MMO soutěžícím J. Keanem z USA a odměněné zvláštní cenou – spočívá v tom, že místo součtu $\sum$ vezmeme funkci

$$F(x, y, z, u, v) = |x| + |y| + |z| + |u| + |v| + |x+y| +$$

$$+ |y+z| + |z+u| + |u+v| + |v+x| + |x+y+z| +$$

$$+ |y + z + u| + |z + u + v| + |u + v + x| +$$

$$+ |v + x + y| + |x + y + z + u| + |y + z + u + v| +$$

$$+ |z + u + v + x| + |u + v + x + y| + |v + x + y + z|.$$

Porovnáním zjistíme, že provedení operace opět snižuje hodnotu F, neboť

$$F(x, y, z, u, v) - F(x + y, -y, y + z, u, v) =$$

$$= |z + u + v + x| - |x + 2y + z + u + v| =$$

$$= |S - y| - |S + y| > 0.$$

Další postup je stejný.

Poznámka. Funkce $\sum$ a F nejsou přirozeně jediné funkce, které lze v této souvislosti použít; stejně dobře poslouží např. funkce

$$\sigma(x, y, z, u, v) = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + (x + y + z)^2 +$$

$$+ (y + z + u)^2 + (z + u + v)^2 + (u + v + x)^2 +$$

$$+ (v + x + y)^2 = \sum(x, y, z, u, v) + 2S^2$$

a řada dalších.

Odlišnou cestu k řešení této úlohy nalezl náš bývalý velmi úspěšný olympionik z let 1978–81 dr. Jan Nekovář. Úlohu nejprve zobecnil tak, že místo pěti celých čísel vzal n reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s kladným součtem $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Jejich cyklickou permutací lze vždy docílit toho, že součty $A_k = x_1 + \ldots + x_k$ jsou kladné pro $k = 1, 2, \ldots, n$, $(A_n = S)$. Operaci přechodu od trojice x_{k-1}, x_k, x_{k+1} s $x_k < 0$ k trojici $x_{k-1} + x_k, -x_k, x_k + x_{k+1}$ pak odpovídá prostá záměna dvou sousedních součtů A_{k-1}, A_k, spojená v případě $k = n$ s určitou modifikací, při které se součet $\sum_{k=1}^{n} A_k$ sníží alespoň o S. Operace lze provádět jen pokud $A_{k-1} > A_k$; v případě $k < n$ se součet $\sum_{k=1}^{n} A_k$ nezmění, ale po konečném počtu kroků se odstraní všechny inverze $A_{k-1} > A_k$ $(k < n)$, v případě $k = n$ poklesne součet $\sum A_k$ alespoň o S, avšak čísla A_k jsou vesměs kladná. Je tedy vidět, že operaci nelze provést nekonečně mnohokrát. Lze dokonce snadno odvodit horní odhad počtu kroků.

4. Nechť A, B, C jsou tři po sobě jdoucí vrcholy n-úhelníku a nechť k je kružnice jemu opsaná. Na straně AB zvolme libovolný bod Y. K němu sestrojíme bod $R \in k$ tak, aby $YR \parallel OB$ a aby bod R ležel na kratším z obou kruhových oblouků AB. K bodu R pak dále sestrojíme bod Y' tak, aby $Y' \in AB$ a $RY' \parallel OA$ (při $n \geqq 5$ lze takový bod Y' nalézt). Trojúhelníky OAB a $RY'Y$ jsou podobné, takže $|RY'| = |RY|$.

Označme $\mathcal{O}$ operaci otočení se středem O, které převádí bod A v bod B. Obrazy bodů R, Y, Y' při tomto otočení označme po řadě R', Z', Z. Zřejmě je $|R'Z| = |RY|$ a zároveň $R'Z \parallel OB \parallel RY$. Je tedy také $|YZ| = |RR'| = |AB|$.

Označme nyní X obraz bodu O při posunutí o vektor RY. Trojúhelník XYZ je ovšem shodný s trojúhelníkem ORR', a tedy také s trojúhelníkem OAB. Přitom $Y \in AB$, $Z \in BC$ a X leží uvnitř n-úhelníku.

Bod X leží na přímce OB; bod O odděluje body B, X. Maximální vzdálenost bodu X od bodu O odpovídá takové poloze bodu Y na AB, při které je $|RY|$ maximální. Je to zřejmě tehdy, je-li R středem (kratšího) oblouku AB. Je pak

$$|OX| = |RY| = |OB| .(\sec\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1).$$

Obráceně lze pak ke každému bodu X takovému, že

$$|BX| - |OB| = |OX| \leqq |OB.(\sec\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1),$$

nalézt na straně AB bod Y tak, aby obraz bodu Y při posunutí o vektor $\vec{XO}$ ležel na kružnici k. Provedeme-li pak právě popsanou konstrukci s výchozím bodem Y, dostaneme X jako vrchol trojúhelníku splňujícího podmínky úlohy.

Stejné úvahy lze provést pro libovolnou dvojici sousedních stran n-úhelníku. Hledanou množinou je tedy sjednocení n úseček OV_1, OV_2, ..., OV_n ležících v polopřímkách opačných k polopřímkám OA, OB, ... a majících stejnou délku

$$|OV_1| = |OV_2| = \ldots = |OV_n| = |OA| . (\sec\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1).$$

5. Položíme-li v (1) $y = 2$, dostaneme pro libovolné $x \in \mathrm{R}^+$ rovnost $f(x + 2) = 0$; funkce f je tedy nutně rovna nule v intervalu $\langle 2, +\infty)$.

Vezměme nyní y z intervalu $0 \leqq y < 2$, $x \in \mathrm{R}^+$. Podle předchozího a (3) je $f(x \, . f(y)) . f(y) = 0$ právě tehdy, jestliže $x \, . f(y) \geqq 2$. Zároveň však také platí $f(x + y) = 0$ právě tehdy, když $x + y \geqq 2$. V důsledku (1) jsou tedy nerovnosti $x \, . f(y) \geqq 2$ a $x + y \geqq 2$ ekvivalentní pro každé $x \in \mathrm{R}^+$. Jsou tedy ekvivalentní také nerovnosti $x \geqq \dfrac{2}{f(y)}$ a $x \geqq 2 - y$, a to pro $x \in \mathrm{R}^+$, $0 \leqq y < 2$. To je však možné jen tehdy, jestliže $f(y) = \dfrac{2}{2 - y}$ pro $0 \leqq y < 2$.

Dokázali jsme tedy, že jedinou funkcí, která může vyhovět podmínkám (1), (2) a (3), je funkce f definovaná v R^+ rovnostmi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{2 - x} \qquad && \text{pro } 0 \leqq x < 2, \\
&= 0 && \text{pro } 2 \leqq x < \infty.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Zbývá dokázat, že takto definovaná funkce podmínky úlohy skutečně splňuje. Splnění podmínek (2) a (3) je zřejmé ze (4). Při ověřování podmínky (1) rozlišíme několik případů.

a) $y \geqq 2$. Potom je ovšem $f(y) = 0$, ale také $x + y \geqq 2$, takže $f(x + y) = 0$. Podmínka (1) je tedy splněna pro každé $x \in \mathrm{R}^+$.

b) $0 \leqq y < 2$, $0 \leqq x < 2 - y$. Zde máme $f(y) = \dfrac{2}{2 - y}$, a tedy $x.f(y) = \dfrac{2x}{2-y} < 2$, takže je

$$f(x.f(y)).f(y) = \frac{2}{2 - \dfrac{2x}{2-y}} \cdot \frac{2}{2-y} = \frac{2}{2-x-y}.$$

Zároveň je také $x + y < 2$, a tedy $f(x + y) = \dfrac{2}{2 - x - y}$.

Podmínka (1) je tedy opět splněna.

c) $0 \leqq y < 2$, $2 - y \leqq x$. Tu je $f(y) = \dfrac{2}{2-y}$, avšak

$x.f(y) = \dfrac{2x}{2-y} \geqq -2$, a tedy $f(x.f(x)).f(y) = 0$. Zároveň je $x + y \geqq 2$, takže $f(x + y) = 0$. Podmínka (1) je opět splněna.

Funkce f definovaná v (4) je tedy (jediným) řešením úlohy.

6. Popsané obarvení je vždy možné. Důkaz provedeme indukcí podle počtu bodů množiny M.

Obsahuje-li množina M nanejvýše dva body, je zřejmé, jak se mají obarvit, aby podmínky úlohy byly splněny. Předpokládejme tedy, že dovedeme obarvit každou množinu, která má méně než n bodů ($n \geqq 3$), a uvažujme množinu o n bodech. Rozlišíme následující případy:

a) Jestliže neexistuje přímka rovnoběžná s některou ze souřadných os taková, že na ní leží alespoň dva body množiny M, je lhostejné, jak body obarvíme.

b) Nechť tedy naopak existuje přímka p rovnoběžná s některou z os, obsahující dva body A, B z množiny M. Potom buď ba) na přímkách kolmých k p a procházejících body A, B neleží žádné další body z M. Potom obarvíme množinu $\mathsf{M} \setminus \{A, B\}$ o $n - 2$ prvcích tak, aby obarvení vyhovovalo podmínkám, a body A, B pak obarvíme každý jinou barvou; podmínky zůstanou přitom zachovány.

Anebo

bb) existuje přímka q kolmá k p a jdoucí např. bodem A taková, že na ní leží vedle A ještě další bod $C \in \mathsf{M}$. Body A, B, C jsou tedy vrcholy pravoúhlého trojúhelníku s pravým úhlem při vrcholu A. Vezměme bod D takový, že $ABCD$ je pravoúhelník.

bba) Jestliže $D \in \mathsf{M}$, obarvíme množinu $\mathsf{M} \setminus \{A, B, C, D\}$ ve shodě s podmínkami a pak obarvíme jednou barvou body A, D a druhou barvou body B, C. Podmínky obarvení zůstanou zachovány.

bbb) Jestliže $D \notin \mathsf{M}$, pak obarvíme množinu $\mathsf{M} \cup \{D\} \setminus \{A, B, C\}$ o $n - 2$ prvcích podle podmínek úlohy a potom obarvíme body B a C stejnou barvou, jakou je obarven bod D, kdežto bod A obarvíme druhou barvou. Obarvení množiny M bude pak opět splňovat podmínky úlohy.