36. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z6

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 36. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. pp. 86–104.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404855

Kategória Z6

ÚLOHY I. KOLA

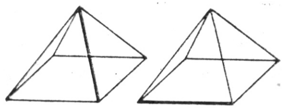
Z6 - I - 1

K dispozícii máte ľubovoľný počet červených a modrých tyčiek rovnakej dĺžky. Z ôsmych z nich môžete urobiť model pravidelného štvorbokého ihlana. Koľko takýchto rôznych modelov môžete urobiť? Dva modely sú rôzne, ak ich nemôžeme postaviť vedľa seba tak, aby všetky odpovedajúce hrany boli rovnakej farby.

Riešenie. Ihlan má dva druhy hrán: 4 bočné hrany a 4 hrany podstavy.
Hľadajme možnosti ich zafarbenia:

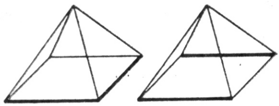
Všetky hrany modré .... 1 možnosť

1 červená (ostatné modré) - červená môže byť buď bočná hrana, alebo hrana podstavy (obr. 25)
.... 2 možnosti



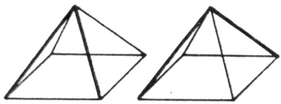
Obr. 25

2 červené - 2 hrany podstavy: susedné, alebo protiľahlé (obr. 26) .... 2 možnosti



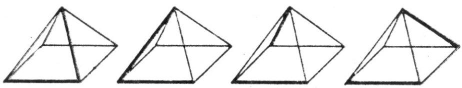
Obr. 26

2 bočné hrany: v jednej stene, alebo nie (obr. 27) .... 2 možnosti



Obr. 27

1 hrana podstavy, 1 bočná hrana (obr. 28) .... 4 možnosti



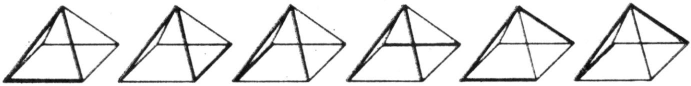
Obr. 28

spolu .... 8 možností

3 červené - 3 hrany podstavy . . . . 1 možnosť
3 bočné hrany . . . . 1 možnosť
1 bočná hrana, 2 hrany podstavy (obr. 29) . . . . .
. . . . 6 možností

Obr. 29

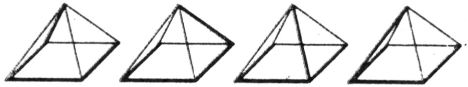
2 bočné hrany, 1 hrana podstavy (obr. 30) . . . . .
. . . . 6 možností



Obr. 30

spolu . . . . 14 možností

4 červené - 4 hrany podstavy . . . . 1 možnosť
4 bočné hrany . . . . 1 možnosť
1 bočná hrana, 3 hrany podstavy (obr. 31) . . . . .
. . . . .4 možnosti

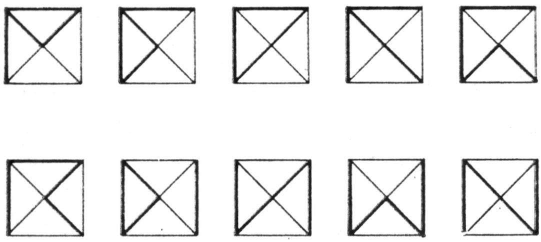


Obr. 31

3 bočné hrany, 1 hrana podstavy (obr. 32) .....
.... 4 možnosti

Obr. 32

2 bočné hrany, 2 hrany podstavy (obr. 33) .....
.... 10 možností



Obr. 33

spolu .... 20 možností

5 červených - to sú 3 modré (teda rovnako ako 3 červené) .... 14 možností
6 červených - to sú 2 modré (teda rovnako ako 2 červené) .... 8 možností
7 červených - to je 1 modrá (teda rovnako ako 1 červená) .... 2 možnosti
8 červených .... 1 možnosť

Spolu 70 možností.

Z6 - I - 2

Vyriešte algebrogram:

$$
\begin{array}{rrrrr}
Š & K & O & L & A \\
 & & L & E & N \\
 & & L & E & N \\
\hline
Z & M & Y & L & A
\end{array}
$$

Riešenie. Označme $a \oplus b$ - zvyšok pri delení 10 súčtu $a + b$. Napríklad: $8 \oplus 6 = 4$, $8 \oplus 6 \oplus 9 = 3$. Operáciu $\oplus$ používame len kvôli prehľadnosti a stručnosti zápisu riešenia úlohy. Od riešiteľov sa taký zápis nepožadoval.

Pretože $N \oplus N \oplus A = A$, musí byť $N = 5$, alebo $N = 0$. $N = 5$ nemôže byť, pretože by potom v súčte na mieste desiatok nemohlo byť L.
Teda $\underline{N = 0}$.
Podobne $E = 5$, alebo $E = 0$, ale $N = 0$, teda $\underline{E = 5}$.

Pretože v súčte je na mieste desaťtisícov Z a v sčítanci je $Š$, musí byť $K = 9$ (prípadne $K = 8$).

Nech $K = 9$,

potom $Z = Š + 1$

$M = K + 1$, alebo $M = K + 2$.

Keby $M = K + 1$ a $K = 9$, potom $M = 0$ (a to nemôže byť, lebo $N = 0$), teda $M = K + 2$.

$K + 2$ musí ísť »cez desiatku«, nakoľko $Z = Š + 1$.

Jediná možnosť je $M = 1$ a $K = 9$ (teda nemôže byť $K = 8$).

$O + L + L$ musí ísť »cez dvadsiatku«, teda $L > 5$.

Po vyskúšaní všetkých možností vyhovuje len $L = 8$.

Súčet potom je

$$\begin{array}{r} 29786 \\ 850 \\ 850 \\ \hline 31486 \end{array}$$

Úloha má jediné riešenie.

Z6 - I - 3

Vypočítajte, akú časť obsahu obdĺžnika $ABCD$ (obr. 34, str. 92) tvorí obsah

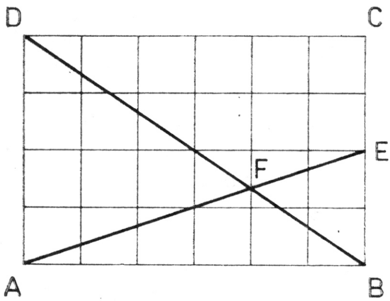
a) trojuholníka ABF,

b) trojuholníka BFE,

c) štvoruholníka $DFEC$,

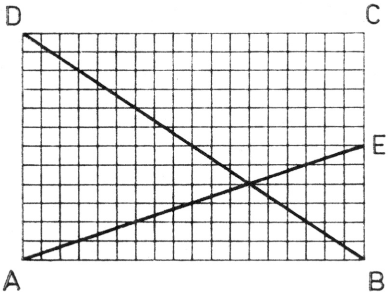
d) trojuholníka AFD.

1. riešenie. Označme $|XYZ|$ obsah trojuholníka XYZ. Sieť z úlohy si zahustíme ďalším delením strán štvorčekov na



Obr. 34

3 časti (obr. 35). Obsah budeme počítať v štvorčekoch zjemnenej siete.



Obr. 35

Potom pre obsahy trojuholníkov *ABF*, *BEF* a *AFD* platí:

$$|ABF| = \frac{18 \,.\, 4}{2} = 36 \qquad |BEF| = \frac{6 \,.\, 6}{2} = 18$$

$$|AFD| = \frac{12.12}{2} = 72$$

Potom

$$|ABF| \text{ je } \frac{36}{18.12} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \text{ celku,}$$

$$|BEF| \text{ je } \frac{18}{18.12} = \frac{1}{12} \text{ celku,}$$

$$|AFD| \text{ je } \frac{72}{18.12} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \text{ celku.}$$

Teda $|DFEC|$ je $1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$ celku.

2. riešenie. Obsah obdĺžnika *ABCD* je (pozri obr. 34)

$$|ABCD| = 6.4 = 24.$$

Ďalej platí:

$$|ABD| = \frac{6.4}{2} = 12 = |BDC|$$

$$|ABE| = \frac{6.2}{2} = 6$$

$$|AFD| = \frac{4.4}{2} = 8$$

$$|BFE| = \frac{2.2}{2} = 2$$

$$|ABF| = |ABE| - |BFE| = 6 - 2 = 4$$

$$|DFEC| = |BCD| - |BFE| = 12 - 2 = 10$$

Pomery obsahov vypočítame podobne ako v 1. riešení.

Z6 - I - 4

17. mája 1985 je deň s matematickým dátumom. Súčin čísel označujúcich deň a mesiac sa rovná poslednému dvojčísliu letopočtu:

$$17 . 5 = 85$$

Zistite, ktoré roky 20. storočia neobsahujú ani jeden deň s matematickým dátumom.

Riešenie. Aby sme sa mohli ľahšie vyjadrovať, budeme hovoriť, že rok, ktorý neobsahuje deň s matematickým dátumom, je smutný. Máme teda nájsť množinu smutných rokov 20. storočia.

1. postup. Môžeme ísť po rade. Rok 1900 je zrejme smutný. Roky 1901 až 1931 nie. Vďaka dňom 1. 1. až 31. 1. Rok 1932 tiež nie (16. 2.), 1933 takisto (11. 3.) atď. Postupne preveríme všetky roky.

2. postup. 1900 je smutný rok, 1901 až 1931 vďaka januárovým dňom nie. Ktoré roky zachránia pred smútkom februárové dni? Všetky tie, ktorých koncové dvojčíslie je dvojnásobkom čísla menšieho ako 29. V zozname čísel 32 až 99 si ich preto vyškrtneme. Prečo len dvojnásobky čísel menších ako 29? Pretože február má normálne 28 dní. »Prestupný«

29. február by bol záchrancom - dňom s matematickým dátumom - v roku 1958, ten však nie je prestupný.

Pokračujeme marcovými dňami a škrtáme zo zoznamu trojnásobky čísel od 1. 3. do 31. 3. (marec má 31 dní). Nasledujú aprílové dni a násobky 4, atď. Podobnosť s Eratostenovým sitom zrejme nie je náhodná. Pokračujeme ešte s »prvočíselnými« mesiacmi, piatym a siedmym. Končíme. Ostatné mesiace by zachraňovali roky už zachránené (aj november!). Nevyškrtnuté roky sú pochopiteľne smutné.

3. postup. Vhodný pre tých, čo nemajú radi experimentálne postupy a majú podozrenie, že smutný rok nesmie mať koncové dvojčíslo bohaté na deliteľov.

Označme $\check{c}$ koncové dvojčíslie letopočtu. Nech $\check{c} = a.b.c$, pričom a, b, c sú navzájom rôzne celé čísla väčšie ako 1. Ukážeme, že takýto rok, teda rok, ktorého koncové dvojčíslie má aspoň troch rôznych deliteľov väčších ako 1, nie je smutný:

Aspoň jedno z čísel a, b, c je menšie ako 5. Keby nie, bolo by dvojčíslo $\check{c} \geqq 125$, čo nie je možné. Označme toto číslo a. Teda $2 \leqq a < 5$ a zároveň $b.c < 50$. Podobne musí byť jedno z čísel b, c menšie ako 8. Označme ho b. Je teda $a.b \leqq$ $\leqq 28$. Ak je $c < 13$, má c-ty deň v $a.b$-tom mesiaci matematický dátum. (Keďže $a.b.c \leqq 99$, $a.b \geqq 6$ neprekročí ani číslo $a.b$, ani c prípustné hranice.)

Preskúmajme teraz letopočty s koncovým dvojčíslom, ktoré má iba dvojprvkový rozklad $\check{c} = a.b$, pričom a, b sú celé čísla, a, b musia potom byť prvočísla. Inak by mohol byť rozklad viacprvkový.

Poďme teraz hľadať smutné roky medzi letopočtami s koncovkou $\check{c} = 2.p$. Ak je prvočíslo p menšie ako 27, dostávame rok, ktorý má februárový deň s matematickým dátumom. Pre p väčšie ako 27 však už dostávame smutné roky. Sú to roky s koncovkou 2.29, 2.31, 2.37, 2.41, 2.43 a 2.47. Dvojnásobok ďalšieho prvočísla je už väčší ako 99. Medzi letopočtami s koncovkou $č = k.p$, kde k, p sú prvočísla a k je väčšie ako 2, už nenájdeme smutný rok. V k-tom mesiaci p-ty deň má matematický dátum.

Teraz preskúmame letopočty s koncovkou, ktorá má iba jednoprvkový rozklad na čísla väčšie ako 1. Sú to letopočty s prvočíselnou koncovkou. Ak je $č \leq 31$, obsahuje rok januárový deň s matematickým dátumom. Ak je $č$ prvočíslo väčšie ako 31 a pochopiteľne menšie ako 100, dostávame smutný rok.

Zhrnieme. K už známym rokom 1958, 1962, 1974, 1982, 1986, 1994 sme našli ďalšie 1937, 1941, 1943, 1947, 1953, 1959, 1961, 1967, 1971, 1973, 1979, 1983, 1989, 1997.

Vyšetriť musíme rok s nulovou koncovkou, ktorý sme si zatiaľ nevšimli. Je to rok 1900 a je zrejme smutný.

Z6 - I - 5

Pod každou dvojicou susedných čísel na obrázku vľavo je ich súčin. Napr. $1{,}5 . 6 = 9$, $6 . 2 = 12$ atď.

Namiesto bodiek na obrázku vpravo napíšte čísla tak, aby bol pod každou dvojicou susedných čísel vždy ich súčin.

```
1,5    6    2            1,5   4    .    .    2
    9    12                  6    .    3    .
      108                        .    .    .
                                   72    .
                                       .
```

Riešenie. Označme tretie číslo v prvom riadku x. Potom tabuľku môžme vyplniť takto:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1{,}5 & & 4 & & x & & 3:x & & 2 \\
& 6 & & 4.x & & 3 & & \cdot & \\
& & 24.x & & 12.x & & \cdot & & \\
& & & 72 & & \cdot & & & \\
& & & & \cdot & & & &
\end{array}
$$

Vidíme, že musí platiť

$$
\begin{aligned}
24.x.12.x &= 72 \\
12.x.x &= 72:24 \\
12.x.x &= 3 \\
x.x &= 0{,}25 \\
x &= 0{,}5
\end{aligned}
$$

Tabuľka doplnená chýbajúcimi číslami bude takáto:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1{,}5 & & 4 & & 0{,}5 & & 6 & & 2 \\
& 6 & & 2 & & 3 & & 12 & \\
& & 12 & & 6 & & 36 & & \\
& & & 72 & & 216 & & & \\
& & & & 15\,552 & & & &
\end{array}
$$

Do riešenia musíme zahrnúť i možnosť $x = -0{,}5$. Pre takéto x tiež platí $x.x = 0{,}25$. Potom tabuľka vyzerá takto:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1{,}5 & & 4 & & -0{,}5 & & -6 & & 2 \\
& 6 & & -2 & & 3 & & -12 & \\
& & -12 & & -6 & & -36 & & \\
& & & 72 & & 216 & & & \\
& & & & 15552 & & & &
\end{array}
$$

Z6 - I - 6

Nájdite všetky trojice jednociferných čísel, pre ktoré platí, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.

Riešenie. Hľadané čísla označme a, b, c. Čísla a, b, c sú jednociferné, teda 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Má platiť

$$a . b . c = 5(a + b + c).$$

Z toho vidíme, že aspoň jedno z hľadaných čísel musí byť 5 (jednociferné a deliteľné 5). Nech je $a = 5$. Hľadáme b, c. Má platiť

$$5 . b . c = 5 . (5 + b + c)$$
$$\underline{b . c = 5 + b + c}$$

Z toho vidíme

a) $b . c$ je viac ako 5,

b) $b . c$ je menej ako $5 + 9 + 9 = 23$,

c) ani jedno z čísel nemôže byť 1 (lebo ak napr. $b = 1$, potom by bolo $c = 6 + c$).

Písmenom b označíme menšie z čísel b, c. To musí byť menšie ako 5 (prečo?).

Stačí preskúmať možnosti $b = 2, 3, 4$.

Nech $b = 2$, potom $2.c = 7 + c$.

$$\underline{c = 7}$$

Nech $b = 3$, potom $3.c = 8 + c$.

$$\underline{c = 4}$$

Nech $b = 4$, potom $4.c = 9 + c$.

$$\underline{c = 3.}$$

Úloha má dve riešenia. Hľadané trojice sú 5, 2, 7; 5, 3, 4. (Ak uvažujeme usporiadané trojice, potom úloha má 12 riešení.)

ÚLOHY II. KOLA

Z6 - II - 1

Pred tromi rokmi som oslavoval narodeniny v deň so zvláštnym dátumom. Môj spolužiak Juro na tejto oslave zistil, že súčin čísel označujúcich deň, mesiac a počet rokov, ktoré som práve dovŕšil, sa rovná letopočtu.

Kedy som sa narodil? (4 body)

Riešenie. (Uvedomme si, že úloha sa riešila roku 1987.) Označme si číslo dňa d, mesiaca m a počtu rokov r. Potom zo zadania

$$d.m.r = 1987 - 3 = 1984.$$

Aby sme zistili prirodzené čísla d, m, r, rozložíme si číslo 1984 na prvočinitele.

$$1984 = 2^6 . 31$$

Z rozkladu vidíme, že jedno z čísel *d, m, r* musí byť 31, alebo násobok 31. Mesiac to nemôže byť, počet rokov žiaka tiež nebýva viac ako 30. To znamená 31 určuje deň v mesiaci. Číslo mesiaca musí byť 1, alebo mocnina 2. Keby bolo číslo mesiaca rovné 1, bolo by spolužiakovi 64 rokov a to nie je možné. Číslo mesiaca musí byť mocninou 2. Teda február, apríl, august. Z nich len august má 31 dní.

Jurov spolužiak sa narodil 31. 8., v roku 1984 mal 8 rokov. Narodil sa 31. augusta 1976.

Z6 - II - 2

Miesto bodiek vpíšte čísla tak, aby pod každou dvojicou susedných čísel bol ich súčin. Nájdite kladné riešenia.

$$\begin{array}{ccccccccc}
. & & . & & 0{,}5 & & . & & 2 \\
 & 9 & & . & & . & & . & \\
 & & . & & . & & 16 & & \\
 & & & 162 & & . & & & \\
 & & & & . & & & &
\end{array}$$

(5 bodov)

Riešenie. Uvažujme pravý horný »trojuholník«.

$$\begin{array}{ccccc}
0{,}5 & & x & & 2 \\
 & . & & . & \\
 & & 16 & &
\end{array}$$

Označme si podľa obrázku neznáme číslo x. Potom na miestach bodiek budú $0{,}5x$ a $2x$. Teda

$$\begin{aligned} 0{,}5x \,.\, 2x &= 16 \\ x^2 &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Uvažujme teraz ľavý »trojuholník« počítajúc od druhého riadku.

$$\begin{array}{ccccc} 9 & & y & & 2 \\ & \cdot & & \cdot & \\ & & 162 & & \end{array}$$

Označme si podľa obrázku neznáme číslo y. Na miestach bodiek budú $9y$ a $2y$. Teda

$$\begin{aligned} 9y \,.\, 2y &= 162 \\ 18y^2 &= 162 \\ y^2 &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Ďalej už tabuľku jednoznačne vyplníme.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1{,}5 & & 6 & & 0{,}5 & & 4 & & 2 \\ & 9 & & 3 & & 2 & & 8 & \\ & & 27 & & 6 & & 16 & & \\ & & & 162 & & 96 & & & \\ & & & & 15\,552 & & & & \end{array}$$

Z6 - II - 3

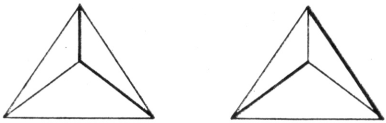
K dispozícii máte ľubovoľný počet červených a modrých tyčiek rovnakej dĺžky. Zo šiestich z nich môžete urobiť model pravidelného štvorstena (tetraédra).

Koľko rôznych takýchto modelov štvorstena môžete urobiť? (Štvorsteny sú rôzne, ak ich nevieme postaviť vedľa seba tak, aby odpovedajúce hrany boli rovnakej farby.)

(4 body)

Riešenie. Uvážme všetky typy štvorstenov, podľa počtu rovnako zafarbených hrán:

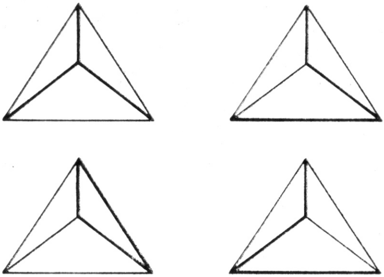
všetky tyčky modré .... 1 možnosť
5 modrých, 1 červená.............. 1 možnosť
4 modré, 2 červené (obr. 36)........ 2 možnosti



Obr. 36

3 modré, 3 červené (obr. 37)........ 4 možnosti
2 modré, 4 červené .... 2 možnosti
1 modrá, 5 červených.............. 1 možnosť
všetky červené .... 1 možnosť

Spolu 12 rôznych modelov.



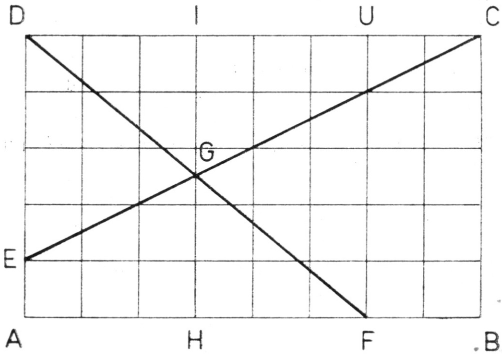
Obr. 37

Z6 - II - 4

Akú časť obsahu obdĺžnika $ABCD$ (obr. 38) tvorí obsah

a) štvoruholníka $AFGE$,
b) štvoruholníka $FBCG$,
c) trojuholníka GCD,
d) trojuholníka EGD.

(5 bodov)



Obr. 38

Riešenie. Pretože priamka EC stúpa jeden štvorček na dva, pretne úsečku HI v strede strany štvorčeka. Pretože HI je stredná priečka obdĺžnika $AFUD$, pretne ju jeho uhlopriečka DF práve v polovici. Z toho plynie, bod G leží v polovici HI. Potom pre obsah trojuholníka GCD (označme $|GCD|$) platí:

$$|GCD| = \frac{8 \cdot 2{,}5}{2} = 10$$

Ďalej

$$|EGD| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$|FBCG| = 2 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} = 15$$

$$|AFGE| = 8 \cdot 5 - (10 + 6 + 15) = 9.$$

Teda: Obsah štvoruholníka $AFGE$ je $\frac{9}{40}$ obsahu obdĺžnika $ABCD$. Obsah štvoruholníka $FBCG$ sú jeho $\frac{3}{8}$, obsah trojuholníka GCD jeho $\frac{1}{4}$ a obsah trojuholníka EGD jeho $\frac{3}{20}$.