37. ročník matematické olympiády na středních školách

Řešení úloh kategorií A, B, C

In: Leo Boček (editor); Luboš Brim (editor); Tomáš Hecht (editor); Karel Horák (editor): 37. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1987/88. 29. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. pp. 60–113.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404866

Kategorie C

C - I - 1

Nechť uspořádaná trojice (a, b, c) reálných čísel vyhovuje podmínkám úlohy. Do výrazu $ax + by + cxy$ dosadíme za x, y postupně hodnoty 0, 1, 2. Podle předpokladu úlohy tím zjistíme, že do množiny A patří čísla $a, b, 2a, 2b, a + b + c, 2a + b + 2c, a + 2b + 2c, 2a + 2b + 4c$. Je-li $a = b = 0$, musí do A patřit čísla $c, 2c, 4c$, což vzhledem k podmínce $c \neq 0$ není možné. Zkusíme teď $a = 1, b = 0$, do A pak musí patřit čísla $1 + c, 2 + 2c, 1 + 2c, 2 + 4c$. Protože $1 + c$ je prvkem A, je $c = 1$ nebo $c = -1$. Pak však nepatří do A číslo $1 + 2c$, takže nemůže být $a = 1, b = 0$. Stejně tak nemůže být $a = 0, b = 1$. Je-li $a = b = 1$, patří do A čísla $2 + c, 3 + 2c, 4 + 4c$. To je splněno pouze pro $c = -1$. Nemůže být $a = 2$, protože by do A nepatřil prvek $2a$, podobně pro $b = 2$. Úloha má tedy jediné řešení $(a, b, c) = (1, 1, -1)$.

C - I - 2

Je-li číslo $n^2 + 5n + 8$ dělitelné číslem 49, je tím spíše dělitelné sedmi. Každé přirozené číslo n se dá napsat právě v jednom z tvarů $7k, 7k + 1, \ldots, 7k + 6$, kde k je přirozené číslo nebo 0. Dosadíme-li postupně každý z uvedených tvarů za n do výrazu $n^2 + 5n + 8$, dostaneme pouze v případě $n = 7k + 1$ číslo dělitelné sedmi, a to číslo $49k(k + 1) + 14$. Toto číslo je dělitelné sedmi, ale není dělitelné číslem 49. Tím jsme dokázali, že pro žádné přirozené číslo n není číslo $n^2 + 5n + 8$ dělitelné číslem 49.

Uveďme ještě jiný důkaz. Je $n^2 + 5n + 8 = n^2 - 2n + 1 + 7n + 7 = (n - 1)^2 + 7(n + 1)$. Aby bylo toto číslo dělitelné sedmi, musí být nutně číslo $(n - 1)^2$, a tedy i číslo $n - 1$, dělitelné sedmi, tedy $n = 7k + 1$. Pak je číslo $(n - 1)^2$ dělitelné číslem 49, číslo $7(n + 1)$ ale pouze sedmi. Docházíme ke stejnému výsledku jako při předcházejícím postupu.

C - I - 3

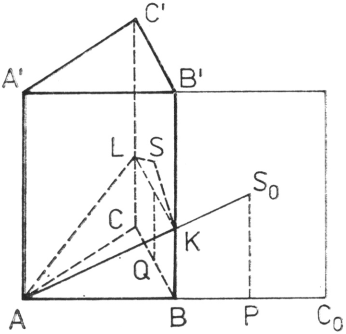
Nechť p, q, $p + q$, pq jsou délky stran čtyřúhelníku. Můžeme předpokládat, že $p \geqq q$. Součet délek každých tří stran čtyřúhelníku je větší než délka čtvrté strany, takže musí například platit $p + q + (p + q) > pq$, tj. $4 > (p - 2)(q - 2)$. Odtud je vidět, že $(p - 2, q - 2)$ může být pouze jednou z dvojic $(3, 1), (2, 1), (1, 1)$, takže máme tyto tři možnosti pro p, q, u nichž uvádíme i odpovídající hodnoty $p + q$, pq:

$$p = 5, q = 3, p + q = 8, pq = 15$$
$$p = 4, q = 3, p + q = 7, pq = 12$$
$$p = 3, q = 3, p + q = 6, pq = 9$$

Ve všech třech případech má nejkratší strana délku 3, nejdelší stranou je strana s délkou pq, což je 15, 12 nebo 9. Ze zbývajících dvou stran musí aspoň jedna s nejkratší stranou sousedit. V prvním případě mají tedy dvě sousední strany délky 3 a 5 nebo 3 a 8, v druhém případě 3 a 4 nebo 3 a 7, v posledním případě mají dvě sousední strany délku 3 nebo jedna délku 3, druhá 6. Vidíme, že ve všech šesti možnostech je součet délek dvou sousedních stran nejvýše 11. Podle trojúhelníkové nerovnosti je proto délka úhlopříčky, která tvoří s těmito dvěma stranami trojúhelník, menší než 11, což jsme měli dokázat.

C - I - 4

Předpokládejme, že jsme si rovinu BCC' otočili kolem přímky BB' do roviny ABB' tak, že se bod C otočí do bodu C_0 a bod B je středem úsečky AC_0 (obr. 5). Střed S přejde při-



Obr. 5

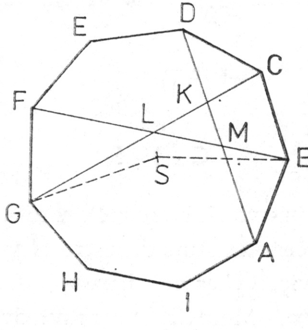
tom do bodu S_0, bod K je průsečíkem úseček BB' a AS_0, protože pouze tak je $|AK| + |KS| = |AK| + |KS_0|$ nejmenší. Označme P patu kolmice vedené bodem S_0 na přímku BC_0. Z podobnosti trojúhelníků ABK, APS_0 plyne, že $|BK| = \frac{1}{3}v$, protože $|PS_0| = \frac{1}{2} v$ a $|AB| = \frac{2}{3} |AP|$. Stejně tak je $|CL| = \frac{1}{3} v$. Dále je $KL \parallel BC$, $|KL| = a$, výška na tuto stranu v trojúhelníku KLS je $\frac{1}{2} v - \frac{1}{3} v = \frac{1}{6} v$, jeho obsah je proto $\frac{1}{12} av$. Pata Q výšky v jehlanu $KLSA$ na stěnu KLS splývá se středem úsečky BC a má tedy délku $\frac{1}{2} a\sqrt{3}$. Proto se objem jehlanu $KLSA$ rovná $\frac{1}{72} a^2 v \sqrt{3}$, objem daného hranolu je $\frac{1}{4} a^2 v \sqrt{3}$, hledaný poměr je $\frac{1}{18}$.

C - I - 5

Jistě existuje družstvo A, které mělo v turnaji největší počet výher, přesněji řečeno existuje družstvo A tak, že žádné další družstvo nemělo více výher než družstvo A. Nechť B je libovolné další družstvo. Mohly nastat právě dvě možnosti, buď družstvo A vyhrálo nad družstvem B, nebo s ním prohrálo. V prvním případě vezmeme za C libovolné další družstvo a požadavky úlohy budou splněny. Složitější situace nastane v druhém případě, kdy družstvo A prohrálo s mužstvem B. Pak ale musí existovat družstvo C, se kterým A vyhrálo a B prohrálo, jinak by mělo družstvo B více výher než družstvo A. Ve vzájemných střetnutích mezi A, B, C pak mělo družstvo A právě jednu výhru (nad C) a družstvo B také právě jednu výhru (nad A). Opět je požadavek úlohy splněn a tím je tvrzení úlohy dokázáno.

C-I-6

Z věty o obvodovém a středovém úhlu plyne (obr. 6), že $|\sphericalangle\, BFG| = 80°$, neboť $|\sphericalangle\, BSG| = 4 . \dfrac{360°}{9} = 160°$, S jsme označili střed kružnice k opsané danému devítiúhelníku. Stejně tak odvodíme, že $|\sphericalangle\, FGC| = 60°$, takže $|\sphericalangle\, FLG| = 40°$, neboť součet úhlů v trojúhelníku je 180°. Úhly CLB a FLG

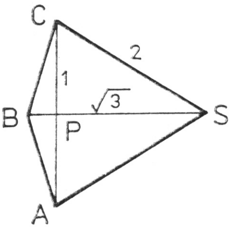


Obr. 6

jsou vrcholové, proto je také $|\sphericalangle\, KLM| = 40°$. Obdobně odvodíme, že $|\sphericalangle\, KML| = 60°$, $|\sphericalangle\, MKL| = 80°$. Obvodový úhel kružnice k odpovídající jedné straně devítiúhelníku má velikost 20°. Vrcholy trojúhelníku s vnitřními úhly 40°, 60° a 80°, jež jsou zároveň vrcholy devítiúhelníku, dělí proto kružnici k na tři oblouky odpovídající dvěma, třem a čtyřem stranám devítiúhelníku. Takovými trojúhelníky jsou například trojúhelníky ACF a ACG. Úloze vyhovuje dále všech 8 trojúhelníků, které dostaneme otočením trojúhelníku ACF kolem bodu S o celý násobek $40°$, a 8 trojúhelníků, které dostaneme stejným způsobem z trojúhelníku ACG. Celkem je tedy těch trojúhelníků 18.

C - S - 1

Označme A, C sousední vrcholy k vrcholu B dvanáctiúhelníku, který je pravidelný a je vepsán kružnici o středu S a poloměru 2 (obr. 7). Označme dále P průsečík úseček AC,



Obr. 7

BS. Trojúhelník ACS je rovnostranný, P je střed úsečky AC, proto je $|CP| = 1$, $|PS| = \sqrt{3}$, $|BP| = 2 - \sqrt{3}$. Podle Pythagorovy věty je $|CB|^2 = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 4(2 - \sqrt{3})$, $|CB| = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Protože $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{12} = 4(2 - \sqrt{3}) = |CB|^2$, je také $|CB| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

C - S - 2

Protože číslo končící devítkou není dělitelné ani dvěma, ani pěti, musí být zbývající tři číslice hledaných čísel z množiny 1, 3, 7, 9. Jejich součet musí být dělitelný devíti, takže přicházejí v úvahu pouze trojice (1, 1, 7), (3, 3, 3) a (9, 9, 9). Čísla 1179 a 1719 nejsou dělitelná sedmi, takže hledanými čísly jsou právě čísla 7119, 3339 a 9999.

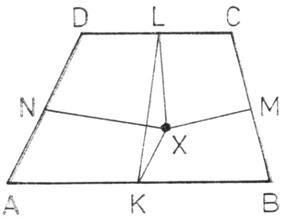
C - S - 3

Z každého zápasu odchází právě jeden hráč poražený. Kromě vítěze prohrál každý hráč dvakrát. Protože zápasů bylo 45, tedy lichý počet, musel v jednom zápase prohrát vítěz. Ve zbývajících 44 zápasech byli všichni ostatní hráči vyloučeni, bylo jich tedy $44 : 2 = 22$. Celkem se turnaje zúčastnili 23 hráči.

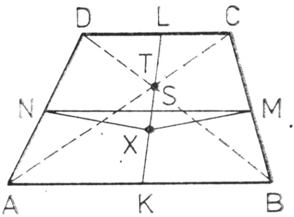
C - II - 1

Jde o lehčí úlohu, kterou vyřešila většina účastníků krajského kola. Hledaná čísla si označíme po řadě a, b, c, d. Podle podmínek úlohy platí $a + b = 707$, $b + c = 700$, $c + d = 689$. Z poslední rovnice vyjádříme c, dosadíme do druhé, vyjádříme z ní b a dosadíme do první. Dostaneme postupně $c = 689 - d$, $b = 11 + d$, $a + d = 696$, takže součet prvního a čtvrtého čísla je 696. Odečtením prvních dvou rovnic dostaneme $a - c = 7$, takže a je aspoň 8. Je-li $a = 8$, je $b = 699$, $c = 1$, $d = 688$. Nejmenší možná hodnota prvního čísla je tudíž 8.

Uvádíme řešení podle *Michala Kubečka*, žáka 8. třídy základní školy v Praze 4, Na planině. Vrcholy lichoběžníku označil A, B, C, D tak, že $a = |AB| > |CD| = c$, $AB \parallel CD$. Středy stran AB, BC, CD, DA označíme K, M, L, N (obr. 8). Mají-li čtyřúhelníky $NAKX$, $LDNX$, $MCLX$ a $KBMX$ stejné obsahy, rovnají se sobě součty obsahů prvních dvou a posledních dvou, oba součty se rovnají polovině obsahu lichoběžníku $ABCD$. Jelikož úsečka KL dělí lichoběžník na dva lichoběžníky stejného obsahu, musí ležet bod X na úsečce KL. Označme S střed úsečky MN (obr. 9), v výšku lichoběžníku



Obr. 8



Obr. 9

a h vzdálenost bodu X ležícího na úsečce SK od přímky MN. Stačí určit h, a tedy bod X tak, aby se sobě rovnaly obsahy čtyřúhelníků $NAKX$ a $LDNX$, pak se již budou sobě rovnat obsahy čtyřúhelníků $MCLX$ a $KBMX$. Obsah čtyřúhelníku $LDNX$ dostaneme sečtením obsahů lichoběžníku $LDNS$ a trojúhelníku NSX, obsah čtyřúhelníku $NAKX$ se rovná rozdílu obsahů lichoběžníku $NAKS$ a trojúhelníku NSX, takže pro h platí

$$\frac{v}{2}\cdot\frac{\frac{c}{2}+\frac{a+c}{4}}{2}+\frac{a+c}{4}\cdot\frac{h}{2}=\frac{v}{2}\cdot\frac{\frac{a}{2}+\frac{a+c}{4}}{2}-\frac{a+c}{4}\cdot\frac{h}{2},$$

odkud $h = \frac{v}{2}\cdot\frac{a-c}{a+c}$. Dále je $|SX| : h = |KL| : v$, takže

$|SX| = \frac{a-c}{2(a+c)}|KL|, |LX| = \frac{a}{a+c}|KL|, |KX| = \frac{c}{a+c}\cdot$ $.|KL|$. Tím je bod X určen, dělí úsečku KL v poměru $a : c$ a leží blíž k bodu K. Průsečík T úhlopříček AC, BD lichoběžníku leží také na úsečce KL a z podobnosti trojúhelníků CDT a ABT plyne, že $|LT| : |KT| = c : a$. Je proto $|KX| = |LT|, |LX| = |KT|$. To dává rychlou konstrukci bodu X: Na úsečku KL naneseme od bodu K vzdálenost $|LT|$, dostaneme tak bod X.

C - II - 3

Uvádíme málo upravené řešení, které v soutěži předložil *Václav Korál*, žák I. ročníku gymnázia v Praze 4, Postupická ul. Čísla A, B zapíšeme ve tvarech $A = 10^3a + 10^2b + 10c + d$, $B = 10^3d + 10^2b + 10c + a$. Jelikož jsou obě dělitelná číslem 63, je dělitelný číslem 63 i jejich rozdíl $A - B = 999(a - d)$, tj. $999(a - d) = 63n$, n přirozené číslo, tedy $111(a - d) = 7n$. Číslo 111 není dělitelné sedmi, proto musí být dělitelné sedmi číslo $a - d$. Je proto $a = 8$, $d = 1$ nebo $a = 9$, $d = 2$. Případ $a = d$ můžeme totiž hned vyloučit, protože by bylo $A = B$ a největším společným dělitelem čísel A, B by bylo čtyřmístné číslo A, a tedy ne číslo 63.

Nechť je tedy $a = 8$, $d = 1$. Pak je $A = 8001 + 10^2b + 10c$,

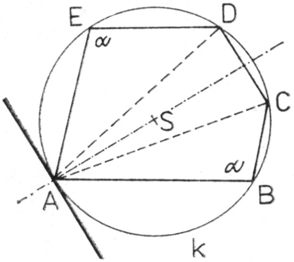
$B = 1008 + 10^2b + 10c$. Čísla 8001, 1008 jsou obě dělitelná číslem 63, proto musí být dělitelné číslem 63 i číslo $10(10b + c)$, takže $10b + c = 0$ nebo $10b + c = 63$. Dvojice (8001, 1008) a (8631, 1638) skutečně vyhovují podmínkám úlohy.

Nechť je $a = 9$, $d = 2$ a tedy $A = 9002 + 10^2b + 10c$, $B = 2009 + 10^2b + 10c$. Čísla 2009, 9002 jsou dělitelná sedmi, proto musí být dělitelné sedmi i číslo $10b + c$. Kromě toho musí být čísla A, B dělitelná devíti, tedy musí být dělitelný devíti jejich ciferný součet $2 + b + c$, takže $b + c = 7$ nebo $b + c = 16$. Z nejvýše dvouciferných násobků sedmi vyhovují této podmínce pouze čísla 7 a 70, takže $A = 9072$, $B = 2079$ nebo $A = 9702$, $B = 2709$. První dvojice však nevyhovuje všem podmínkám úlohy, protože největším společným dělitelem čísel 9072, 2079 je číclo $3 . 63 = 189$, druhá dvojice je řešením úlohy.

Úloha má právě tři řešení: (8001, 1008), (8631, 1638) a (9702, 2709).

C - II - 4

Označme $\alpha = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AED|$ (obr. 10). Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, proto $|\sphericalangle ADC| = 180° - \alpha$, podobně



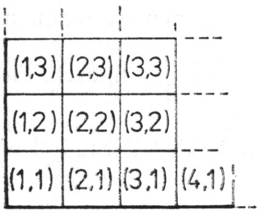
Obr. 10

$|\sphericalangle DCA| = 180° - \alpha$. Trojúhelník ADC je tedy rovnoramenný, osa jeho základny DC prochází bodem A i středem S kružnice k. Je tudíž kolmá na přímku DC i na tečnu kružnice k v bodě A, a proto jsou přímka DC a tečna kružnice k v bodě A spolu rovnoběžné.

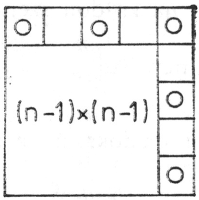
Kategorie B

B - I - 1

Označme každé pole šachovnice $n \times n$ uspořádanou dvojicí (i, j) přirozených čísel podle obr. 11. Postavíme-li figurky na všechna pole, pro která jsou obě čísla i, j lichá, nebudou žádné dvě figurky sousedit, neboť pole sousední k poli (i, j) s lichými čísly i, j je označeno dvojicí čísel, z nichž je aspoň jedno sudé. Při lichém n jsme tak na šachovnici rozmístili $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ figurek, při sudém n jsme rozmístili $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ figurek. Ukážeme ještě, že více figurek nelze při dodržení podmínky úlohy rozmístit. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Při $n = 1$ a $n = 2$ skutečně nelze rozmístit více než jednu figurku. Předpokládejme, že n je liché číslo, $n \geqq 3$. Šachovnici $n \times n$ pak můžeme rozdělit na šachovnici $(n - 1) \times (n - 1)$ a jeden řádek a jeden sloupec (obr. 12), přičemž tyto mají společné

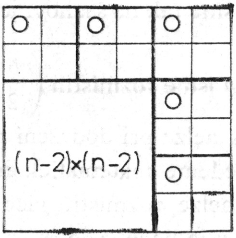


Obr. 11



Obr. 12

jedno pole. V tomto řádku a sloupci je celkem $2n - 1$ polí a můžeme na nich rozmístit nejvýše n figurek, nemají-li žádné dvě sousedit. Podle indukčního předpokladu můžeme na šachovnici $(n - 1) \times (n - 1)$ rozmístit nejvýše $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ figurek, celkem nejvýše $n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ figurek, což jsme měli dokázat. Při sudém n rozdělíme šachovnici $n \times n$ na šachovnici $(n - 2) \times (n - 2)$ a na $n - 1$ šachovnic typu 2×2 (obr. 13). Na šachovnici $(n - 2) \times (n - 2)$ můžeme



Obr. 13

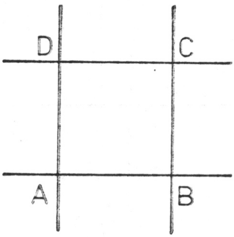
podle indukčního předpokladu rozmístit nejvýše $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ figurek; na každou šachovnici 2×2 nejvýše jednu figurku, celkem nejvýše $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + n - 1 = \left(\frac{n}{2}\right)^2$ figurek. Tím je indukční krok dokázán i při sudém n. Výsledek je tedy $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ při lichém n, $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ figurek při sudém n.

B - I - 2

Zřejmě 0 ani 1 nejsou kořeny mnohočlenu $P_n(x)$ při žádném n. Jeli $x > 1$, je vždy $x^{(2k)^2} - x^{(2k-1)^2} > 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$, n. Sečtením těchto nerovností s nerovností $1 > 0$ dostaneme $P_n(x) > 0$. Při $x < 0$ je $-x^{(2k-1)^2} > 0$, a tedy také $P_n(x) > 0$. Pro $x \in (0, 1)$ je $-x^{(2k-1)^2} + x^{(2k-2)^2} > > 0$, pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Sečtením těchto nerovností a nerovnosti $x^{(2n)^2} > 0$ dostaneme $P_n(x) > 0$ i pro $x \in (0, 1)$. Dokázali jsme tudíž, že pro všechna reálná čísla x je $P_n(x) > > 0$, tedy pro žádné reálné číslo x není $P_n(x) = 0$.

B - I - 3

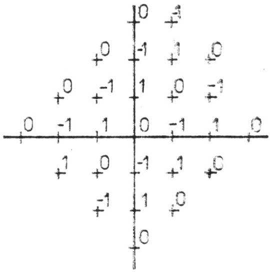
Zvolme jednotkový čtverec $ABCD$ s vrcholy v mřížových bodech roviny (obr. 14). Předpokládejme, že zobrazení F



Obr. 14

splňuje podmínku úlohy. Pak je $F(A) + F(D) + F(C) = 0$, $F(D) + F(C) + F(B) = 0$, takže $F(A) = F(B)$. Stejně tak dokážeme, že $F(B) = F(C)$. Přiřazuje tedy zobrazení F

každým dvěma sousedním mřížovým bodům, a tudíž každým dvěma mřížovým bodům, totéž číslo, jež se podle podmínky (1) v textu úlohy musí rovnat nule. Tudíž nenulové zobrazení požadovaných vlastností neexistuje. Budeme-li platnost (1) požadovat jen pro pravoúhlé trojúhelníky, jejichž přepona je rovnoběžná s přímkou BD, dostaneme pouze podmínku $F(A) = F(C)$, a to použitím trojúhelníků ABD a BDC. Víme pak, že zobrazení F přiřazuje stejnou hodnotu každým takovým dvěma mřížovým bodům, jejichž spojnice je rovnoběžná s přímkou AC. Za F můžeme vzít třeba zobrazení, které mřížovému bodu o souřadnicích $[x, y]$ přiřadí číslo 0, 1 nebo -1 podle toho, je-li číslo $y - x$ dělitelné třemi, dává při dělení třemi zbytek 1 nebo zbytek 2. Na obr. 15 je k několika mřížovým bodům připsána hodnota, kterou jim zobrazení F přiřazuje.

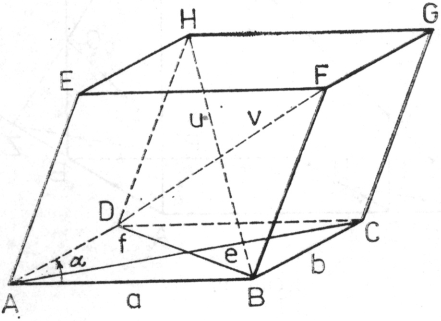


Obr. 15

B - I - 4

Označme e, f délky úhlopříček v rovnoběžníku $ABCD$, který je jednou stěnou rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$

(obr. 16), dále označíme $a = |AB|$, $b = |BC|$ délky hran a $\alpha = |\sphericalangle DAB|$. Podle kosinové věty je $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, takže $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$. Označme ještě u, v délky tělesových úhlopříček BH, DF rovnoběžnostěnu a $c = |AE|$ délku jeho třetí hrany. Podobně jako při předcházejícím postupu odvodíme, že



Obr. 16

$$u^2 + v^2 = 2(f^2 + c^2),\quad w^2 + z^2 = 2(e^2 + c^2),$$

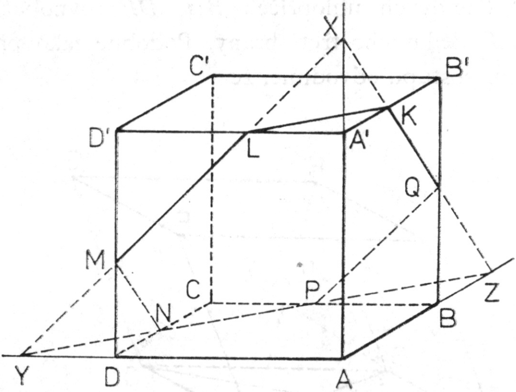
kde $w = |AG|$, $z = |CE|$ jsou délky zbývajících dvou tělesových úhlopříček rovnoběžnostěnu. Sečtením dostaneme

$$u^2 + v^2 + w^2 + z^2 = 2(e^2 + f^2) + 4c^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

Tím je úloha vyřešena. Je možné ji řešit také pomocí skalárního součinu vektorů. Označíme-li $\mathbf{u} = H - B$, $\mathbf{v} = F - D$, $\mathbf{w} = G - A$, $\mathbf{z} = E - C$, $\mathbf{a} = B - A$, $\mathbf{b} = D - A$, $\mathbf{c} = E - A$, je $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{b} + \mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{z} = -\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c}$, takže

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 + |\mathbf{z}|^2 = 4(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2).$$

Přímka BD je kolmá k přímkám AC i AA', proto je kolmá k rovině CAA' (obr. 17), a tedy i k přímce AC'. Stejně tak



Obr. 17

dokážeme, že $BA' \perp AC'$, takže je k přímce AC' kolmá rovina BDA'. Roviny BDA' a $B'D'C$ jsou rovnoběžné, je tedy i rovina $B'D'C$ kolmá k přímce AC'. Rovina uvažovaného řezu je s těmito rovinami rovnoběžná. Je-li $t = 0$, tj. $K = A'$, je řezem trojúhelník BDA', je-li $t = a$, je řezem trojúhelník $B'D'C$. Je-li K vnitřním bodem úsečky $A'B'$, je řezem šestiúhelník $KLNMPQ$, přičemž $KL \parallel NP \parallel BD$, $LM \parallel PQ \parallel CB'$, $MN \parallel QK \parallel BA'$. Rovina řezu protne přímky AA', AD a AB v bodech X, Y, Z, které tvoří rovnostranný trojúhelník o straně délky $(a - t)\sqrt{2} + 2t\sqrt{2} = (a + t)\sqrt{2}$. Obvod o šestiúhelníku je $3(a - t)\sqrt{2} +$

$+ 3t\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}$, neboť $|KL| = |KX| = t\sqrt{2}$, $|PN| = (a - t)\sqrt{2}$. Obsah S šestiúhelníku $KLMNPQ$ dostaneme, když od obsahu trojúhelníku XYZ odečteme obsahy trojúhelníků XKL, YMN, ZPQ, tedy trojnásobek obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně délky $t\sqrt{2}$, takže

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + 2at - 2t^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{3a^2}{2} - 2\left(t - \frac{a}{2}\right)^2\right].$$

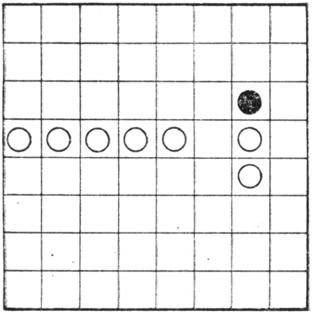
Vidíme, že pro $t \in \langle 0, a \rangle$ je obsah S maximální při $t = \frac{a}{2}$, minimální při $t = 0$ nebo $t = a$, kdy se však šestiúhelník redukuje na trojúhelník. Obvod o na t nezávisí, je konstantní.

B - I - 6

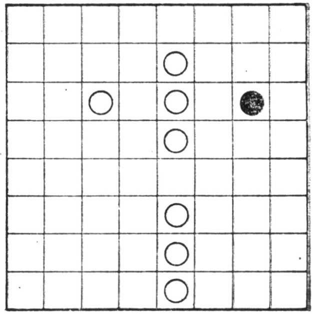
Důkaz provedeme matematickou indukcí. Je $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{2}{3}$. Pro $n = 3$ a $n = 4$ dokazované nerovnosti $0 < x_n < 1$, tedy platí. Předpokládejme, že platí pro všechna $k \leqq n + 1$. Pak je $2 - x_n - x_{n+1} > 0$, $1 - x_n x_{n+1} > 0$, takže $x_{n+2} > 0$. Je pak také $(1 - x_n)(1 - x_{n+1}) > 0$, tj. $2 - x_n - x_{n+1} > 1 - x_n x_{n+1} > 0$, odkud plyne $x_{n+2} < 1$. Dokázali jsme $0 < x_{n+2} < 1$. Tím je tvrzení úlohy matematickou indukcí dokázáno.

B - S - 1

Úloha má více řešení, dvě jsou uvedena na obr. 18 a 19.



Obr. 18



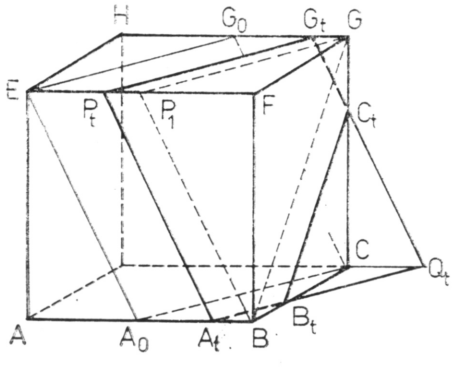
Obr. 19

B - S - 2

Pro $x = 1$ a $x = 2$ dostaneme celá čísla $a + b$, $2^{1988}a + b$, jejich rozdíl $a(2^{1988} - 1)$ je tedy také celé číslo, takže je číslo a racionální. Nechť je $a = \dfrac{p}{q}$, čísla p, q celá. Položíme-li $x = q$, vidíme, že číslo $aq^{1988} + b = pq^{1987} + b$ je číslo celé. To však znamená, že je i číslo b celé. Jelikož b je celé a číslo $a + b$ rovněž, je i číslo a celé. Tím je důkaz tvrzení úlohy dokončen, a i b jsou čísla celá.

B - S - 3

Trojúhelník BGP_1 (obr. 20) je rovnoramenný se základnou délky $2\sqrt{2}$, délky ramen BP_1 a GP_1 jsou $\sqrt{5}$. Jeho výška příslušná k základně má tudíž délku $\sqrt{3}$, obsah trojúhelníku BGP_1 je $S_1 = \sqrt{6}$. Pro $t = 0$ je řezem kosočtverec EA_0CG_0,



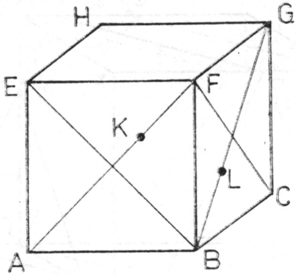
Obr. 20

jehož obsah je $2S_1 = 2\sqrt{6}$. Pro $t \in (0, 1)$ je řezem pětiúhelník $P_tA_tB_tC_tG_t$, který dostaneme z kosočtverce $P_tA_tQ_tG_t$ odříznutím trojúhelníku $B_tQ_tC_t$. Z podobnosti trojúhelníků $B_tQ_tC_t$ a GP_1B plyne, že se obsah trojúhelníku $B_tQ_tC_t$ rovná $t^2\sqrt{6}$. Obsah S_t řezu $P_tA_tB_tC_tG_t$ je tudíž $(2 - t^2)\sqrt{6}$.

B - II - 1

Dále uvedené řešení je od *Marty Bendové*, žákyně 2. ročníku gymnázia v Praze 1, Štěpánské ul. Přímka BG je kolmá k rovině EFC, protože je kolmá k přímkám FC a FE (obr. 21). Pak je však přímka BG také kolmá k přímce EC. Podobně dokážeme, že je rovina EBC kolmá k přímce AF, takže je $EC \perp AF$, $EC \perp BG$. Zřejmě je $KL \parallel EC$, takže je $KL \perp AF$ a $KL \perp BG$, což jsme měli dokázat.

Jiný důkaz se opírá pouze o Pythagorovu větu. Polo-



Obr. 21

žíme-li $|AB| = 3$, je $|KL| = \sqrt{3}$, $|BL| = \sqrt{2}$ a $|BK| = \sqrt{5}$, takže je trojúhelník KLB pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu L. Stejně tak dokážeme, že je trojúhelník FKL pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu K, takže $KL \perp BG$ a $KL \perp AF$.

B - II - 2

Úloha úzce navazuje na úlohu B - S - 1, velmi pěkně ji řešil *Vladimír Šolc*, žák 2. ročníku gymnázia v Berouně, jehož řešení zde uvádíme. Stojí-li na šachovnici 7 střelců, existuje jedna barva (bílá nebo černá) tak, že na polích této barvy stojí nejvýše tři střelci. Můžeme předpokládat, že je to barva bílá. Při kraji šachovnice je 14 bílých polí, přitom každý střelec na bílém poli může ohrozit nejvýše 4 bílá krajní pole šachovnice. Celkem tedy může být ohroženo nejvýše 12 bílých okrajových polí, nejméně dvě ohrožena nebudou.

B - II - 3

Žák *Ondřej Kalenda* z 2. ročníku gymnázia W. Piecka v Praze ukázal, že podmínkám úlohy vyhovuje mnohočlen

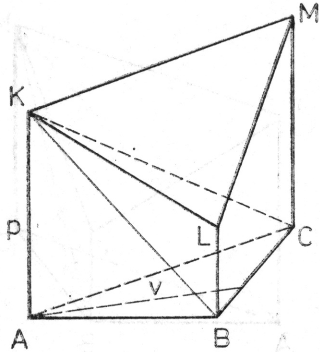
$$f(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

jeho spolužák *Jakub Cvach* uvedl polynom

$$g(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-2)(x-3)\dots(x-n)[x-(n+2)].$$

B - II - 4

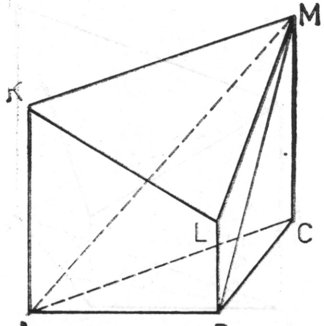
Velmi pěkné řešení uvedl v soutěži *Lubomír Rulíšek*, žák 2. ročníku gymnázia W. Piecka v Praze. Postupoval asi takto: Těleso $ABCKLM$ (obr. 22) se skládá z jehlanu $ABCK$



Obr. 22

a jehlanu $BCMLK$. První jehlan má objem $\frac{1}{3}Sp$, objem druhého jehlanu je $\frac{1}{3}Pv$, kde v je výška jehlanu na stěnu $BLMC$, což je zároveň výška v trojúhelníku ABC na stranu BC, P je obsah lichoběžníku $BLMC$. Proto je $P = \frac{1}{2}(q + r)\,a$, kde $a = |BC|$. Je tudíž $\frac{1}{3}Pv = \frac{1}{6}(q + r)\,av = \frac{1}{3}(q + r)\,S$, celkový objem tělesa $ABCKLM$ je proto $\frac{1}{3}S(p + q + r)$.

Jiné řešení ukázal *Jan Macháček* z 2. ročníku téhož gymnázia. Rozložil těleso $ABCKLM$ na jehlany $ABCM$, $ABML$ a $ALMK$. Objem jehlanu $ABML$ (obr. 23) se rovná objemu



Obr. 23

$ABCL$, protože tyto jehlany mají stejnou podstavu ABL a body M, C jsou od ní stejně vzdáleny. Obsah trojúhelníku AKL se rovná obsahu trojúhelníku AKB, takže objem jehlanu $AKLM$ se rovná objemu jehlanu $AKBM$ a ten se rovná objemu jehlanu $AKBC$, neboť poslední dva jehlany mají stejnou podstavu AKB, od níž jsou body M, C stejně vzdáleny. Jehlany $ABCM$, $ABCL$, $ABCK$ mají objemy $\frac{1}{3}Sq$, $\frac{1}{3}Sr$, $\frac{1}{3}Sp$, takže celkový objem tělesa $ABCKLM$ je $\frac{1}{3}S(p + q + r)$.

Kategorie A

A - I - 1

Uvažujeme množinu M všech mnohočlenů s požadovanými vlastnostmi. Množina M je neprázdná, protože do ní patří mnohočlen $m(x) = x^{1987} - 2$. Označme p ten z mnohočlenů v množině M, který má nejmenší stupeň. Potom p dělí každý mnohočlen v M, tedy i m. To plyne z dělitelnosti mnohočlenů: Je-li $n \in \mathsf{M}$, označme q jeho podíl při dělení mnohočlenem p a r příslušný zbytek, tj. mnohočlen s racionálními koeficienty stupně menšího, než je stupeň mnohočlenu p. Protože n i p leží v množině M, plyne z rovnosti

$$n = pq + r,$$

že je také $r \in \mathsf{M}$. Protože předpokládáme, že p má v množině M nejmenší stupeň, musí být $r = 0$.

Mnohočlen $m(x) = x^{1987} - 2$ má kořeny

$$x_k = \sqrt[1987]{2}\left(\cos\frac{2\pi k}{1987} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{1987}\right),\ 0 \leqq k \leqq 1986.$$

Mnohočlen p má reálné koeficienty, takže s každým kořenem x_k má i komplexně sdružený kořen $\bar{x}_k$ $(1 \leqq k \leqq 1986)$. Odtud vyplývá, že mnohočlen p je součinem některých trojčlenů

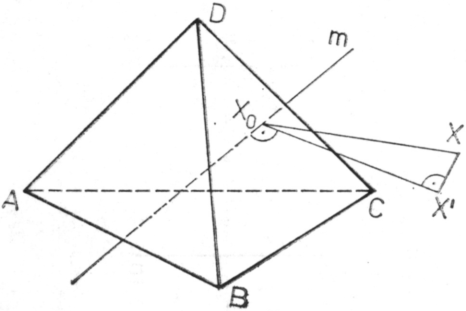
$$(x - x_k)(x - \bar{x}_k) = x^2 - 2x\,\mathrm{Re}\,x_k + |x_k|^2 =$$
$$= x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{1987} + \sqrt[1987]{4}$$

a případně i dvojčlenu $x - x_0 = x - \sqrt[1987]{2}$. Jeho absolutní člen je pak tvaru $\sqrt[1987]{2^j}$ pro nějaké $j \in \{1, 2, \ldots, 1987\}$. To je ale racionální číslo jen pro $j = 1987$. Je tedy $p = m$ a hledaný mnohočlen je $x^{1987} - 2$.

Poznámka. Tvrzení, že odmocnina $\sqrt[1987]{2^j}$ je racionální jen pro čísla $j = 1987 j_1$, není asi každému zřejmé. Dokáže se ale obdobně jako známé tvrzení, že $\sqrt{2}$ je iracionální. Předpokládejme, že $\sqrt[1987]{2^j} = \dfrac{p}{q}$ pro nějaká nesoudělná celá čísla p, q, tj. že platí $q^{1987} . 2^j = p^{1987}$, odkud plyne, že p je sudé. A protože q musí být liché a 2^{1987} dělí $q^{1987} . 2^j$, vychází, že exponent j je násobkem čísla 1987.

A - I - 2

Označme m spojnici středů hran AB a CD (jejich společnou osu) a pro libovolný bod X prostoru označme X_0 jeho



Obr. 24

pravoúhlý průmět na přímku m (obr. 24). Je-li X' pravoúhlý průmět bodu X do roviny ABm, je

$$|AX| + |BX| = \sqrt{|AX'|^2 + |XX'|^2} + \sqrt{|BX'|^2 + |XX'|^2} \geqq$$
$$\geqq |AX'| + |BX'| \geqq |AX_0| + |BX_0|$$

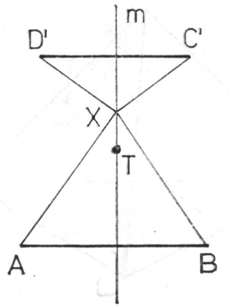
(přímky AB a X_0X' jsou rovnoběžné!) s rovností, právě když bod X leží na m nebo na úsečce AB. Podobně dostaneme nerovnost

$$|CX| + |DX| \geqq |CX_0| + |DX_0|$$

s rovností, právě když bod X leží na m nebo na úsečce CD. Stačí tedy zkoumat jen body X ležící na přímce m.

Otočme úsečku CD kolem přímky m do roviny určené přímkami AB a m; dostaneme úsečku $C'D'$ (obr. 25). Pro každý bod $X \in m$ potom je

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| =$$
$$= |AX| + |BX| + |C'X| + |D'X|,$$



Obr. 25

přitom

$$|AX| + |D'X| \geqq |AT| + |D'T|,$$
$$|BX| + |C'X| \geqq |BT| + |C'T|,$$

kde T je střed (těžiště) daného čtyřstěnu, takže

$$|AX| + |BX| + |C'X| + |D'X| \geqq$$
$$\geqq |AT| + |BT| + |CT| + |DT|$$

s rovností, právě když $X = T$.

Jiné řešení. Pro libovolný bod X prostoru označme

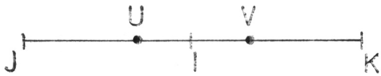
$$f(X) = |AX| + |BX| + |CX| + |DX|.$$

Protože podle předcházejícího řešení funkce f může nabývat minima pouze v některém bodě ležícím na ose dvou protějších hran daného čtyřštěnu, stačí ukázat, že funkce f má minimum. Funkce f pak nabývá minima v průsečíku obou os protějších hran čtyřstěnu, což je střed S opsané kulové plochy.

Funkce f je zřejmě spojitá. Uvažujme kouli K se středem A a poloměrem $f(S)$. Daný čtyřstěn leží celý v kouli K, což je omezená a uzavřená množina, na které nabývá spojitá funkce f svého minima. A vně koule K už je $f(X) > f(S)$.

A - I - 3

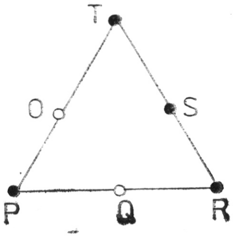
Nejprve ukážeme, že vždy existují tři stejně obarvené body R, S, T takové, že bod S půlí úsečku RT. Jistě existují dva body U, V obarvené stejnou barvou. Uvažujme body I, J, K (obr. 26) takové, že I půlí úsečku UV, U je střed úsečky JV a V je střed úsečky UK. Pokud nejsou stejno-



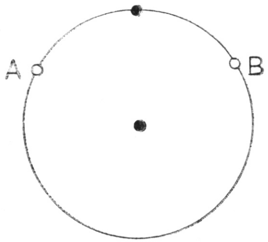
Obr. 26

barevné trojice bodů U, I, V; J, U, V; U, V, K, mají tři body I, J, K stejnou barvu, přičemž I je středem úsečky JK.

Mějme tedy tři stejnobarevné body R, S, T, kde S půlí úsečku RT, a uvažujme rovnostranný trojúhelník PRT (obr. 27). Pokud má některý z bodů O, P, Q stejnou barvu



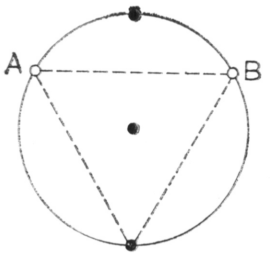
Obr. 27



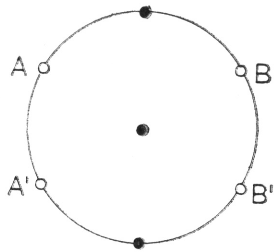
Obr. 28

jako body R, S, T, jsme hotovi (vznikne stejnobarevný rovnostranný trojúhelník OST, resp. PRT, resp. QRS). V opačném případě bude mít rovnostranný trojúhelník OPQ stejně obarvené vrcholy.

Jiné řešení. Uvažujme šest bodů ve vrcholech pravidelného šestiúhelníku a střed opsané mu kružnice. Má-li střed šestiúhelníku např. černou barvu, můžeme předpokládat, že jeho vrcholy nejsou všechny dejme tomu bílé, jinak bychom byli hotovi. Podobně nám vyjde, že i body A, B (obr. 28) budou bílé a k nim příslušný vrchol rovnostranného trojúhelníku černý (obr. 29). Konečně musí být zbývající dva body bílé (obr. 30), jinak jsme s vybarvováním bodů roviny



Obr. 29



Obr. 30

hotovi. Přidáme-li ale k uvedeným sedmi bodům další bod podle obr. 30, vidíme, že ať ho obarvíme jakkoli, dostaneme stejnobarevný rovnostranný trojúhelník.

A - I - 4

Využijme známou skutečnost, že čtyřúhelník $TPCQ$ je tečnový, právě když

$$|TP| + |CQ| = |PC| + |TQ|. \tag{1}$$

Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, je $|TP| = |TQ|$ a $|CP| = |CQ|$, takže podle (1) je $TPCQ$ tečnový čtyřúhelník. Označme $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AP| = t_a$, $|BQ| = t_b$; z (1) pak plyne:

$$\frac{1}{3} t_a + \frac{b}{2} = \frac{1}{3} t_b + \frac{a}{2},$$

a tedy

$$2(t_a - t_b) = 3(a - b). \tag{2}$$

Kružnice vepsaná čtyřúhelníku $TPCQ$ je vepsána též trojúhelníkům APC a BQC, které mají stejný obsah S. Pro poloměr ϱ vepsané kružnice platí

$$\varrho = \frac{2S}{|AP| + |PC| + |AC|} = \frac{2S}{|BQ| + |QC| + |CB|},$$

takže

$$t_a + \frac{a}{2} + b = t_b + \frac{b}{2} + a,$$
$$2(t_a - t_b) = a - b. \tag{3}$$

Z rovností (2) a (3) dostáváme $a - b = 0$, tj. $a = b$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB.

Jiné řešení. Dokážeme jen druhou implikaci. Při stejném označení jako v prvním řešení spočteme velikosti těžnic podle kosinové věty

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

(napíšeme kosinovou větu pro strany AP, AB trojúhelníků APC, ABC, které mají společný úhel, vyloučením členu s $\cos\gamma$ dostaneme první rovnost, druhou odvodíme analogicky či cyklickou záměnou), takže dostaneme

$$t_b{}^2 - t_a{}^2 = \frac{3}{4}(a^2 - b^2).$$

Odtud je vidět, že $a > b$, právě když $t_b > t_a$, zatímco ze vztahu (2) plyne, že $a > b$, právě když $t_a > t_b$. Je proto nutně $a = b$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný.

A - I - 5

Předpokládejme, že tvrzení neplatí, tj. že existuje přirozené číslo k takové, že pro každá dvě přirozená čísla m, n, $m + n \geqq k$, platí

$$f(m, n) \geqq f(m + 1, n) + f(m, n + 1) \geqq 2.$$

Odtud ale dále plyne

$$\begin{aligned} f(m, n) \geqq f(m + 2, n) + f(m + 1, n + 1) &+ \\ + f(m + 1, n + 1) + f(m, n + 2) &\geqq 2^2, \end{aligned}$$

takže pro pevně zvolená dvě čísla m, n, $m + n \geqq k$, matematickou indukcí dostaneme, že

$$f(m, n) \geqq 2^N$$

pro libovolné přirozené N. To je spor.

Jiné řešení. Pro dané k přirozené označme

$$c = \inf_{x+y \geqq k} f(x, y),$$

zřejmě je $c \geqq 1$. Z vlastností infima plyne, že existují přirozená čísla $m, n, m + n \geqq k$, taková, že

$$c \leqq f(m, n) < 2c.$$

Odtud ale plyne nerovnost

$$f(m, n) < 2c \leqq f(m + 1, n) + f(m, n + 1)$$

pro všechna přirozená čísla m, n taková, že $m + n \geqq k$.

A - I - 6

Předpokládejme, že takové číslo existuje a že

$$n = \sum_{i=0}^{22} 10^i a_i$$

je jeho zápis v desítkové soustavě. Protože

$$10^{2i+1} \equiv -1 \text{ a } 10^{2i} \equiv 1 \pmod{11},$$

dává číslo n při dělení 11 zbytek

$$z \equiv \sum_{i=0}^{11} a_{2i} - \sum_{i=0}^{10} a_{2i+1} \pmod{11},$$

kde $1 \leqq z \leqq 10$. Jak teď můžeme změnou jedné číslice dostat číslo dělitelné 11? Je-li např. pro nějaké $i \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ $a_{2i} \geqq z$, změníme číslici a_{2i} na $a_{2i} - z$, je-li naopak $a_{2i} \leqq z - 2$, napíšeme místo a_{2i} číslici $a_{2i} + 11 - z$ a dostaneme tak nové číslo, které bude dělitelné 11. Musí tedy být $a_{2i} = z - 1$, $1 \leqq i \leqq 11$. Podobně pro číslice na lichých místech nemůže být ani $a_{2i+1} \leqq 9 - z$, ani $a_{2i+1} \geqq 11 - z$. Vychází tedy jediná možnost $a_{2i+1} = 10 - z$, $1 \leqq i \leqq 10$.

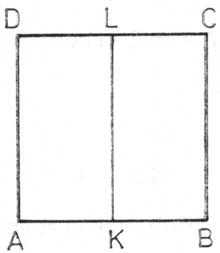
V úvahu proto přichází jedině číslo n, které má na lichých místech číslici $10 - z$ a na sudých $z - 1$. Pro jeho zbytek z při dělení 11 však máme kongruenci

$$z \equiv 12(z - 1) - 11(10 - z) \equiv z - 1 \pmod{11},$$

což nejde. Číslo požadovaných vlastností tedy neexistuje.

A - S - 1

Označme A, B, C, D vrcholy daného čtverce a K, L středy jeho protějších stran AB, CD (obr. 31). Kruhy, jejichž hraniční kružnice jsou opsány obdélníkům $AKLD$, $KBCL$, zřejmě pokryjí celý čtverec a jejich poloměr je $\frac{5}{2}\sqrt{5}$.



Obr. 31

Předpokládejme, že čtverec $ABCD$ je pokryt dvěma shodnými kruhy o poloměru r. Ze čtyř jeho vrcholů aspoň dva leží v jednom z kruhů. Jsou-li to protější vrcholy, vyjde $2r \geqq 10\sqrt{2} > 5\sqrt{5}$. V opačném případě musí jeden z kruhů obsahovat dvojici sousedních vrcholů (např. B, C) a druhý kruh protější dvojici A, D. Protože aspoň jeden z kruhů musí obsahovat taky bod K, je vidět, že $2r \geqq 5\sqrt{5}$. Je tedy $r = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$ hledaný nejmenší poloměr.

A - S - 2

Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kořeny uvažované rovnice, dostaneme roznásobením kořenových činitelů

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 4,$$
$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n.$$

Je hned vidět, že n nemůže být liché, protože všechna x_i jsou nezáporná. Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pak plyne, že $\dfrac{4}{n} \geqq 1$, je tedy nutně $n = 2$ nebo $n = 4$.

Pro $n = 4$ vyjde $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ a rovnice má tvar

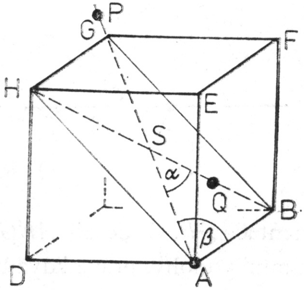
$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Pro $n = 2$ dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

s nezápornými kořeny $2 \pm \sqrt{3}$. Požadavkům úlohy vyhovují obě čísla $n = 2$ i $n = 4$.

Jestliže krychle $ABCDEFGH$ splňuje podmínky úlohy, leží obdélník $ABGH$ v rovině APQ a je $|BG| = |AB|\sqrt{2}$ (obr. 32). Obdélníkem $ABGH$ je krychle jednoznačně určena (až na záměnu označení hran CD, FE).

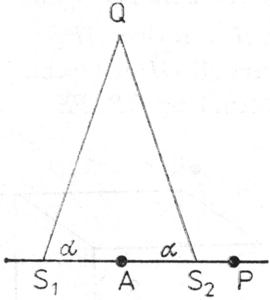


Obr. 32

Označme S střed krychle, který je zároveň středem obdélníku $ABGH$. Známe velikost α úhlu, který svírají tělesové úhlopříčky AG a BH, je to velikost úhlu úhlopříček v obdélníku, jehož strany jsou v poměru $\sqrt{2} : 1$. Označme ještě β velikost úhlu SAB. Přitom je $\beta < \alpha$, jak snadno zjistíme $\left(\alpha > \dfrac{\pi}{3}\right)$.

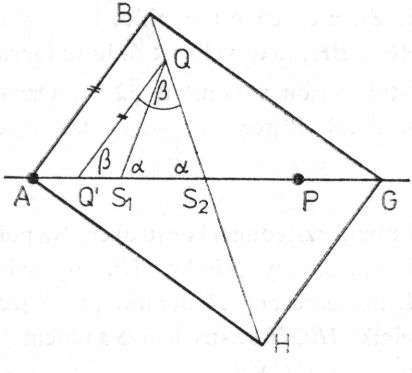
Z rozboru plyne následující konstrukce: Na polopřímce AP zvolíme bod S tak, aby přímky AP, SQ svíraly úhel α. Je-li $S \neq A$, můžeme bod A doplnit právě jedním způsobem na obdélník $ABGH$ se středem S a úhlem $|\sphericalangle ASB| = \alpha$ (bod B leží na přímce QS).

Pro volbu bodu S máme dvě možnosti, označme je S_1 a S_2 (obr. 33), jejich pořadí volíme tak, aby orientace S_1S_2



Obr. 33

byla stejná jako orientace AP. Obdélník $ABGH$ se středem S_1 bude splňovat podmínky úlohy, právě když bod S_1 bude ležet na polopřímce AP, $S_1 \neq A$ (bod B pak bude ležet na polopřímce opačné k polopřímce S_1Q). Obdélník $ABGH$ se



Obr. 34

středem S_2 bude splňovat podmínky úlohy, právě když bod B ležící tentokrát na polopřímce S_2Q nepadne dovnitř úsečky QS_2 (obr. 34), tj. právě když bod Q' souměrně sdružený s bodem Q podle osy úhlu QS_2A bude ležet na polopřímce AP. Podle toho má úloha buď dvě řešení (Q' leží na polopřímce AP), nebo jedno řešení (Q' leží vně polopřímky AP a $S_1 \neq A$ leží na polopřímce AP), anebo žádné řešení neexistuje.

A - II - 1

Uvažujme čtyři vrcholy daného jednotkového čtverce a jeho střed. Jestliže je čtverec pokryt čtyřmi shodnými kruhy o poloměru r, obsahuje jeden z kruhů aspoň dva z uvedených pěti bodů. A protože každé dva z těchto pěti bodů mají vzdálenost aspoň $\frac{\sqrt{2}}{2}$, plyne odtud, že je $r \geqq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

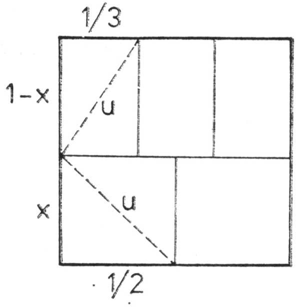
Jednotkový čtverec pokryjeme pěti kruhy opsanými obdélníkům podle obr. 35 (jejich úhlopříčky jsou shodné). Z rovnosti

$$u^2 = \frac{1}{9} + (1 - x)^2 = \frac{1}{4} + x^2$$

plyne $x = \frac{31}{72}$, takže

$$u^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{31}{72}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Příslušné kruhy tedy mají poloměr menší než $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

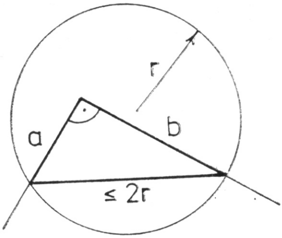


Obr. 35

Poznámky. Mnoho účastníků II. kola místo racionálního důkazu vyšlo ze »zřejmé« skutečnosti, že optimální pokrytí čtverce čtyřmi shodnými kruhy musí být symetrické (podle středu). Žel, takováto heuristická úvaha k opravdovému důkazu nestačí, jak ostatně ukázala druhá část uvedené úlohy. Vycházejíce ze souměrnosti, usuzovali tito »řešitelé« většinou na to, že pokrytí pěti shodnými kruhy pro $r < \frac{\sqrt{2}}{4}$ rovněž neexistuje... Na druhé straně se však v žákovských řešeních objevily i následující dva pěkné nápady:

Pro $r < \frac{\sqrt{2}}{4}$ nelze úhlopříčku jednotkového čtverce pokrýt dvěma shodnými kruhy, takže na to potřebujeme kruhy aspoň tři. Ale žádný z těchto kruhů nemůže obsahovat zbylé dva vrcholy druhé úhlopříčky, a ty nelze jedním kruhem o poloměru $r < \frac{\sqrt{2}}{4}$ oba najednou pokrýt (Jaroslav Trnka, 4. roč. G Liberec).

Kruh o poloměru $r < \frac{1}{2}$ pokryje nejvýše $2\sqrt{2}\,r$ z obvodu jednotkového čtverce (obr. 36), neboť $a + b \leqq 2\sqrt{2}\,r$. Čtyři



Obr. 36

shodné kruhy tak celkem pokryjí nejvýše $8\sqrt{2}\,r$ z obvodu čtverce. Proto musí být $8\sqrt{2}\,r \geqq 4$, tj. $r \geqq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

A - II - 2

Předpokládejme, že daná rovnice má reálné kořeny x_1, x_2, x_3, x_4, takže

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + ax + b = (x - x_1) \ldots (x - x_4)\,.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4\,, \tag{1}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 6\,.$$

Odtud plyne, že

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4\,. \tag{2}$$

Protože pro reálná čísla u_1, u_2, u_3, u_4 platí (Cauchyova) nerovnost

$$(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^2 \leqq 4(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)\,,$$

plyne z (1) a (2), že pro kořeny dané rovnice v uvedené nerovnosti nastane rovnost. To znamená, že existuje reálné k, pro které je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = k$. Z (1) pak vyjde $k = -1$. Uvedená rovnice má proto jediný (čtyřnásobný) kořen -1 a je

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + ax + b = (x + 1)^4\,,$$

takže $a = 4$, $b = 1$.

Jiné řešení. Protože

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 6x^2 + ax + b &= (x + 1)^4 - 4x - 1 + ax + b = \\ &= (x + 1)^4 + (x + 1)(a - 4) + b - a + 3\,, \end{aligned}$$

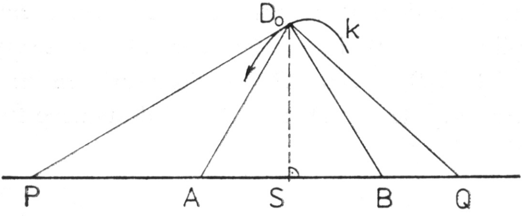
dostaneme po substituci $u = x + 1$ rovnici

$$u^4 = pu + q\,, \quad p = 4 - a, \quad q = a - b - 3\,.$$

Ta může mít čtyři reálné kořeny jen v tom případě, když se přímka $v = pu + q$ dotýká bikvadratické paraboly $v = u^4$ ve vrcholu (pak má jeden čtyřnásobný kořen), tedy jen pro $p = q = 0$. Odtud plyne $a = 4$, $b = 1$.

A - II - 3

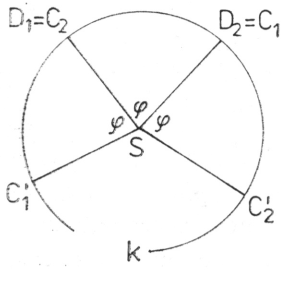
Předpokládejme, že hledaný čtyřstěn $ABCD$ existuje. Trojúhelník PQD je určen podle věty usu. Tím jsou zároveň jednoznačně (až na uspořádání) určeny body A, B, neboť vzdálenost bodu D od úsečky PQ je výškou rovnostranného trojúhelníku ABD. Sestrojíme tedy v libovolné rovině $\varrho \ni PQ$ bod D_0 tak, aby $|\sphericalangle QPD_0| = 30°$, $|\sphericalangle PQD_0| = 45°$. Vrchol D čtyřstěnu bude pak ležet na kružnici k (obr. 37), kterou do-



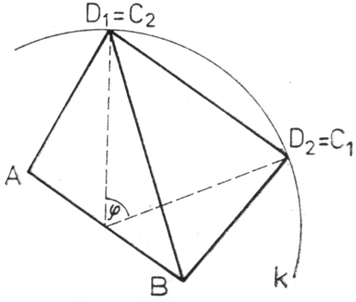
Obr. 37

staneme otáčením bodu D_0 kolem osy PQ, a zároveň v rovině δ. Trojúhelník ABD pak doplníme na pravidelný čtyřstěn, který bude řešením úlohy.

Počet řešení závisí na vzájemné poloze roviny δ a kružnice k. Pokud $k \cap \delta = \emptyset$, nemá úloha řešení; je-li průnik jedno-



Obr. 38a



Obr. 38b

bodový, má úloha dvě řešení souměrně sdružená podle roviny ABD; a leží-li kružnice k v rovině δ, existuje nekonečně mnoho řešení. Zbývá případ, kdy kružnice k má s rovinou δ dva společné body D_1, D_2. Každý z trojúhelníků ABD_1, ABD_2 můžeme doplnit na pravidelný čtyřstěn dvěma způsoby. Je-li však $|\sphericalangle D_1AD_2| = 60°$ (obr. 38), dva ze čtyřstěnů splynou ($ABC_2D_2 = ABC_1D_1$) a úloha má jen tři řešení. V opačném případě ($|\sphericalangle D_1AD_2| \neq 60°$) dostaneme čtyři různá řešení.

A - II - 4

Označme $d(p)$ uvažovaný součet. Ukážeme, že největší součet se nabývá pro permutaci p_0, kde $p_0(i) = n - i + 1$, $1 \leqq i \leqq n$. Permutace p_0 má tu vlastnost, že je klesající, tj. pro každé $i < j$ je $p_0(i) > p_0(j)$. Je-li $p \neq p_0$, existuje k, pro které je $p(k) < p(k+1)$. Prohozením hodnot $p(k)$, $p(k+1)$ dostaneme novou permutaci p', pro kterou je

$$p'(i) = p(i), \quad k \neq i \neq k+1\,,$$
$$p'(k) = p(k+1)\,, \quad p'(k+1) = p(k)\,,$$
$$d(p') - d(p) = |p(k) - k - 1| + |p(k+1) - k| - $$
$$- |p(k) - k| - |p(k+1) - k - 1|\,.$$

Pro $p(k) < p(k+1) \leqq k$ i pro $k + 1 \leqq p(k) < p(k+1)$ vyjde $d(p') = d(p)$, pro $p(k) \leqq k < k + 1 \leqq p(k+1)$ je $d(p') - d(p) = 2$. Je tedy $d(p') \geqq d(p)$. Přitom počet těch dvojic $i < j$, pro něž je $p(i) < p(j)$, se uvedenou změnou zmenšil. Po konečném počtu kroků tak dojdeme k permutaci p_0, pro kterou je

$$d(p_0) = n - 1 + n - 3 + \ldots + 2 + 2 + \ldots + n - 1 =$$

$$= 2\,\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{2} \text{ pro } n \text{ liché,}$$

$$= n - 1 + n - 3 + \ldots + 3 + 1 + 1 + \ldots + n - 1 =$$

$$= 2\,\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} \text{ pro } n \text{ sudé,}$$

což můžeme jednoduše zapsat jako $d(p_0) = \left[\dfrac{n^2}{2}\right]$.

Jiné řešení. Pro danou permutaci p odstraňme v součtu

$$d(p) = \sum_{i=1}^{n} |p(i) - i|$$

absolutní hodnoty. Je zřejmé, že v získaném součtu bude n sčítanců s kladným znaménkem a n sčítanců se záporným znaménkem. Přitom každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ se v uvedeném součtu vyskytne právě dvakrát. Je tedy jasné, že platí (viz též poznámky)

$$d(p) \leqq n + n + (n-1) + \ldots + \left[\frac{n+3}{2}\right] + \left[\frac{n+3}{2}\right] -$$

$$- \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] - \ldots - 2 - 2 - 1 - 1 =$$

$$= 2\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)\left[\frac{n}{2}\right] = 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n^2}{2}\right].$$

Nyní stačí zjistit, zda existuje nějaká permutace, pro kterou uvedená situace nastane. Tomuto požadavku vyhovuje např. permutace

$$p_0(i) = n - i + 1, \quad 1 \leqq i \leqq n\,.$$

(Permutací s maximálním součtem $d(p)$ existuje ovšem více, jejich počtem se zabývá např. úloha 24 v knize A. Vrby Kombinatorika, Škola mladých matematiků č. 45.)

Jiné řešení. Pro danou permutaci p označme A množinu těch čísel $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro která je $i < p(i)$, a předpokládejme, že A má k prvků ($0 \leqq k \leqq n - 1$). Pak platí

$$
\begin{aligned}
d(p) &= \sum_{i\in A} (p(i) - i) + \sum_{i\notin A} (i - p(i)) = \\
&= \sum_{i\in A} p(i) + \sum_{i\notin A} i - \sum_{i\in A} i - \sum_{i\notin A} p(i) \leqq \\
&\leqq (n + n - 1 + \ldots + n - k + 1) + \\
&\quad + (n + n - 1 + \ldots + (k + 1)) - \\
&\quad - (1 + 2 + \ldots + k) - (1 + 2 + \ldots + (n - k)) = \\
&= k\frac{2n - k + 1}{2} + (n - k)\frac{n + k + 1}{2} - k\frac{k + 1}{2} - \\
&\quad - (n - k)\frac{n - k + 1}{2} = 2k(n - k) \leqq \left[\frac{n^2}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Dále stačí dokázat, že existuje permutace, pro kterou zde nastane rovnost.

Jiné řešení. Pro danou permutaci p a pro $k \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ spočtěme, kolik je takových dvojic $(i, p(i))$, že $i \leqq k < p(i)$ nebo $p(i) \leqq k < i$. Označme tento počet d_k. Nyní je důležité si uvědomit, že je vlastně

$$\sum_{i=1}^{n} |p(i) - i| = \sum_{k=1}^{n-1} d_k .$$

Odtud dostaneme vhodný odhad, protože pro $k \leqq \frac{n}{2}$ je odpovídajících dvojic nejvýše $2k$, tj. $d_k \leqq 2k$, a pro $k > \frac{n}{2}$ je zase $d_k < 2(n-k)$, takže dohromady je

$$d(p) \leqq \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2k + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} 2(n-k) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} k + 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} k = \left[\frac{n^2}{2}\right],$$

jak postupně spočteme. Dále stačí ukázat, že existuje permutace, pro kterou nastane rovnost.

Poznámky. Výpočty v 2. řešení vypadají trochu kouzelně, ale jinak bychom nemohli uvedené vztahy zapsat najednou pro lichá i sudá n; rozlišením obou možností snadno ověříte, že je vše v pořádku. Podobně není těžké ověřit, že pro každé přirozené n platí

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n, \ 2\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n^2}{2}\right].$$

Pro ty, kteří hned nevidí např. rovnost

$$n + n - 1 + \ldots + n - k + 1 = k\frac{2n - k + 1}{2},$$

připomínáme, že pro součet konečné aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_k$ kromě známého vzorečku platí i

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = k\frac{a_1 + a_k}{2}.$$

A - III - 1

Protože M je konečná, existují indexy r, $r+p$ takové, že $x_r = x_{r+p}$. Pak už je zřejmě $x_n = x_{n+p}$ pro každé $n \geqq r$ a dokonce $x_n = x_{n+kp}$ pro každé $n \geqq r$ a $k \geqq 0$. Vezmeme-li $m = kp$ tak, aby bylo $m > r$, bude $x_m = x_{kp} = x_{kp+kp} = x_{2m}$.

A - III - 2

Pro kořeny x_1, x_2, x_3 dané rovnice platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a\,,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b\,,$$
$$x_1x_2x_3 = -c\,,$$

takže z podmínky $a^2 - 2b = 2$ plyne

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2\,.$$

Je tedy

$$\begin{aligned}
&4 - (a-c)^2 = 4 - a^2 + 2ac - c^2 = 2 - 2b + 2ac - c^2 = \\
&= 2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \\
&\quad + 2(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2) - x_1^2x_2^2x_3^2 = \\
&= 2(1 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_2 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 - \\
&\quad - x_1^2x_2^2x_3^2) + x_1^2x_2^2x_3^2 = \\
&= 2(1 - x_1x_2)(1 - x_2x_3)(1 - x_3x_1) + x_1^2x_2^2x_3^2 \geqq 0\,,
\end{aligned}$$

neboť pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$ platí (indexy počítáme mod 3)

$$\begin{aligned}
&2(1 - x_ix_{i+1}) = 2 - 2x_ix_{i+1} = \\
&= x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 - 2x_ix_{i+1} = \\
&= (x_i - x_{i+1})^2 + x_{i+2}^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

Získaná nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $|a - c| \leqq 2$.

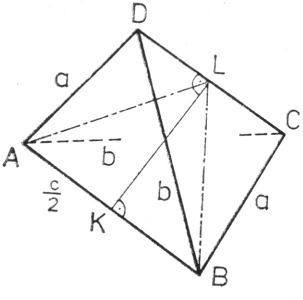
A - III - 3

Označme K, L středy hran AB, CD. Ze shodnosti trojúhelníků ACD, BDC (obr. 39) plyne $|BL| = |AL|$, takže $KL \perp AB$. Podobně je i $KL \perp CD$. Jestliže bod X neleží na přímce KL a bod X' je jeho kolmý průmět na přímku KL, je

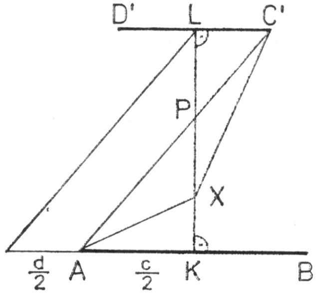
$$|CX| + |DX| > |CX'| + |DX'|\,,$$
$$|AX| + |BX| > |AX'| + |BX'|\,,$$

jak už víme z řešení úlohy A - I - 2. Stačí tedy uvažovat body X na přímce KL.

Otočme úsečku CD do roviny ABL, dostaneme tak úsečku $C'D'$ (obr. 40), $|C'D'| = |CD|$. Pro každý bod X přímky KL



Obr. 39



Obr. 40

je $|CX| = |C'X|$, $|DX| = |D'X|$, takže pro uvedený součet platí

$$s = |AX| + |BX| + |CX| + |DX| = 2(|AX| + |C'X|) \geqq$$
$$\geqq 2|AC'|$$

s rovností pro průsečík P úseček KL a AC'. Je tedy

$$s = 2\sqrt{\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + |KL|^2}$$

a z trojúhelníků ABL, BCD postupně spočteme (BL je těžnice v trojúhelníku BCD)

$$|KL|^2 = |BL|^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2+d^2}{4}.$$

Odtud vychází $s = \sqrt{2(a^2+b^2+cd)}$.

A - III - 4

Všech obarvení daných čísel je 2^{2^n}. Každá aritmetická posloupnost je určena svým prvním členem a diferencí d. V uvedeném případě je $d \leqq \dfrac{2^n}{2n-1}$, takže z daných čísel lze vybrat nejvýše $\dfrac{(2^n)^2}{2n-1}$ takových posloupností. Ke každé $2n$-členné posloupnosti existuje celkem 2^{2^n-2n} obarvení zbylých $2^n - 2n$ čísel, při nichž je tato posloupnost jednobarevná (má jednu ze dvou možných barev). Existuje tedy nejvýše

$$2 \,.\, \frac{2^{2^n-2n} \,.\, 2^{2n}}{2n-1} = 2^{2^n} \,.\, \frac{2}{2n-1} < 2^{2^n} \quad (n > 1)$$

obarvení, při nichž je některá $2n$-členná aritmetická posloupnost jednobarevná. Odtud plyne existence požadovaného obarvení pro $n > 1$, pro $n = 1$ je jeho existence zřejmá.

A - III - 5

Pro $a \in (-2, 2)$ má rovnice $u^2 - au + 1 = 0$ dva komplexně sdružené kořeny u, $\bar{u}$, pro které platí $u\bar{u} = |u|^2 = 1$, $u + \bar{u} = 2 \operatorname{Re} u = a$. Je-li $u = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$, má rovnice $x^7 = u$ (a tedy i rovnice $x^{14} - ax^7 + 1 = 0$) kcřeny

$$x_k = \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{7} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{7}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 6\}.$$

Mnohočlen $p(x) = x^{154} - ax^{77} + 1$ bude násobkem mnohočlenu $x^{14} - ax^7 + 1$, právě když $p(x_k) = (u^{11})^2 - au^{11} + 1 = 0$ pro všechna k, $0 \leqq k \leqq 6$, tj.

$$u^{11} = \cos 11\alpha + i \sin 11\alpha = u = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

anebo

$$u^{11} = \cos 11\alpha + i \sin 11\alpha = \bar{u} = \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Je tedy buď

$$11\alpha = \alpha + 2m\pi, \quad \alpha = \frac{m\pi}{5}, \quad m \in \{1, 2, 3, 4\},$$

nebo

$$11\alpha = -\alpha + 2n\pi, \quad \alpha = \frac{n\pi}{6}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Protože $a = 2 \operatorname{Re} u = 2\cos \alpha$, vyhovují úloze čísla $a \in \left\{-\sqrt{3}, -2\cos\frac{\pi}{5}, -1, -2\cos\frac{2}{5}\pi, 0, 2\cos\frac{2}{5}\pi, 1, 2\cos\frac{\pi}{5}, \sqrt{3}\right\}$.

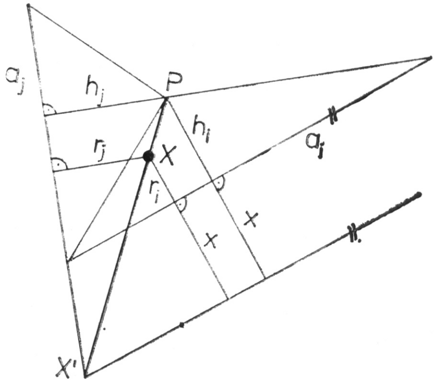
Předpokládejme, že v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ existuje takový bod X, který neleží v žádném z uvedených trojúhelníků. Změníme tedy přiřazení bodů P_i a stran a_j daného trojúhelníku tak, abychom tento bod X pokryli. Protože ke každému bodu P trojúhelníku $A_1A_2A_3$ můžeme určit jeho stranu a_i tak, že trojúhelník Pa_i bude obsahovat bod X, můžeme najít stranu a_j, pro kterou je $X \in P_1a_j$, podobně k bodu P_j určíme stranu a_k tak, že $X \in P_ja_k$, a pokud $k \neq 1$, najdeme ještě stranu a_m, pro kterou $X \in P_ka_m$. Nyní je buď $m = 1$, anebo $m = j$.

Pokud $k = 1$, vezmeme místo trojúhelníků P_1a_1, P_ja_j trojúhelníky P_1a_j, P_ja_1, podobně pro $k \neq 1$ a $m = 1$ místo původních trojúhelníků vezmeme trojúhelníky P_1a_j, P_ja_k, P_ka_1. Pokud $k \neq 1 \neq m$, tedy $m = j$, vezmeme místo trojúhelníků P_2a_2, P_3a_3 trojúhelníky P_2a_3, P_3a_2 (vždy některé trojúhelníky neobsahující bod X nahrazujeme trojúhelníky, které bod X obsahují).

Označíme-li h_{ij} vzdálenost bodu P_i od strany a_j, z původního součinu $h_{11}h_{22}h_{33}$ dostaneme popsanou změnou součin $h_{1j}h_{j1}h_{33}$, anebo součin $h_{1j}h_{jk}h_{k1}$, či součin $h_{11}h_{23}h_{32}$. Ukážeme, že nové přiřazení bodů a stran trojúhelníku $A_1A_2A_3$ dá větší součin odpovídajících vzdáleností, což odporuje předpokladu úlohy.

Je-li P bod daného trojúhelníku a $X \in Pa_i$, $X \notin Pa_j$ (obr. 41), pak pro vzdálenosti h_i, h_j bodu P a vzdálenosti r_i, r_j bodu X od stran a_i, a_j platí

$$\frac{h_i}{r_i} > \frac{h_i + x}{r_i + x} = \frac{|PX'|}{|XX'|} = \frac{h_j}{r_j},$$



Obr. 41

kde X' je průsečík polopřímky PX s přímkou obsahující stranu a_j, pokud není rovnou

$$\frac{h_j}{r_j} < 1 < \frac{h_i}{r_i}$$

(to by bod X' neexistoval). Odtud plyne, že např. pro $k = 1$ bude

$$\frac{h_{1j}h_{j1}h_{33}}{r_1r_2r_3} > \frac{h_{11}h_{22}h_{33}}{r_1r_2r_3},$$

tedy i $h_{1j}h_{j1}h_{33} > h_{11}h_{22}h_{33}$. A podobně i v ostatních případech se příslušný součin odpovídajících vzdáleností zvětší. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Platí obecnější tvrzení, které v prostoru můžeme formulovat takto: Jsou-li $P_1, P_2, \ldots, P_n$ body uvnitř daného konvexního n-stěnu M, pak lze jeho stěny označit a_1, a_2, $\ldots$, a_n tak, že jehlany $P_i a_i$ pokrývají celý mnohostěn M. (Stěny označíme tak, aby součin vzdáleností bodů P_i od odpovídajících stěn a_i byl co největší.)

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajském kole kategorií B a C předchozího ročníku MO. K účasti se tentokrát přihlásilo 75 řešitelů z celé republiky, z nichž jen 33 vydrželo až do posledního kola.

V průběhu 37. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete v úlohové části ročenky (bez řešení). Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli

1. *Pavol Gvozdjak*, 4 G A. Markuša, Bratislava,
2. *Ilja Martišovitš*, 3 G J. Hronce, Bratislava,
3. *Radomír Měch*, 4 G M. Koperníka, Bílovec,
4. *Stanislav Krajči*, 4 G Šmeralova, Košice,
5. *Andrej Doboš*, 3 G A. Markuša, Bratislava,
6. *Vladimír Komár*, 2 G Šmeralova, Košice,
7. *Ondrej Šuch*, 2 G A. Markuša, Bratislava.

Korespondenční seminář byl řízen tajemníkem ÚV MO *Karlem Horákem*, který se staral o výběr a přípravu úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici).