38. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Tomáš Hecht (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 38. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. 30. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 56–69.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404877

Kategorie B

Texty úloh

B - I - 1

Dokažte, že v lichoběžníku $ABCD$ neexistuje bod X, pro který by měly trojúhelníky ABX, BCX, CDX, DAX stejný obsah.

B - I - 2

Označme $S(n)$ ciferný součet přirozeného čísla n. Dokažte, že rovnice $S(x + p) = S(x)$ má alespoň jedno řešení, právě když je p dělitelné devíti.

B - I - 3

Z šachovnice $n \times n$, kde n není dělitelné třemi, odstřihneme jedno rohové pole. Dokažte, že zbytek je možné pokrýt deskami tvaru L složenými ze tří čtverců shodných s polem šachovnice tak, že se desky nepřekrývají.

B - I - 4

Najděte nejmenší liché prvočíslo n, které dělí součet

$$2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n.2^n.$$

B - I - 5

V trojúhelníku ABC označme C_0 střed strany AB a C_1, C_2 průsečíky přímky AB s osami úhlů přímek AC, BC. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky úseček CC_0, CC_1, CC_2.

B - I - 6

Nechť t je přirozené číslo a $n = (3^t - 1)|2$. Dokažte, že množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ lze rozdělit na t disjunktních podmnožin $A_1, A_2, \ldots, A_t$ tak, že žádná množina A_i neobsahuje čísla x, y, z s vlastností $x + y = z$.

B - S - 1

Je dáno přirozené číslo n. Určete počet permutací $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$, pro které je součin

$$(a_1 - 1) . (a_2 - 2) . \ldots . (a_n - n)$$

číslo liché.

B - S - 2

Opravte pravou stranu jedné a jen jedné z rovnic $x + y = 41$, $y + z = 13$, $z + x = 16$, $2x + y + z = 55$, $x + 2y + z = 52$ tak, aby opravená soustava rovnic měla řešení v oboru reálných čísel. Napište opravenou rovnici a řešení výsledné soustavy.

B - S - 3

Pro každé přirozené číslo n nechť je $f(n)$ jednociferné číslo, které vznikne z čísla n konečným počtem opakování operace tvoření ciferného součtu (např. $f(78569) = f(35) = 8$). Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je $f(n) = f(3n)$ a $0 < n < 1\,000$.

B - II - 1

Je dáno přirozené číslo n. Najděte celé číslo P tak, aby existovalo právě n navzájem neshodných obdélníků s celočíselnými délkami stran, které mají obsah P.

B - II - 2

Devět judistů se rozhodlo uspořádat vylučovací turnaj následujícím způsobem: V každém kole se z dosud neporažených judistů určí losem dvojice zápasníků, která se utká. Vítěz posledního (osmého) zápasu se stává vítězem turnaje. Zjistěte počet všech možných průběhů takovéto soutěže.

B - II - 3

Určete přirozené číslo, které v číselné soustavě při základu n má zápis $xyz0_n$ a v soustavě při základu $2n$ zápis $yz5_{2n}$. (Zápis $abcd_n$ značí číslo $an^3 + bn^2 + cn + d$, kde $0 \leqq a, b, c, d < n$.)

B - II - 4

Zjistěte, kolik celočíselných řešení má rovnice

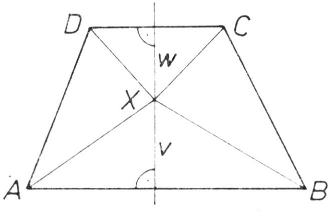
$$\left[\sqrt[1989]{n}\right]+\left[\sqrt[1989]{\frac{n+1}{2}}\right]+\ldots+\left[\sqrt[1989]{\frac{n+1988}{1989}}\right]=$$
$$=1990.$$

($[x]$ značí celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než číslo x.)

Řešení úloh

B - I - 1

Předpokládejme, že v lichoběžníku $ABCD$ existuje bod X tak, že jsou si rovny obsahy trojúhelníků ABX, BCX, CDX a DAX (obr. 9). Označme S obsah lichoběžníku a v, w vzdálenosti bodu X od přímek AB, CD. Z trojúhelníku ABX plyne $\frac{|AB|\,.\,v}{2}=\frac{S}{4}$, takže $v=\frac{S}{2\,.\,|AB|}$, podobně dostaneme $w=\frac{S}{2\,.\,|CD|}$. Jelikož výška lichoběžníku je $v+w$, je $S=\frac{|AB|+|CD|}{2}\,.\,(v+w)=\frac{S}{4}\cdot\frac{(|AB|+|CD|)^2}{|AB|\,.\,|CD|}$, odkud plyne $(|AB|-|CD|)^2=0$, tedy $|AB|=|CD|$. To je však ve sporu s tím, že $ABCD$ je lichoběžník.



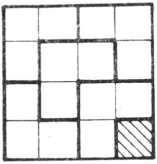
Obr. 9

B - I - 2

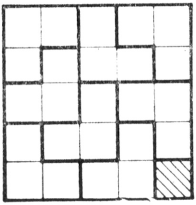
Velmi pěkné řešení této úlohy, které zde uvádíme, podal žák 2. ročníku gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše *Tomáš Tütz*. Předpokládejme nejdříve, že pro přirozené číslo p existuje přirozené číslo x tak, že $S(x + p) = S(x)$. Jelikož čísla n a $S(n)$ dávají stejný zbytek při dělení devíti (platí pro každé přirozené číslo n), dávají stejný zbytek při dělení devíti i čísla $x + p$ a x, je tedy jejich rozdíl p dělitelný devíti. Nechť je obráceně číslo p dělitelné devíti, tj. $p = 9k$, k přirozené číslo. Pak je číslo k řešením rovnice $S(x + p) = S(x)$, neboť čísla k a $k + p = 10k$ mají stejný ciferný součet.

B - I - 3

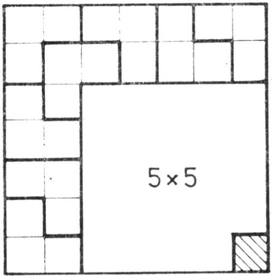
Pro $n = 1$ je úloha triviální, není vlastně co pokrýt. Úloha je též lehce řešitelná pro $n = 2$ a $n = 4$ (obr. 10). Při $n = 5$ musíme chvíli zkoušet, než najdeme nějaké řešení, třeba to, jež je znázorněno na obr. 11. V případě $n = 7$ oddělíme od čtverce 7×7 čtverec 5×5 (obr. 12), od něho odstřihneme jedno rohové pole. Ten pak dovedeme deskami tvaru L



Obr. 10



Obr. 11

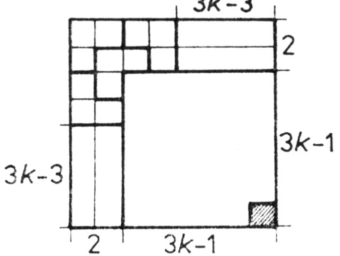


Obr. 12

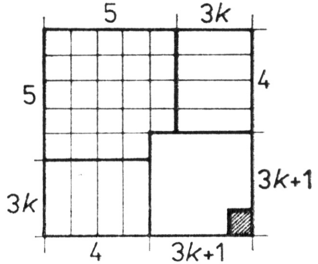
pokrýt, zbytek pokryjeme tak, jak je vidět na obr. 12. Zároveň vidíme, že obdélník 2×3 můžeme pokrýt právě dvěma deskami tvaru L. Z toho však ihned plyne, že můžeme požadovaným způsobem pokrýt každý obdélník o rozměrech $2k$, $3l$, kde k, l jsou přirozená čísla, zvláště tedy čtverec o straně $6m$, m přirozené číslo. Každý takový obdélník se totiž skládá z kl nepřekrývajících se obdélníků o rozměrech 2 a 3. Každé přirozené číslo n větší než 7, jež není dělitelné třemi, se dá právě jedním způsobem napsat ve tvaru $6m + 2$, $6m + 4$, $6m + 5$ nebo $6m + 7$, kde m je přirozené číslo. Čtverec o straně n, z něhož vynecháme jedno rohové pole, se pak skládá z čtverce o straně $6m$, dvou obdélníků, jejichž jedna strana je $6m$ a druhá 2, 4, 5 nebo 7, a čtverce o straně 2, 4, 5 nebo 7, od něhož je odstřiženo jedno rohové pole. Každý z těchto útvarů dovedeme požadovaným způsobem pokrýt. Stačí si uvědomit, že obdélník 6×5 můžeme rozdělit na obdélníky 6×2 a 6×3, podobně obdélník 6×7.

Jiný důkaz: Pro $n = 1$, $n = 2$ a $n = 5$ tvrzení úlohy platí, viz předcházející postup. Nyní dokážeme, že když je tvrzení úlohy pravdivé pro číslo $n = 3k - 1$, je pravdivé též pro

$n = 3k + 1$. Čtverec o straně $3k + 1$ dostaneme totiž z čtverce o straně $3k - 1$ přidáním dvou obdélníků o stranách 2, $3k - 3$ a obrazce složeného ze tří čtverců o straně 2 (obr. 13). Tento obrazec pokryjeme tak, jak je vidět na obr. 13, obdélník $2 \times 3(k - 1)$ dovedeme také pokrýt. Dále dokážeme, že z platnosti tvrzení úlohy pro $n = 3k + 1$ plyne i platnost pro $n = 3k + 5$. Čtverec o straně $3k + 5$ dostaneme z čtverce o straně $3k + 1$ přidáním dvou obdélníků o stranách 4 a $3k$ a čtverce o straně 5, z něhož je vynecháno jedno rohové pole (obr. 14). Opět vidíme, že každou z těchto částí lze požadovaným způsobem pokrýt. Přičteme-li k číslu 2 střídavě číslo 2 a 4, dostaneme všechna sudá přirozená čísla, která nejsou dělitelná třemi. Pro všechna tato čísla tvrzení úlohy na základě předcházejících úvah platí. Přičteme-li k číslu 5 střídavě číslo 2 a 4, dostaneme všechna lichá přirozená čísla, jež nejsou dělitelná třemi. Tvrzení úlohy platí tedy i pro tato čísla.



Obr. 13



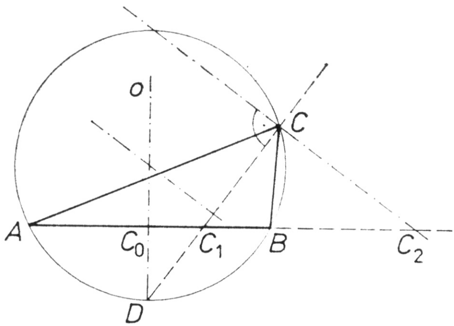
Obr. 14

B - I - 4

Je $2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n.2^n = 2(2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) + (2^3 + \ldots + 2^n) + (2^4 + \ldots + 2^n) + \ldots + (2^{n-1} + 2^n) + (2^n) = 2^{n+1}(n - 1)$. Stačí několikrát použít vzorec pro součet prvních členů geometrické posloupnosti. Je-li n liché prvočíslo, pak nemůže dělit číslo 2^{n+1}. Žádné přirozené číslo n nedělí číslo $n - 1$. Neexistuje tedy žádné liché prvočíslo, které by dělilo daný součet. A že se tento součet rovná $(n - 1) . 2^{n+1}$, to se dá dokázat též matematickou indukcí.

B - I - 5

Předpokládejme, že jsme trojúhelník ABC již sestrojili. Označme k kružnici mu opsanou, C_0 střed strany AB, C_1 a C_2 průsečíky os přímek AC, BC s přímkou AB (obr. 15). Ozna-



Obr. 15

čení bodů C_1, C_2 zvolíme tak, aby bod C_1 ležel blíž k bodu C_0 než bod C_2. Bod C_1 pak leží na úsečce AB a přímka CC_1 protíná kružnici k v bodě D, který leží na ose úsečky AB. To vyplývá z věty o obvodových úhlech. Provedený rozbor nám již ukazuje postup konstrukce. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník C_1CC_2 (délky jeho odvěsen jsou dány) a na přímce C_1C_2 sestrojíme bod C_0 tak, aby úsečka CC_0 měla danou délku. Průsečík přímky CC_1 s přímkou o procházející bodem C_0 a kolmou k přímce C_1C_2 označíme D. Přitom musíme označení bodů C_1, C_2 zvolit tak, aby byl bod C_1 blíže k bodu C_0 než bod C_2. Kružnice k se středem na přímce o a procházející body C, D protíná přímku C_1C_2 v bodech A, B. Úloha má tolik řešení, kolik existuje na přímce C_1C_2 bodů C_0 s danou vzdáleností $|CC_0|$ od bodu C, které leží mimo úsečku C_1C_2. Je-li však trojúhelník C_1CC_2 rovnoramenný a existují-li řešení úlohy, jsou to dvě řešení souměrně sdružená podle osy úsečky C_1C_2, takže jde vlastně jen o jedno řešení.

B - I - 6

Pro malá čísla t můžeme taková rozdělení ihned napsat, např. $t = 1 : \{1\}$

$t = 2$: $\{2, 3\}$, $\{1, 4\}$

$t = 3$: $\{1, 4, 10, 13\}$, $\{2, 3, 11, 12\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Pro $t = 3$ bychom mohli vzít též rozklad $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$ a $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. V každé množině tohoto rozkladu jsou čísla jdoucí za sebou. Tento postup však už selže při $t = 4$. Hledáním rozkladu při $t = 4$ dojdeme k závěru, že důležitou roli při zařazení čísla do množiny rozkladu hraje jeho zbytek při dělení třemi, devíti nebo další mocninou tří.

Například v množině A_1 všech čísel, jež při dělení třemi dávají zbytek 1, určitě nejsou tři čísla x, y, z s vlastností $x + y = z$. Číslo $x + y$ dává totiž při dělení třemi zbytek 2. Podobně je tomu u množiny A_2 všech čísel, která dávají při dělení číslem $3^2 = 9$ zbytek 2 nebo 3. Množina A_3 nechť je tvořena všemi čísly, jež při dělení číslem $3^3 = 27$ dávají zbytek 5, 6, 7, 8 nebo 9. Takto pokračujeme, množina A_r nechť obsahuje všechna přirozená čísla, jež při dělení číslem 3^r dávají zbytek větší než $\frac{3^{r-1} - 1}{2}$, nejvýše však 3^{r-1}. Součet žádných dvou čísel množiny A_r nepatří do A_r, protože při dělení tohoto součtu číslem 3^r je zbytek větší než 3^{r-1}. Označme ještě B_r, resp. C_r množinu všech čísel, jež při dělení číslem 3^r dávají zbytek 1 až 3^{r-1}, resp. 1 až $\frac{3^{r-1} - 1}{2}$. Je pak $B_r = A_r \cup C_r$, $A_r \cap C_r = \emptyset$. Ukážeme ještě, že C_r je částí sjednocení množin $B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}$ pro každé $r \geqq 2$. Je-li $n \in C_r$, je $n = m.3^r + k$, $k \leqq 3^{r-2} + 3^{r-3} + \ldots$ $\ldots + 3 + 1$. Je tedy $k = 3^{r-2} + 3^{r-3} + \ldots + 3^{s-1}$ pro některé s, $1 \leqq s \leqq r - 1$, nebo je $k = 3^{r-2} + \ldots + 3^s +$ $+ 0.3^{s-1} + a.3^{s-2} + \ldots + b.3 + c$, kde $a, \ldots, b, c$ jsou z množiny $\{0, 1, 2\}$ a číslo $z = a.3^{s-2} + \ldots + b.3 + c$ je nenulové. V prvním případě je $n \in A_s$, neboť při dělení číslem 3^s dává zbytek 3^{s-1}. V druhém případě se zbytek čísla n při dělení číslem 3^s rovná z, $1 \leqq z \leqq 3^{s-1}$, takže $n \in B_s$. Nepatří-li do A_s, patří do C_s a můžeme celý proces opakovat. Vzhledem k tomu, že $C_1 = \emptyset$, patří každý prvek množiny C_r do některé z množin $A_1, \ldots, A_{r-1}$, což jsme chtěli dokázat. Zvláště je tedy $C_{t+1} \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t$. Poznamenejme ještě, že zavedené množiny $A_1, A_2, \dots$ nejsou disjunktní, například $7 \in A_1 \cap A_3$. Můžeme se však dohodnout, že do množiny A_r již nedáme ta čísla, která jsou obsažena v některé z množin $A_1, \dots, A_{r-1}$, $r = 2, 3, \dots$. Pak budou množiny A_i disjunktní. Množina $M = \left\{1, 2, \dots, \frac{3^t - 1}{2}\right\}$ je částí množiny C_{t+1}. Tím je vlastně celé tvrzení úlohy dokázáno. Stačí vzít za množinu A_i průnik výše zavedené množiny A_i s množinou M, $i = 1, 2, \dots, t$.

Jiný postup využívá matematickou indukci. Pro $t = 1$ tvrzení úlohy platí, nechť $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ je požadovaný rozklad množiny $\{1, 2, \dots, m\}$, $m = \frac{3^k - 1}{2}$. Definujme rozklad množiny $\left\{1, 2, \dots, \frac{3^{k+1} - 1}{2}\right\} = \{1, 2, \dots, 3m + 1\}$ takto:
$A'_i = A_i \cup \{j + 2m + 1 \mid j \in A_i\}$ pro $i = 1, 2, \dots, k$, $A'_{k+1} = \{m + 1, m + 2, \dots, 2m + 1\}$. O těchto množinách pak dokážeme, že tvoří požadovaný rozklad v případě $t = k + 1$. Přitom je množina A'_i sjednocením množiny A_i a množiny, kterou dostaneme z množiny A_i »posunutím«.

Byla to úloha obtížná. Vyžadovala od těch žáků, kteří ji chtěli řešit samostatně, hodně trpělivosti při hledání rozkladu pro malá t, aby se tak dopracovali k obecnému řešení. Ukázala jim však, jak se i v matematice uplatní induktivní postup, jak se odhadne obecné řešení, známe-li některá dílčí řešení.

B - S - 1

Daný součin je číslo liché právě tehdy, když pro liché k je číslo a_k sudé a obráceně. To je možné pouze při sudém n, kdy je mezi čísly 1, 2, ..., n stejný počet lichých čísel jako sudých. Čísla $a_2, a_4, \ldots, a_n$ pak musí být lichá, to dává $(n/2)!$ možností. Je to počet permutací čísel $1, 3, \ldots, n-1$. Čísla $a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}$ jsou sudá, jde opět o $(n/2)!$ permutací čísel $2, 4, \ldots, n$. Celkem dostáváme $((n/2)!)^2$ permutací požadované vlastnosti při sudém n. Při lichém n je výsledek 0.

B - S - 2

Součet prvních dvou rovnic je ve sporu s pátou rovnicí, jednu z těchto tří rovnic je tedy třeba opravit. Součet první a třetí rovnice je ve sporu s čtvrtou, opět je třeba opravit jednu z těchto tří. Jelikož máme opravit jen jednu, musí to být rovnice první. Soustava zbývajících rovnic má řešení $x = 21$, $y = 18$, $z = -5$. První rovnici je třeba opravit na rovnici $x + y = 39$.

B - S - 3

Číslo $f(n)$ je zbytek při dělení čísla n číslem 9. Pokud bychom však nulu nepovažovali za jednociferné číslo, bylo by $f(n) = 9$ pro všechna čísla n dělitelná devíti, další postup by byl stejný. Je-li $f(n) = f(3n)$, dávají čísla n a $3n$ stejný zbytek při dělení devíti, takže $3n - n = 2n$ je násobek devíti, takže i číslo n je násobek devíti. Je-li obráceně číslo n násobkem devíti, je i číslo $3n$ násobek devíti, a tudíž $f(n) = f(3n) = 0$. Hledaná čísla jsou všechny násobky devíti, které jsou menší než 1000.

B - II - 1

Rovnice $P = xy$ má mít právě n různých řešení (x, y) s vlastností $x \leqq y$. Číslo P musí tedy mít právě $2n$ různých dělitelů nebo $2n - 1$ různých dělitelů, bude-li jedno řešení mít vlastnost $x = y$. V tomto případě je P druhou mocninou přirozeného čísla x. Poznamenejme, že dělitelem rozumíme v této úloze vždy jen číslo přirozené, ne celé číslo záporné. Podle výše uvedeného stačí volit například $P = p^{2n-1}$ nebo $P = p^{2n-2}$, kde p je prvočíslo, nebo $P = pq^{n-1}$, kde p, q jsou různá prvočísla.

B - II - 2

Nejdříve je třeba losem určit první dvojici zápasníků. To dává $\binom{9}{2}$ možností. Vzhledem k tomu, že může vyhrát první, nebo druhý, máme pro průběh prvního kola $2 . \binom{9}{2}$ možností. Dál postupujeme již podobně, abychom dostali celkový počet, musíme počty možností pro průběh jednotlivých kol mezi sebou násobit.

Výsledek je tedy $2 . \binom{9}{2} . 2 . \binom{8}{2} . 2 . \binom{7}{2} \ldots 2 . \binom{3}{2} . 2 . \binom{2}{2} =$
$= 9 . 8 . 8 . 7 . 7 . \ldots . 3 . 3 . 2 . 2 . 1 = 9 . (8!)^2$.

B - II - 3

Podle předpokladu má pro x, y, z, n platit

$$xn^3 + yn^2 + zn = y.(2n)^2 + z.2n + 5, \text{ tedy}$$
$$n(xn^2 - 3yn - z) = 5.$$

Protože $n \neq 1$ (číslo 1 nemůže být základem číselné soustavy), je nutně $n = 5$, a tedy $25x - 15y - z = 1$. Proto je číslo $z + 1$ dělitelné pěti, takže $z = 4$ (v číselné soustavě se základem 5 jsou všechny číslice nejvýše rovny 4). Pro x, y pak máme vztah $5x - 3y = 1$. Z celých nezáporných čísel menších než 5 vyhovuje pouze $x = 2$, $y = 3$. Úloha má jediné řešení, je to číslo 345 (v desítkové soustavě), v pětkové soustavě 2 340.

B - II - 4

Číslo 0 nevyhovuje, rovněž $n = 1$ nevyhovuje, neboť by se pak každý z 1 989 sčítanců na levé straně rovnice rovnal jedné, jejich součet by nedal 1 990. Pro $n > 1$ je

$$n > \frac{n+1}{2} > \dots > \frac{n+1988}{1989} > 1.$$

Sčítanci na levé straně tedy tvoří nerostoucí posloupnost, každý z nich se rovná aspoň jedné. Jelikož se jejich součet má rovnat 1 990, musí se první rovnat dvěma, všechny ostatní se musí rovnat jedné. Je tedy nutné a stačí, aby pro n platilo $3 > \sqrt[1989]{n} \geqq 2$ a $\sqrt[1989]{\frac{n+1}{2}} < 2$, takže $2^{1989} \leqq n < 2^{1990} - 1$. To je celkem $2^{1989} - 1$ možností pro n, tedy tolik řešení má daná rovnice.