38. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z7

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 38. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 65–81.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404891

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 68 až 77)

Z7 - I - 1

Každý z vnitřních úhlů $\alpha = 64°$, $\beta = 96°$ trojúhelníku ABC je rozdělen polopřímkami s počátky ve vrcholu A nebo B na 160 shodných úhlů. Nechť O je průsečík dvou takových polopřímek s různými počátky. Kolik existuje takových bodů O, pro které je velikost úhlů AOB rovna 22°? Kolik z nich je takových, že velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku AOB (vyjádřené ve stupních) jsou přirozená čísla?

Z7 - I - 2

Dědeček si vyšel na procházku se svými třemi vnuky. Dědečkův známý se jich zeptal, kolik jim je let.

Pavel: »Jsem mladší než Jakub a je mi více než 4 roky.«

Jakub se přidal: »Jsem o tři roky mladší než Matěj.«

Matěj dodal: »Nám třem je dohromady třikrát méně než dědečkovi, ale s dědečkem je nám dohromady 100 let.«

Kolik je jim let? (Stáří všech je vyjádřeno celými čísly.)

Z7 - I - 3

V rovině jsou dány dvě navzájem kolmé přímky p, q. Zvolte v této rovině 11 bodů tak, aby rovnoběžky s přímkami p, q vedené těmito body rozdělily spolu s přímkami p, q rovinu na a) 26 částí, b) 40 částí, c) 68 částí.

Z7 - I - 4

Jsou dány body A, B. Sestrojte pravidelný šestiúhelník, který má v bodech A, B středy dvou úhlopříček. Vyšetřete všechny možnosti.

Z7 - I - 5

Oplocená obdélníková zahrada s rozměry a metrů a b metrů se má rozdělit na tři stejně velké obdélníkové zahrádky tak, aby bylo třeba postavit co nejméně nového plotu.

Úlohu napřed řešte pro různé konkrétně zvolené hodnoty a, b. Zjistěte a popište, jak je třeba postavit nový plot pro libovolné hodnoty rozměrů a, b. Které případy musíte rozlišit?

Z7 - I - 6

Škola má 800 žáků, z toho 450 chlapců. Z chlapců je 200 modrookých, 250 světlovlasých, 50 chlapců nemá žádnou z těchto vlastností.

Co je větší: Procento modrookých chlapců mezi světlovlasými, nebo procento modrookých chlapců mezi všemi žáky?

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení na str. 78 až 81)

Z7 - II - 1

Jsou dány body X, Y; $|XY| = 3$ cm. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, pro který je bod X středem strany AB, bod Y středem úhlopříčky AE. Porovnejte délku strany AB s délkou úsečky XY.

Z7 - II - 2

V rovině bylo zvoleno několik bodů. Jedním z nich byly sestrojeny dvě navzájem kolmé přímky, ostatními body byly vedeny s těmito kolmicemi rovnoběžky. Přímky, které takto vznikly, rozdělily rovinu na 130 částí, z nich je 88 pravoúhelníků. Jaký nejmenší počet bodů mohl být zvolen? Načrtněte jedno takové řešení.

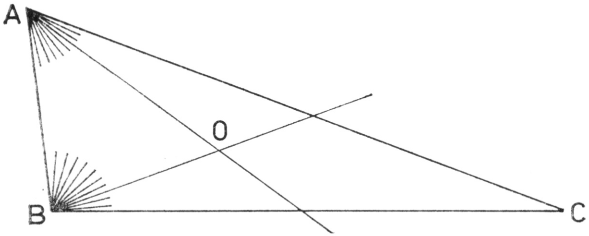
Z7 - II - 3

Sčítáme dvě dvojciferná čísla, která se liší jen pořadím číslic. Dostaneme číslo, které je součinem dvou stejných přirozených čísel. Najděte všechny tyto dvojice.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z7 - I - 1 (str. 65)

Situace je na obrázku 23.



Obr. 23

Úhly BAO a ABO jsou po řadě

násobky úhlů $\dfrac{\alpha}{160}$ a $\dfrac{\beta}{160}$.

$$(1) \qquad |\sphericalangle BAO| = m \cdot \frac{64^\circ}{160}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, 159$$

$$(2) \qquad |\sphericalangle ABO| = n \cdot \frac{96^\circ}{160}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 159$$

Úhel AOB má velikost 22°. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ABO je roven 180°. Proto

$$m \cdot \frac{64}{160} + n \cdot \frac{96}{160} + 22 = 180.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$2m + 3n = 790$$
$$m = 395 - 1{,}5n.$$

Hledáme přirozená čísla m, n od 1 do 159, která vyhovují této rovnici. Přitom n musí být sudé číslo.

$$1 \leqq m \leqq 159$$
$$1 \leqq 395 - 1{,}5n \leqq 159.$$

Řešením této nerovnice dostaneme

$$157\frac{1}{3} \leqq n \leqq 262\frac{2}{3}.$$

Protože n musí být nejvýše 159 a navíc sudé číslo, dostáváme pro n jediné řešení:

$$n = 158, \quad m = 158$$

Odtud vypočteme

$$|\sphericalangle BAO| = 63{,}2°, \qquad |\sphericalangle ABO| = 94{,}8°.$$

Existuje tedy jediný bod O, pro který je velikost úhlu AOB rovna 22°. Přitom velikosti zbývajících vnitřních úhlů trojúhelníku AOB jsou desetinná, ale nikoli přirozená čísla.

Poznámka. Kdybychom připustili v rovnostech (1) a (2) i hodnoty $m = n = 160$, měla by úloha ještě jedno řešení:

$$n = 155, \qquad m = 160,$$

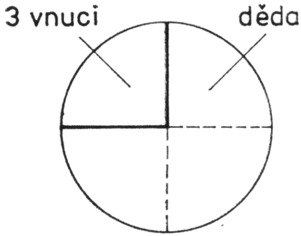
a tedy

$$|\sphericalangle BAO| = 62°, \qquad |\sphericalangle ABO| = 96° .$$

V tomto případě má trojúhelník AOB velikosti všech vnitřních úhlů vyjádřeny přirozenými čísly. Vysvětlete sami, proč toto řešení neodpovídá podmínkám úlohy.

Řešení úlohy Z7 - I - 2 (str. 65)

Děda je třikrát starší než všichni tři vnuci dohromady (obr. 24). Protože všem čtyřem je celkem 100 let, musí být dědovi 75 let a vnukům dohromady 25 let.



Obr. 24

Označíme vnuky počátečními písmeny. Platí tedy

$$(3) \qquad 4 < P < J \qquad J + 3 = M \qquad P + J + M = 25.$$

Dosadíme $M = J + 3$ do poslední rovnice; dostaneme

$$\begin{aligned} P + 2J + 3 &= 25 \\ P + 2J \quad &= 22. \end{aligned}$$

Odtud je vidět, že P je sudé číslo. Protože je $P > 4$, je $P = 6$ nebo 8 nebo 10 atd. Pro $P = 6$ dostaneme $J = 8$, $M = 11$. Pro $P = 8$ dostaneme $J = 7$, ale to není možné, neboť $P < J$. Proto P nemůže být ani větší než 8.

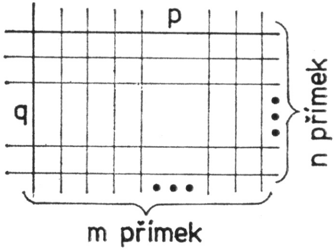
Dostáváme jediný výsledek: Pavlovi je 6 let, Jakubovi 8 let, Matějovi 11 let a dědečkovi 75 let. Zkoušku udělejte sami.

Poznámka. Druhou část řešení je možné najít bez nerovností a rovnic (3) pouhým vyexperimentováním.

Řešení úlohy Z7 - I - 3 (str. 66)

Provedeme rozbor úlohy pomocí obrázku 25. Jestliže je dáno n vodorovných přímek a m svislých přímek, pak tyto přímky rozdělí rovinu na $(m + 1)(n + 1)$ částí. Z nich obdélníků nebo čtverců je $(m - 1)(n - 1)$; ostatní části jsou nekonečné útvary.

Nyní budeme řešit tři zadané případy. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že $m \geqq n$ (kdyby tomu tak nebylo, otočíme rovinu například o 90°).

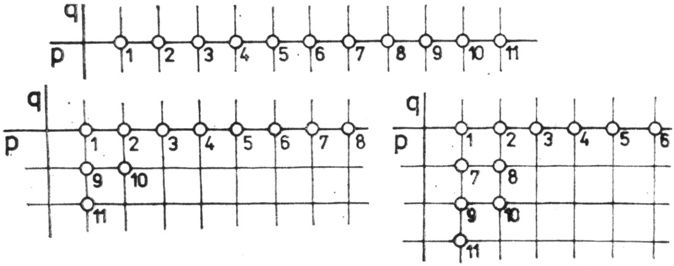


Obr. 25

a) Počet částí je 26. Tedy

$$(m + 1)(n + 1) = 26 = 13 . 2.$$

Jediná možnost je, že $m = 12$, $n = 1$. Na obrázku 26a je znázorněna příslušná síť přímek a jedna z možných voleb 11 bodů.



Obr. 26a, b, c

b) Počet částí je 40. Tedy

$$(m + 1)(n + 1) = 40 = 20 . 2 = 10 . 4 = 8 . 5.$$

Jsou tři možnosti pro sítě přímek:

$$\begin{array}{lll} m = 19 & m = 9 & m = 7 \\ n = 1 & n = 3 & n = 4 \end{array}$$

V 1. případě by muselo být aspoň 18 bodů, což není možné. Vyhovují zbylé dvě sítě. Možné rozmístění bodů je na obrázcích 26b, c.

c) Počet částí je 68. Tedy

$$(m + 1)(n + 1) = 68 = 34 . 2 = 17 . 4 .$$

Pro sítě přímek jsou dvě možnosti:

$$\begin{array}{ll} m = 33 & m = 16 \\ n = 1 & n = 3 \end{array}$$

V prvním případě by bylo třeba aspoň 32 a ve druhém aspoň 15 bodů. Proto pro případ c) (68 částí) nemá úloha řešení.

Řešení úlohy Z7 - I - 4 (str. 66)

Rozbor. Pravidelný šestiúhelník má dva typy úhlopříček. Delší, jejichž střed je zároveň středem šestiúhelníku, a kratší, jejichž střed půlí úsečka spojující střed šestiúhelníku s některým vrcholem.

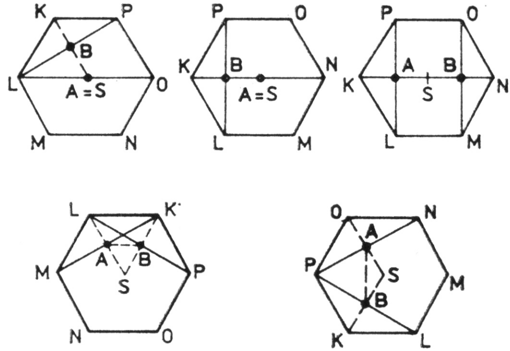
Body A, B leží buď na jedné delší a jedné kratší úhlopříčce (obr. 27a, b), nebo na dvou kratších úhlopříčkách (obr. 27c, d, e). Klíčem k řešení je sestrojení středu S šestiúhelníku. Jsou čtyři možnosti:

(a) střed S je některý z bodů A, B (obr. 27a, b)

(b) střed S je středem úsečky AB (obr. 27c)

(c) střed S je vrcholem rovnostranného trojúhelníku ABS (obr. 27d)

(d) střed S je vrcholem rovnoramenného trojúhelníku ABS, který má při základně AB úhly velikosti 30° (obr. 27e).



Obr. 27a, b, c, d, e

Konstrukce

Sestrojíme střed S šestiúhelníku. Je 5 možností: $S = A$, $S = B$, S je středem úsečky AB, S je třetím vrcholem rovnostranného trojúhelníku se stranou AB, S je třetím vrcholem rovnoramenného trojúhelníku se základnou AB a s úhly při základně velikosti 30° (konstrukce *usu*).

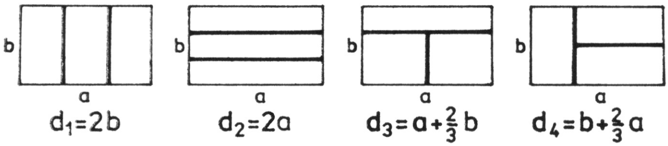
Dále sestrojíme vrchol šestiúhelníku. Sestrojíme ho jako krajní bod úsečky, která má druhý krajní bod v bodě S a střed v bodě A nebo v bodě B.

Další konstrukce je zřejmá, neboť známe střed šestiúhelníku a jeden jeho vrchol.

Úloha má 7 různých řešení. Po jednom řešení dostaneme v případech, kdy střed S je v bodě A nebo v bodě B nebo ve středu úsečky AB. Po dvou řešeních dostaneme v případech, kdy střed S je vrcholem rovnostranného nebo rovnoramenného trojúhelníku. Tyto dvojice řešení jsou souměrně sdružené podle přímky AB.

Řešení úlohy Z7 - I - 5 (str. 66)

Rozlišíme 4 možná rozdělení znázorněná na obrázcích 28a, b, c, d, kde jsou uvedeny i délky d_1, d_2, d_3, d_4 nových plotů. Předpokládejme $a \geqq b$.



Obr. 28a, b, c, d

Potom je $d_1 \leqq d_2$ (rovnost jen pro $a = b$). Dále

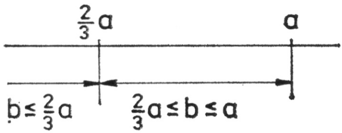
$$d_1 \leqq d_4, \text{ právě když } b \leqq \frac{2}{3}a$$

$$d_4 \leqq d_3, \text{ právě když } b \leqq a.$$

Dostáváme výsledek (obr. 29):

$b \leqq \frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a \leqq b \leqq a$
$d_1 \leqq d_4 \leqq d_3$ $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$	$d_4 \leqq d_1 \leqq d_2$ $d_4 \leqq d_3 \leqq d_2$

Pro $b \leqq \dfrac{2}{3}a$ je nejkratší délka d_1 a pro $\dfrac{2}{3}a \leqq b \leqq a$ je nejkratší délka d_4.



Obr. 29

Řešení úlohy Z7 - I - 6 (str. 66)

Známé počty chlapců zapíšeme do tabulky 2.

CHLAPCI

	Vlasy světlé	Vlasy jiné	Celkem
Modré oči			200
Jiné oči		50	
Celkem	250		450

Tab. 2

Nyní doplníme chybějící údaje; výsledek ukazuje tabulka 3.

CHLAPCI

	Vlasy světlé	Vlasy jiné	Celkem
Modré oči	50	150	200
Jiné oči	200	50	250
Celkem	250	200	450

Tab. 3

Z tabulky 3 je vidět, že mezi 250 světlovlasými chlapci je 50 modrookých, tj. 20 %. Mezi 800 žáky je 200 modrookých chlapců, tj. 25 %. V druhém případě je procento větší.

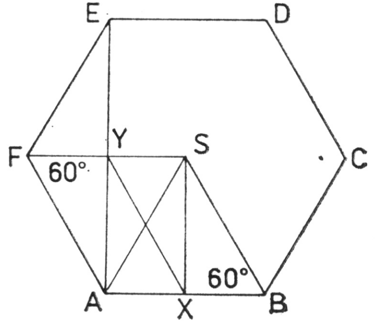
ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z7 - II - 1 (str. 67)

Rozbor (obr. 30). Čtyřúhelník $ABSF$ je kosočtverec. Úsečka XY jeho střední příčka, proto je

$$|AB| = |BS| = |XY| = 3 \text{ cm}.$$

Trojúhelník XYS je pravoúhlý (pravý úhel je při vrcholu S). Úhly při vrcholech X, Y mají po řadě velikosti $30°$ a $60°$ (v rovnoběžníku $XBSY$ jsou úhly při vrcholech B, Y shodné).



Obr. 30

Konstrukce (obr. 30)

1. X, Y
2. $\triangle\ XYS$; (*usu*), $|\sphericalangle XYS| = 60°$, $|\sphericalangle YXS| = 30°$; 2 trojúhelníky souměrně sdružené podle přímky XY
3. F; Y střed FS
4. $ABCDEF$; pravidelný šestiúhelník se středem S a jedním vrcholem F

Úloha má dvě řešení souměrně sdružená podle přímky XY.

Řešení úlohy Z7 - II - 2 (str. 67)

Rozbor. Jestliže síť přímek tvoří m svislých a n vodorovných přímek (obr. 25 na str. 72), rozdělí tyto přímky rovinu na $(m + 1)(n + 1)$ částí, z nichž je $(m - 1)(n - 1)$ pravoúhelníků (obdélníků nebo čtverců).
Tedy

$$(m + 1)(n + 1) = 130$$
$$(m - 1)(n - 1) = 88.$$

Rozložíme číslo 130 na součin dvou přirozených čísel. Vzhledem k druhé rovnici musí být oba činitelé aspoň 3. Můžeme předpokládat, že $m \geqq n$.

$$130 = 13 . 10 = 26 . 5$$

Jsou dvě možnosti:

$m + 1 = 13 \quad n + 1 = 10;$ $\qquad m + 1 = 26 \quad n + 1 = 5$

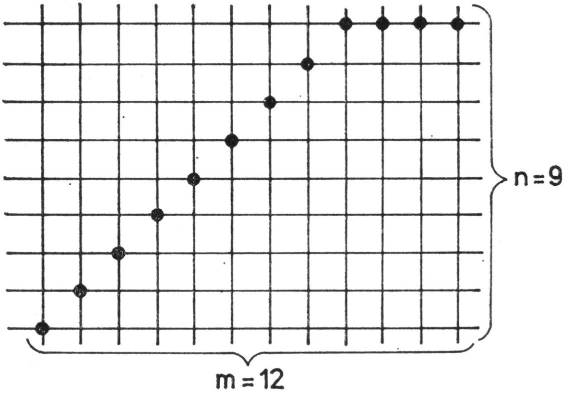
Odtud:

$m - 1 = 11 \quad n - 1 = 8;$ $\qquad m - 1 = 24 \quad n - 1 = 3$

Vyhovuje jen 1. možnost

$$(m-1)(n-1)=11\,.\,8=88.$$

Na obrázku 31 je vidět, že musíme zvolit nejméně 12 bodů. (Méně nemůžeme, protože je 12 svislých přímek.)



Obr. 31

Poznámka. Úlohu lze řešit také rozkladem čísla 88. Nevýhodou je nutnost prozkoumat více možností. Úlohu můžeme řešit také tak, že určíme počet nekonečných částí:

$$2m+2n=130-88$$

Odtud

$$m+n=21.$$

Další postup jistě najdete sami.

Řešení úlohy Z7 - II - 3 (str. 67)

Daná čísla zapíšeme ve tvaru

$$10x + y \qquad \text{a} \qquad 10y + x.$$

Sečtením dostaneme

$$(10x + y) + (10y + x) = 11(x + y).$$

Aby číslo $11(x + y)$ bylo součinem dvou stejných čísel, musí být $x + y = 11$ (nezapomeňte, že x, $y \leqq 9$). Proto úloze vyhovují 4 dvojice čísel:

29, 92   38, 83   47, 74   56, 65

Zkoušku udělejte sami.