38. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z6

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 38. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 82–101.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404892

Kategória Z6

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia na str. 86 až 97)

Z6 - I - 1

Kráľ prijal do služby pastiera na 1 rok. Sľúbil mu za službu 120 grošov a plášť. Pastier však v službe vydržal len 7 mesiacov. Spravodlivý kráľ mu vyplatil za službu 50 grošov a plášť. Akú cenu mal plášť?

Z6 - I - 2

Nech A, B, C, D, E, F sú vrcholy pravidelného šesťuholníka.

a) Koľko existuje trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch?

b) Keby sme tieto trojuholníky rozdelili do skupín tak, že v jednej skupine budú trojuholníky s rovnakým obsahom, koľko skupín by vzniklo?

Z6 - I - 3

Deti išli na školský výlet autobusom. Cesta späť im trvala 4-krát dlhšie ako cesta tam. Bolo to preto, že presne v $\frac{3}{4}$

spiatočnej cesty sa autobus pokazil a zvyšok cesty prešli deti pešo.

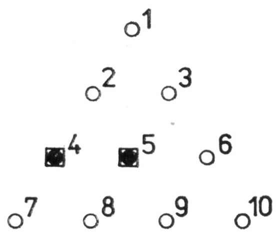
Koľkokrát bol autobus rýchlejší ako deti?

Z6 - I - 4

Koľko trojciferných čísel deliteľných deviatimi môžeme napísať pomocou cifier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? Cifry sa môžu opakovať.

Z6 - I - 5

Na obrázku 32 je 10 bodov. Body číslo 4 a 5 sú zafarbené na modro. Zistite, či je možné zafarbiť zvyšných 8 bodov červenou a modrou farbou tak, aby žiadne tri body jednej farby neboli vrcholmi rovnostranného trojuholníka. Zafarbiť treba všetky body.



Obr. 32

Z6 - I - 6

Nájdite tri prirodzené čísla x, y, z, ktoré spĺňajú obidve nasledujúce podmienky:

a) Súčin $x.y.z = 1\,988$.*)

b) Súčet $x + y + z$ je prvočíslo, a to aj pri čítaní odzadu.

Nájdite všetky riešenia.

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenie na str. 98 až 101)

Z6 - II - 1

Koľko existuje trojciferných čísel, ktorých ciferný súčet sa rovná 8?

Z6 - II - 2

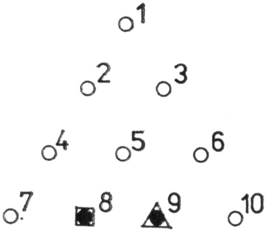
Kráľ prijal do služby pastiera. Za rok služby mu sľúbil 18 oviec a 4 kozy. Pastier však vydržal v službe iba 10 mesiacov. Spravodlivý kráľ mu dal 18 kôz a 4 ovce. Koľko grošov stojí koza, ak vieme, že ovca stojí 12 grošov?

---

*) Úloha bola zadaná roku 1988.

Z6 - II - 3

Na obrázku 33 je schéma s 10 bodmi. Bod s číslom 8 je vyfarbený modrou, bod s číslom 9 červenou farbou. Zistite, či je možné vyfarbiť ostatných 8 bodov červenou a modrou farbou tak, aby žiadne tri body tej istej farby neboli vrcholmi rovnostranného trojuholníka. (Vyfarbiť sa majú všetky body.)



Obr. 33

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z6 - I - 1 (str. 82)

I. *spôsob - úvahou.* Kráľ sľúbil pastierovi dať za rok služby 120 grošov a plášť. Teda za 7 mesiacov mal pastier dostať $\frac{7}{12}$ plášťa a $\frac{7}{12}$ zo 120 (= 70) grošov. Avšak dostal celý plášť a 50 grošov. Teda dostal o $\frac{5}{12}$ plášťa viac a o 20 grošov menej. Ak bol kráľ spravodlivý, tak $\frac{5}{12}$ plášťa muselo stáť práve 20 grošov.

Keď $\frac{5}{12}$ plášťa stojí 20 grošov, $\frac{1}{12}$ musí stáť 4 groše a celý plášť $\left(\text{to je } \frac{12}{12}\right)$ musí stáť $12 . 4 = 48$ grošov.

II. *spôsob - rovnicou.* Označme cenu plášťa p grošov.

Za rok mal pastier dostať.......... $120 + p$

Teda za 7 mesiacov mal dostať .... $\frac{7}{12}(120 + p)$

Ale za 7 mesiacov dostal .... $50 + p$

Z toho

$$\frac{7}{12}(120 + p) = 50 + p \qquad | \,.12$$

$$840 + 7p = 600 + 12p$$

$$240 = 5p$$

$$p = 48$$

Skúška

Za rok mal dostať .... $48 + 120 = 168$ grošov.

Teda za 7 mesiacov mal dostať .. $\frac{7}{12}$ zo $168 = 98$ grošov.

Pastier dostal .... $48 + 50 = 98$ grošov.

Odpoveď

Plášť stál 48 grošov.

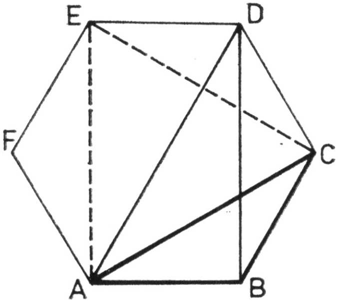
Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 1

1. Dvaja robotníci dostali za dokončenú prácu spolu 2 010 Kčs. Prvý robotník na nej odpracoval 21 dní a druhý len 15 dní. Denná mzda prvého robotníka je o 10 Kčs vyššia ako denná mzda druhého. Aká je denná mzda každého z nich? (60 Kčs, 50 Kčs.)

2. Za päť kožených a tri koženkové aktovky zaplatili spolu 1 800 Kčs. Koľko stála kožená aktovka, ak viete, že cena koženkovej je tretina ceny koženej aktovky? (300 Kčs, 100 Kčs.)

Riešenie úlohy Z6 - I - 2 (str. 82)

Nájdime najskôr, aké typy trojuholníkov sa vyskytujú. Na obrázku 34 sú vyznačené tri rôzne druhy trojuholníka s vrcholmi v bodoch A, B, C, D, E, F.



Obr. 34

I. typ sú trojuholníky, ktorých dve strany tvoria susedné strany šesťuholníka.

II. typ sú trojuholníky, ktorých jedna strana je strana šesťuholníka a druhá strana je najdlhšia uhlopriečka (priemer) šesťuholníka.

III. typ sú trojuholníky, ktorých strany sú kratšie uhlopriečky šesťuholníka (ich vrcholy sú »na preskáčku« po obvode šesťuholníka).

Hľadajme trojuholníky I. typu. Uvažujme stranu šesťuholníka a k nej priľahlú. Dávame pozor, aby sme niektorý trojuholník nezarátali viackrát a aby sme iný nezabudli. Toho sa vyvarujeme, ak pôjdeme stále proti smeru hodinových ručičiek.

Teda sú to trojuholníky *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEF*, *EFA*, *FAB*.

Hľadajme teraz trojuholníky II. typu. Zvolíme stranu šesťuholníka a k nej priradíme priemer (ku každej strane sú dve možnosti).

Teda sú to trojuholníky *ABD*, *ABE*, *BCE*, *BCF*, *CDF*, *CDA*, *DEA*, *DEB*, *EFB*, *EFC*, *FAC*, *FAD*.

Na koniec trojuholníky III. typu. Ak uvážime, že majú vrcholy »na preskáčku«, tak sú to len trojuholníky *ACE* a *BDF*.

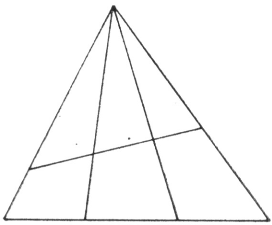
Odpoveď

a) Takých trojuholníkov existuje spolu $6 + 12 + 2 = 20$.

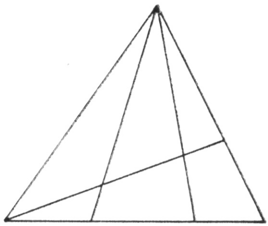
b) Vzniknú tri skupiny trojuholníkov.

Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 2

Vypíšte všetky trojuholníky z obrázku 35a. Urobte to isté pre trojuholníky z obrázku 35b. (a) 12 trojuholníkov, b) 15 trojuholníkov.)



Obr. 35a

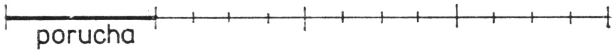


Obr. 35b

Riešenie úlohy Z6 - I - 3 (str. 82)

I. *spôsob - graficky*. Na obrázku 36 je znázornený čas jazdy autobusom jedným smerom hrubo vyznačenou úsečkou. Autobus sa pokazil v $\frac{3}{4}$ spiatočnej cesty, teda v $\frac{3}{4}$ času, ktorý mali vyhradený na celú spiatočnú cestu, ak by bolo všetko v poriadku. Predpokladáme, že cesta späť by trvala rovnako ako cesta tam. Čas poruchy je vyznačený na obrázku 36.

Cesta späť trvala štyrikrát dlhšie ako cesta tam, teda čas spiatočnej cesty (ktorý je vyznačený celý na obrázku 36)



Obr. 36

je štyrikrát dlhší ako čas cesty vyznačený na obrázku hrubo.

Ak si dĺžku času cesty autobusom rozdelíme na štvrtiny, tak z obrázku ľahko vyčítame, že deti šli ešte 13 takých časových úsekov. Autobus by to prešiel (ak by nebol pokazený) za jeden taký časový úsek. Teda autobus išiel 13-krát rýchlejšie ako deti.

II. *spôsob - fyzikálnou úvahou*. Označme si dĺžku cesty tam (teda aj späť) s. Autobus ide rýchlosťou v_a, deti rýchlosťou v_d. Označme čas trvania cesty tam t. Potom pre dĺžku cesty tam platí

$$s = v_a \,.\, t.$$

Cestou späť autobus za čas $\frac{3}{4}t$ prešiel dráhu $\frac{3}{4}t \cdot v_a$. Cesta späť trvala štyrikrát dlhšie, teda čas $4t$, z toho deti šli peši počas $4t - \frac{3}{4}t = \frac{13}{4}t$. Za ten čas prešli dráhu $\frac{13}{4}t \cdot v_d$. Spolu s autobusom cestou späť prešli dráhu

$$s = \frac{3}{4}t \cdot v_a + \frac{13}{4}t \cdot v_d.$$

Porovnaním dĺžky dráhy tam a späť dostávame:

$$\begin{aligned} t \cdot v_a &= \frac{3}{4}t \cdot v_a + \frac{13}{4}t \cdot v_d \qquad |: t\ |.4 \\ 4v_a &= 3v_a + 13v_d \\ v_a &= 13v_d \end{aligned}$$

Autobus bol 13-krát rýchlejší ako deti.

III. *spôsob - tabuľkou.* Označenie zvolíme rovnako ako pri II. spôsobe. Úvahy však zaznamenáme do tabuľky.

	Dráha	Rýchlosť	Čas	Rovnice
Cesta tam	s	v_a	t	$s = v_a \cdot t$
Cesta späť (autobus)	$\frac{3}{4}s$	v_a	$\frac{3}{4}t$	$\frac{3}{4}s = v_a \cdot \frac{3}{4}t$
Deti	$\frac{1}{4}s$	v_d	$4t - \frac{3}{4}t$	$\frac{1}{4}s = v_d\left(4t - \frac{3}{4}t\right)$

Odtiaľ potom

$$\begin{aligned} s &= t \cdot v_a \\ s &= 13t \cdot v_d \\ \hline t \cdot v_a &= 13t \cdot v_d \end{aligned}$$

Čiže

$$v_a = 13v_d.$$

Autobus bol 13-krát rýchlejší ako deti.

Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 3

1. Chodec išiel z jednej obce do druhej peši 3 hodiny a povozom 2 hodiny. Na spiatočnej ceste sa zviezol povozom 3 hodiny a peši išiel 1 hodinu. Koľkokrát rýchlejšie išiel povozom ako peši? (Dvakrát.)

2. Chlapec išiel z mesta do susednej dediny na bicykli rýchlosťou 13,2 km/h. Cestou sa mu bicykel pokazil, takže sa musel vrátiť peši rýchlosťou 4,8 km/h. Cesta tam aj späť mu trvala 2,5 hodiny. Ako ďaleko prešiel na bicykli? (8,8 km)

Riešenie úlohy Z6 - I - 4 (str. 83)

Podľa kritéria deliteľnosti deviatimi je číslo deliteľné deviatimi práve vtedy, ak je deliteľný deviatimi jeho ciferný súčet. Ciferné súčty všetkých trojciferných čísel zo zadania úlohy sú prirodzené čísla od 3 (ciferný súčet čísla 111) po 21 (ciferný súčet čísla 777). Medzi nimi sú len čísla 9, 18 deliteľné deviatimi. Určme teda všetky možné rozklady čísel

9 a 18 na tri sčítance (samozrejme len použitím 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Z rozkladu potom určíme hľadané trojciferné čísla. Prehľadne si to zachytíme v tabuľke:

Rozklad 9	Hľadané čísla	Počet
1 + 1 + 7	117, 171, 711	3
1 + 2 + 6	126, 162, 216, 261, 612, 621	6
1 + 3 + 5	135, 153, 315, 351, 513, 531	6
1 + 4 + 4	144, 414, 441	3
2 + 2 + 5	225, 252, 522	3
2 + 3 + 4	234, 243, 324, 342, 423, 432	6
3 + 3 + 3	333	1
Rozklad 18		
7 + 7 + 4	774, 747, 477	3
7 + 6 + 5	765, 756, 675, 657, 576, 567	6
6 + 6 + 6	666	1

Spolu 38 trojciferných čísel vyhovujúcich podmienkam úlohy.

Poznámka. Počet trojciferných čísel určených trojicou čísel pri danom rozklade závisí len od toho, či sú tieto čísla navzájom rôzne, alebo nie.

Ak sú všetky cifry navzájom rôzne a žiadna z nich nie 0, potom na prvé miesto trojciferného čísla môžem vybrať z 3 číslic, na druhé miesto už len zo zvyšných 2 číslic a na posledné, už len tú číslicu, čo mi zostane, t. j. 1 číslicu. Teda spolu $3.2.1 = 6$ rôznych trojciferných čísel.

Ak sú v danom rozklade dve čísla rovnaké, tak tá »iná« cifra môže byť na prvom, alebo druhom, alebo treťom mieste hľadaného trojciferného čísla. Teda spolu 3 možnosti.

Ak sú všetky tri cifry rovnaké, tak je len jedna možnosť zápisu trojciferného čísla pomocou nich.

Pri riešení úlohy nie je nutné vypisovať všetky možnosti, nakoľko úloha vyžaduje len počet možností. Teda 2. stĺpec tabuľky je vlastne zbytočný.

Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 4

1. Rozložte číslo 12 na súčet troch sčítancov. Nájdite všetky možnosti.

2. Koľko rôznych trojciferných čísel možno zapísať pomocou cifier 1, 1, 2 a koľko pomocou cifier 1, 2, 3, 4, ak každú z napísaných cifier môžete použiť práve raz? (3, 24)

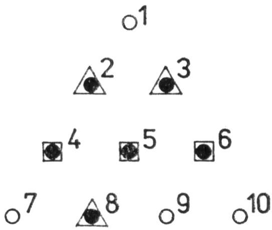
Riešenie úlohy Z6 - I - 5 (str. 83)

Uvážme, aké možnosti na vyfarbenie máme, ak je zo zadania určená modrá farba bodov 4, 5. Z rovnostranných trojuholníkov 452 a 458 (obr. 37), aby ich vrcholy boli rôznej farby, je určená farba vrcholov 2, 8 — červená.*) Ak uvážime rovno-

---

*) Na obrázku 37 je červená farba značená trojuholníkom, modrá štvorčekom.

stranný trojuholník 286, ktorý má dva vrcholy 2, 8 červené, tak jeho vrchol 6 musí byť modrý. Z rovnostranného trojuholníka 563 je určené, že vrchol 3 je červený. Uvážme teraz vrchol 1. Vzhľadom na rovnostranný trojuholník 123 by mal byť modrý, ale vzhľadom na trojuholník 146 by mal byť červený. Modrý aj červený súčasne byť nemôže. Takže body na obrázku 32 (str. 83) nemožno vyfarbiť tak, aby boli splnené požiadavky úlohy.

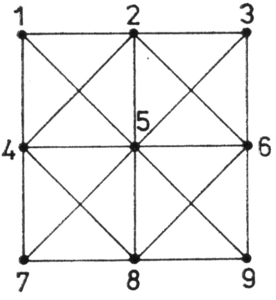


Obr. 37

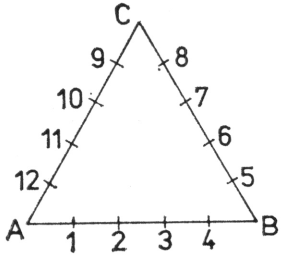
Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 5

1. Body 1, 2, ..., 9 na obrázku 38 vyfarbite na modro a červeno tak, aby žiadne štyri body vyfarbené rovnakou farbou netvorili vrcholy pravouholníka. Každý bod má byť vyfarbený práve jednou farbou.

2. Trojuholník na obrázku 39 je rovnostranný. Body 1, 2, ..., 12 delia jeho strany na rovnako dlhé úsečky. Nájdite všetky rovnostranné trojuholníky určené bodmi A, B, C, 1, 2, ..., 12.



Obr. 38



Obr. 39

Riešenie úlohy Z6 - I - 6 (str. 84)

Uvažujme najskôr podmienku a). To znamená hľadajme všetky trojice x, y, z, aby súčin $x.y.z = 1\,988$. K tomu využijeme rozklad čísla 1 988 na prvočinitele. $1\,988 = 2.2.7.71$. Z neho teraz určíme všetky delitele čísla 1 988. Sú to: 1, 2, 4, 7, 14, 28, 71, 142, 284, 497, 994, 1 988. Hľadáme rozklad na tri činitele. Zvolíme si prvého, ako ľubovoľného deliteľa čísla 1 988 a ostatné si dourčíme z deliteľov tak, aby súčin všetkých troch bol 1 988. Aby sa nám nestalo, že niektoré trojice sa budú opakovať, budeme postupovať tak, že v súčine každé ďalšie číslo môže byť len väčšie, nanajvýš rovné predchádzajúcemu. Začneme najmenším a postupne budeme prvého činiteľa zväčšovať. Dbáme na to, aby sme na nič nezabudli.

Takto nájdené možnosti sú uvedené v prvom stĺpci tabuľky. V ďalších stĺpcoch tabuľky uvažujeme o podmienke b).

Rozklad	Ciferný súčet	Cif. súčet odzadu	Sú obe čísla prvočíslami?
1.1.1988	1 990	0 991	nie (1 990)*)
1.2.994	997	799	nie (799 = 17.47)
1.4.497	502	205	nie (502)
1.7.284	292	292	nie (292)
1.14.142	157	751	áno
1.28.71	100	001	nie (100)
2.2.497	501	105	nie (105)
2.7.142	151	151	áno
2.14.71	87	78	nie (78)
4.7.71	82	28	nie (82)

(V zátvorke je uvedené jedno z dvojice čísel, ktoré nevyhovuje podmienke prvočíselnosti.)

Až na poradie sú len dve možnosti trojíc vyhovujúce podmienkam úlohy. Sú to: 1, 14, 142 a 2, 7, 142.

Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 6

1. Nájdite prvočíselný rozklad čísel 100 a 120 ($2^2.5^2$, $2^3.3.5$).

2. Nájdite všetky delitele čísel 100 a 120. (9 deliteľov, 16 deliteľov)

*) Overte sami v tabulke prvočísel.

RIEŠENIE ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z6 - II - 1 (str. 84)

Úlohu vyriešime vymenovaním všetkých možností. Vypíšeme si najskôr všetky možné súčtové rozklady čísla 8 (1. stĺpec). K nim vypíšeme možné zápisy trojciferných čísel. Číslo 0 nemôže byť na začiatku.

$8 = 8 + 0 + 0$	800	1 možnosť
$= 7 + 1 + 0$	710, 701, 170, 107	4 možnosti
$= 6 + 2 + 0$	620, 602, 260, 206	4 možnosti
$= 6 + 1 + 1$	611, 161, 116	3 možnosti
$= 5 + 3 + 0$	530, 503, 350, 305	4 možnosti
$= 5 + 2 + 1$	521, 512, 251, 215, 152, 125	6 možností
$= 4 + 4 + 0$	440, 404	2 možnosti
$= 4 + 3 + 1$	431, 413, 341, 314, 143, 134	6 možností
$= 4 + 2 + 2$	422, 242, 224	3 možnosti
$= 3 + 3 + 2$	332, 323, 233	3 možnosti

Existuje 36 takých trojciferných čísel.

Poznámka. Nakoľko otázka bola na počet, úlohu možno riešiť i bez vymenuvávania všetkých možností, v zmysle úvahy v poznámke k úlohe 6 - I - 4 v jej riešení (str. 93).

Riešenie úlohy Z6 - II - 2 (str. 84)

I. *spôsob - úvahou.* Pastier mal za rok služby dostať 18 oviec a 4 kozy. Dostal 4 ovce a 18 kôz, pretože si odslúžil len 10 mesiacov, čo je $\frac{10}{12}$ roku. Teda podľa spravodlivosti mal dostať $\frac{10}{12}$ z 18 oviec, čo je 15 oviec, a $\frac{10}{12}$ zo 4 kôz, čo je $\frac{10}{3}$ kozy. Dostal však len 4 ovce, čo je o 11 oviec menej, avšak 18 kôz, čo je o $\frac{44}{3}$ viac, ako mal dostať. Ak to bolo spravodlivé, tak musí byť 11 oviec za toľko ako $\frac{44}{3}$ kozy. Takže trojnásobné množstvo 33 oviec musí byť za toľko ako 44 kôz. Z toho nám vychádza, že 3 ovce sú rovné 4 kozám. Takže ak ovca stojí 12 grošov, tak 3 ovce stoja $12 . 3 = 36$ grošov, čo je toľko, ako stoja 4 kozy. Teda 1 koza stojí $36 : 4 = 9$ grošov.

II. *spôsob - rovnicou.* Nech koza stojí k grošov. Potom pastier mal za rok dostať za ovce ... $18 . 12$ grošov

za kozy ... $4 . k$ grošov

spolu ..... $18 . 12 + 4 . k$ grošov

za 10 mesiacov mal dostať .... $\frac{10}{12} \cdot (18 . 12 + 4k) =$

$= 180 + \frac{10k}{3}$ grošov

za 10 mesiacov dostal za ovce ... $4 . 12 = 48$ grošov

za kozy ... $18 . k$ grošov

spolu ..... $48 + 18 . k$ grošov

Ak bol kráľ spravodlivý, tak musí byť rovnosť medzi tým, čo mal pastier dostať a čo dostal. Teda:

$$180 + \frac{10}{3}k = 48 + 18k \qquad |.3$$

$$540 + 10k = 144 + 54k$$

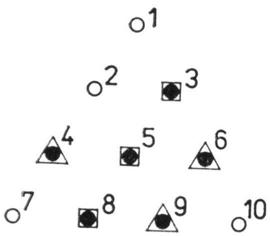
$$396 = 44k$$

$$k = 9$$

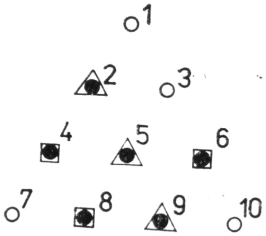
Jedna koza stojí 9 grošov.
Skúšku urobte sami.

Riešenie úlohy Z6 - II - 3 (str. 85)

Uvažujme bod 5. Ak ho vyfarbíme modrou, tak bod 4 (obr. 40) musí byť červený (z trojuholníka 4 8 5), bod 3 musí byť modrý (z trojuholníka 4 9 3), potom bod 6 musí byť červený (z trojuholníka 3 5 6). Ale potom bod 10 by musel byť zároveň modrý (z trojuholníka 9 10 6) aj červený (z trojuholníka 8 3 10) a to nemôže byť.



Obr. 40



Obr. 41

Keď však vyfarbíme bod 5 červenou (obr. 41), potom bod 6 musí byť modrý (z trojuholníka 5 9 6), potom bod 2 musí byť červený (z trojuholníka 2 8 6), ale potom bod 4 musí byť modrý (z trojuholníka 4 5 2). Avšak potom bod 7 by musel byť zároveň aj modrý (z trojuholníka 7 2 9) aj červený (z trojuholníka 7 8 4), čo však nemôže byť.

Bod 5 však iný ako modrý, alebo červený nemôže byť, teda zvyšné body nemožno vyfarbiť tak, aby boli splnené podmienky úlohy.

Poznámka. Všimnite si, že úvaha pre červený bod 5 je »taká istá« ako pre modrý bod 5. Vlastne sme ju ani nemuseli robiť, stačilo si všimnúť symetriu (obr. 42).

Obr. 42