38. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z5

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 38. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 102–128.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404893

Kategória Z5

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia na str. 107 až 124)

Z5 - I - 1

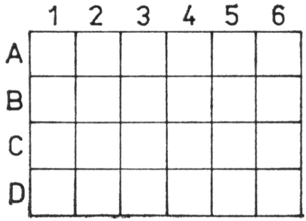
V zápise

$$
\begin{array}{r}
965 \\
674 \\
866 \\
797 \\
\hline
1111
\end{array}
$$

nahraďte niektoré číslice jednotkou tak, aby súčet bol správny. (Rovnaké číslice nemusia byť nahradené rovnako.)

Z5 - I - 2

Koľko pravouholníkov je na obrázku 43? Koľko z nich obsahuje pole C2? Ktorých je viac, tých čo obsahujú pole C2, alebo tých, čo obsahujú pole B3?



Obr. 43

Z5 - I - 3

Máme 100 kociek 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm. Koľko rôznych kvádrov z nich možno poskladať, ak musíme vždy použiť všetky kocky?

Z5 - I - 4

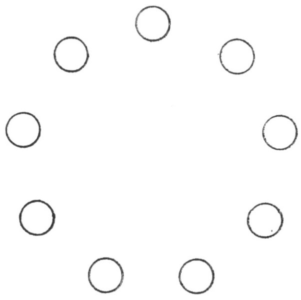
Na istom ostrove je 7 miest. Spojári mali pospájať dvojice miest telefónnymi káblami tak, aby sa z každého mesta dalo telefonovať do všetkých ostatných. (Ak sa dá telefonovať z A do B, z B do C, možno telefonovať aj z A do C.) Spojári položili 15 káblov. Po nejakom čase prišla reklamácia, že úlohu nesplnili. Isté dve mestá nemôžu nadviazať spojenie. Je to možné? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Z5 - I - 5

Súrodenci Adam, Betka, Cyril a Dana zdedili záhradu tvaru štvorca 100 m $\times$ 100 m. V záhrade je studňa. Záhradu si rozdelili štyrmi priamymi plotmi, ktoré viedli vždy z rohu záhrady po studňu. Adam pritom dostal 4-krát väčšiu časť ako Dana, Betka 3-krát väčšiu ako Dana a Cyril 2-krát väčšiu ako Dana. Nakreslite polohu studne v štvorcovej záhrade. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Z5 - I - 6

Napíšte čísla 1, 2, ..., 9 do kruhu tak, aby žiadne dve susedné nemali súčet deliteľný 3, 5, 7 (v českej verzii 3, 4, 7). Nájdite jedno riešenie (obr. 44).



Obr. 44

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia na str. 125 až 128)

Z5 - II - 1

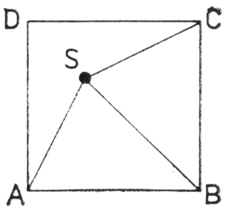
V zápise

$$
\begin{array}{r}
665 \\
754 \\
786 \\
498 \\
\hline
2222
\end{array}
$$

nahraďte niektoré číslice číslicou 2 tak, aby bol zápis súčtu správny. Nájdite všetky riešenia.

Z5 - II - 2

Traja súrodenci Janka, Marienka a Anička zdedili záhradu tvaru štvorca o strane dlhej 90 m. V záhrade je studňa. Záhradu si rozdelili tromi priamymi plotmi, ktoré viedli



Obr. 45

z troch rohov záhrady priamo ku studni (obr. 45). Všetky tri dostali rovnako veľké záhrady. Zistite, koľko metrov je studňa vzdialená od jednotlivých strán štvorca.

Z5 - II - 3

Vo výraze 128 — 64 + 32 — 16 + 8 doplňte zátvorky tak, aby ste po vypočítaní dostali a) najväčší výsledok, b) najmenší výsledok.

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z5 - I - 1 (str. 102)

Najskôr uvažujme číslice na mieste jednotiek. Ich súčtom musí byť číslo, ktoré má na mieste jednotiek číslicu 1. Teda 1, 11, 21, 31, ... Súčet čísel na mieste jednotiek je $5 + 4 + 6 + 7 = 22$, teda musíme niektoré z nich nahradiť jednotkou tak, aby sme dostali súčet buď 21, alebo 11. Súčet 1, 31 a viac nemôžeme samozrejme dostať, pretože najmenší možný súčet je 4 (pri nahradení všetkých číslic jednotkou) a najväčší 22 (ak nenahradíme žiadnu číslicu jednotkou). Ak nahradíme jednotkou číslo 5, súčet sa zmenší o 4, ak číslo 4, súčet sa zmenší o 3, nahradením čísla 6 sa súčet zmenší o 5 a nahradením čísla 7 sa súčet zmenší o 6. Takže súčet môžeme zmenšiť o 4, 3, 5, 6, alebo ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel.

Aby na mieste jednotiek bol súčet 21, museli by sme pôvodný súčet 22 zmenšiť o 1. To, ako vidíme, nejde. Zostáva nám len úprava na súčet 11. To však musíme pôvodný súčet 22 zmenšiť o 11. Súčet 11 z čísel 4, 3, 5, 6, o ktoré môžeme zmenšovať, môžeme dosiahnuť len jediným spôsobom $5 + 6$. Teda na mieste jednotiek musíme číslicou 1 nahradiť číslice 6, 7. Zápis súčtu potom bude vyzerať takto:

```
  9 6 5
  6 7 4
  8 6 1
  7 9 1
  -----
  ... 1      a »jedna zostala«.
```

Prejdime na miesto desiatok. Do súčtu desiatok nesmieme zabudnúť na 1 desiatku z miesta jednotiek. Súčet na mieste desiatok je teda $6 + 7 + 6 + 9 + 1 = 29$. Musíme ho znížiť na 21, prípadne na 11. To môžeme urobiť len zámenou čísel 6, 7, 6, 9 na číslo 1, teda môžeme zmenšovať o 5, 6, 5, 8, prípadne o ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel.

Ak chceme číslo 29 znížiť na 21, musíme ho znížiť o 8. To sa dá jedine náhradou číslice 9 na číslicu 1. Ak by sme chceli číslo 29 znížiť na 11, museli by sme ho znížiť o 18 a to sa dá jedine náhradou číslic 6, 6, 9 za číslice 1. Sú teda zatiaľ dve možnosti:

```
   9 6 5                      9 1 5
   6 7 4                      6 7 4
   8 6 1                      8 1 1
   7 1 1                      7 1 1
   -----                      -----
 ... 1 1   a »dve zostali«  ... 1 1   a »jedna zostala«
```

Uvážme teraz prvú z týchto možností a uvažujme čísla na mieste stoviek. Ich súčet, pri ktorom nezabúdame na 2 stovky z miesta desiatok, je $9 + 6 + 8 + 7 + 2 = 32$. Tento súčet 32 môžeme zmenšiť o 8, 5, 7, 6, prípadne o ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel. Podľa podmienky úlohy musíme ho znížiť na 11, teda musíme číslo 32 znížiť o číslo 21. Číslo 21 dostaneme z našich možností jedine ako súčet $8 + 7 + 6$. Teda musíme nahradiť číslice 9, 8, 7 číslicou 1.

Uvážme druhú z možností. Uvažujeme číslice na mieste stoviek. Ich súčet s prirátaním jednej stovky z miesta desiatok je $9 + 6 + 8 + 7 + 1 = 31$. Výsledný súčet musí byť 11. Teda číslo 31 musíme zmenšiť o 20. Máme možnosť znížiť o 8, 5, 7, 6, prípadne o ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel. Jediná možnosť je $8 + 5 + 7$. Teda musíme nahradiť číslice 9, 6, 8 číslicou 1.

Zhrnutím predchádzajúcich úvah dochádzame k odpovedi: Úloha má práve dve riešenia:

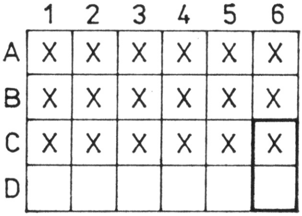
$$\begin{array}{r} 165 \\ 674 \\ 161 \\ 111 \\ \hline 1111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 115 \\ 174 \\ 111 \\ 711 \\ \hline 1111 \end{array}$$

Riešenie úlohy Z5 - I - 2 (str. 102)

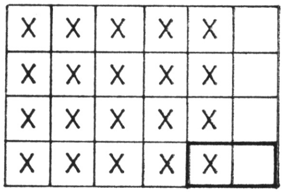
I. *spôsob - hľadaním všetkých možností.* Hľadáme najskôr, koľko pravouholníkov je v obrázku 43 (str. 103). Uvažujme všetky typy pravouholníkov, ktoré môžeme nájsť v obrázku. Typ 1×1 (štvorček). Takých štvorčekov je tam $4.6 = 24$. Typ 2×1. Môžeme ho umiestniť »nastojato« alebo »naležato«. Uvažujme najskôr »nastojato«. Horné políčko môže potom byť len na miestach označených na obrázku 46a krížikom. To je $3.6 = 18$ možností.

Uvažujme teraz »naležato«. Potom ľavé políčko môže byť len na miestach označených krížikom (obr. 46b). To je $4.5 = 20$ možností.

Spolu pre tento typ máme $18 + 20 = 38$ možností.



Obr. 46a



Obr. 46b

Typ 3×1. Podobnou úvahou ako pre typ 2×1.
»Nastojato« je $2.6 = 12$ možností.
»Naležato« je $4.4 = 16$ možností.
Spolu $12 + 16 = 28$ možností.

Typ 4×1. »Nastojato« je $1.6 = 6$ možností.
»Naležato« je $4.3 = 12$ možností.
Spolu $6 + 12 = 18$ možností.

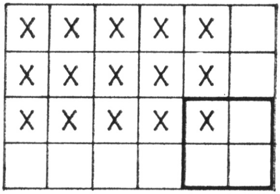
Typ 5×1. »Nastojato« sa už nezmestí.
»Naležato« je $4.2 = 8$ možností.

Typ 6×1. »Naležato« sú $4.1 = 4$ možnosti.

Typ 7×1 sa už nijako nezmestí.

Uvažujme teraz pravouholníky »šírky« 2. Typ 1×2 sme už uvažovali.

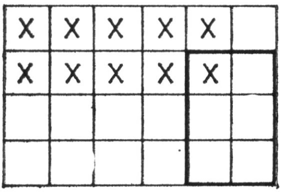
Typ 2 × 2. Uvažujme ľavé horné políčko. To môže byť len na miestach vyznačených krížikom (obr. 47). To je 3.5 = 15 možností.



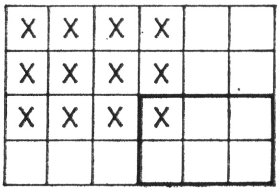
Obr. 47

Typ 3 × 2. »Nastojato«: Ak označíme krížikom miesta, kde môže byť ľavé horné políčko, tak vidíme (obr. 48a), že je 2.5 = 10 možností.

»Naležato«: Ak označíme krížikom miesta, kde môže byť ľavé horné políčko (obr. 48b), tak vidíme, že je 3.4 = 12 možností.



Obr. 48a



Obr. 48b

Spolu pre tento typ teda je 10 + 12 = 22 možností.

Ďalšie výsledky dostávame podobnou úvahou.
Typ 4×2. »Nastojato« je $1.5 = 5$ možností.
»Naležato« je $3.3 = 9$ možností.
Spolu $5 + 9 = 14$ možností.
Typ 5×2. »Nastojato« sa nezmestí.
»Naležato« je $3.2 = 6$ možností.
Typ 6×2. »Naležato« sú $3.1 = 3$ možnosti.

Podobne pre pravouholníky »šírky« 3.
Typ 3×3 má $2.4 = 8$ možností.
Typ 4×3. »Nastojato« sú $1.4 = 4$ možnosti.
»Naležato« je $2.3 = 6$ možností.
Spolu je $4 + 6 = 10$ možností.
Typ 5×3. »Nastojato« sa už nezmestí.
»Naležato« sú $2.2 = 4$ možnosti.
Typ 6×3. »Naležato« sú $2.1 = 2$ možnosti.

Pre »šírku« 3 sme vyčerpali všetky možnosti. Uvažujme poslednú »šírku« 4. »Širšie« typy už nevyhovujú.
Typ 4×4 má $1.3 = 3$ možnosti.
Typ 5×4 má $1.2 = 2$ možnosti.
Typ 6×4 má $1.1 = 1$ možnosť.

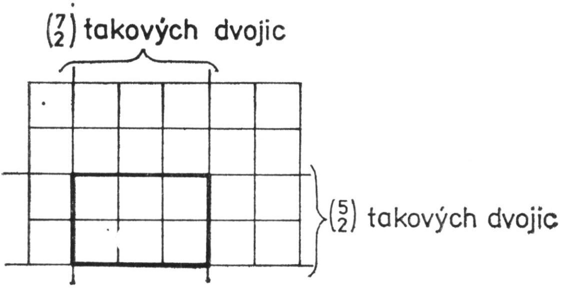
Na obrázku 43 (str. 103) je teda spolu $24 + 38 + 28 + 18 + 8 + 4 + 15 + 22 + 14 + 6 + 3 + 8 + 10 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1 = 210$ pravouholníkov.

Podobne, podľa typov, môžeme zistiť, koľko pravouholníkov daného typu obsahuje políčko B3, prípadne C2. Výsledky sú v tabuľke.

Typ	Obsahuje B3	Obsahuje C2	Typ	Obsahuje B3	Obsahuje C2
1×1	1	1	2×5	4	4
1×2	4	4	2×6	2	2
1×3	5	4	3×3	6	4
1×4	4	3	3×4	9	6
1×5	2	2	3×5	4	4
1×6	1	1	3×6	2	2
2×2	4	4	4×4	3	2
2×3	10	8	4×5	2	2
2×4	8	6	4×6	1	1

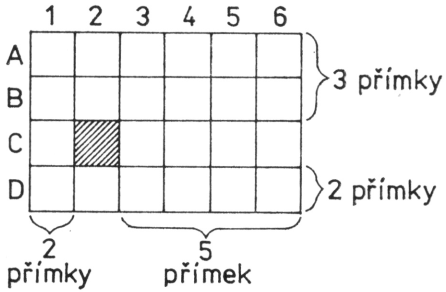
Pravouholníkov obsahujúcich pole C2 je 60, pravouholníkov obsahujúcich pole B3 je 72. Viac je pravouholníkov, ktoré obsahujú pole B3.

II. *spôsob - kombinatorickou úvahou.* Každý pravouholník je jednoznačne určený dvojicou zvislých a dvojicou vodorovných priamok, ktoré vzniknú predĺžením strán pravouholníkov. Vodorovných dvojíc priamok je $\binom{5}{2} = 10$, zvislých dvojíc je $\binom{7}{2} = 21$. (Obr. 49.) Teda všetkých pravouholníkov je $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} = 10.21 = 210$.



Obr. 49

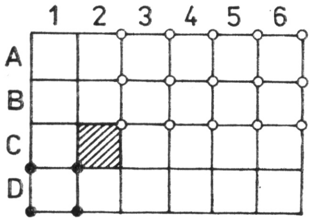
Teraz určíme pravouholníky, ktoré neobsahujú pole C2. Ľavú zvislú stranu môžeme zvoliť na 2 priamkach, pravú na 5 priamkach (obr. 50). To je spolu $2 . 5 = 10$ možností. Hornú vodorovnú stranu môžeme zvoliť na 3 priamkach, dolnú na 2 priamkach (obr. 50), tj. spolu $3 . 2 = 6$ možností. Preto počet pravouholníkov, ktoré obsahujú pole C2, je rovný $10 . 6 = 60$.



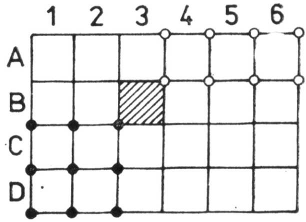
Obr. 50

Podobne určíme počet pravouholníkov, ktoré obsahujú pole B3. Ten je rovný (3.4).(2.3) = 72.

Poznámka. Počet pravouholníkov, ktoré obsahujú pole C2 alebo B3, môžeme zistiť aj takto: Každý pravouholník je určený ľubovoľnou dvojicou protiľahlých (t. j. nesusedných) vrcholov. Budeme uvažovať ľavý dolný a pravý horný vrchol. Možnosti pre ľavý dolný vrchol sú vyznačené na obrázkoch 51 a 52 plnými krúžkami, pravé horné vrcholy prázdnymi krúžkami. Z obrázku 51 je vidieť, že je práve 4.15 = 60 pravouholníkov, ktoré obsahujú pole C2. Podobne z obrázku 52 je vidieť, že je práve 9.8 = 72 pravouholníkov, ktoré obsahujú pole B3.



Obr. 51



Obr. 52

Teda pravouholníkov, ktoré obsahujú políčko B3, je viac ako pravouholníkov, ktoré obsahujú políčko C2.

Riešenie úlohy Z5 - I - 3 (str. 103)

Počet kociek kvádra je určený súčinom počtu kociek rozmerov kvádra. Teda pre počet kociek na hranách kvádra musí platiť, že ich súčin je 100. Sú tieto možnosti rozkladu čísla 100 na súčin troch činiteľov (nezabúdame samozrejme na jednotku):

$$100 = 1.1.100 \qquad 100 = 1.10.10$$
$$= 1.2.50 \qquad = 2.2.25$$
$$= 1.4.25 \qquad = 2.5.10$$
$$= 1.5.20 \qquad = 4.5.5$$

Iná možnosť rozkladu čísla 100 na súčin troch čísel nie je. Ak sa dohodneme, že kvádre, napríklad $1 \times 2 \times 50$, $50 \times 1 \times 2$, $2 \times 1 \times 50$ atď., sú rovnaké, tak zo 100 kociek možno poskladať 8 rôznych kvádrov.

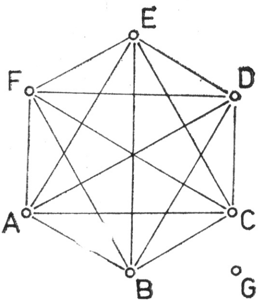
Poznámka. Pri hľadaní rozkladov čísla 100 na súčin troch činiteľov nám môže pomôcť rozklad čísla 100 na prvočinitele: $100 = 2.2.5.5$.

Riešenie úlohy Z5 - I - 4 (str. 103)

I. *spôsob.* Medzi 7 mestami je možné položiť 21 káblov, pretože mesto A možno spojiť so 6 mestami,
potom mesto B už len s 5 nespojenými mestami,
potom mesto C už len so 4 nespojenými mestami,
potom mesto D už len s 3 nespojenými mestami,
potom mesto E už len s 2 nespojenými mestami,
potom mesto F už len s 1 nespojeným mestom,
potom mesto G už je spojené so všetkými.
(Komu nie je táto úvaha celkom jasná, nech si nakreslí 7 bodov — miest a tieto v poradí, podľa našej úvahy, spája s ostat-

nými mestami.) Takže spolu je $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ káblov. Ak spojári položili 15 káblov, to znamená, že z možných 21 nepoložili 6. Každé mesto je so všetkými ostatnými pospájané 6 káblami, teda je možné, že jedno mesto nebolo pripojené.

II. *spôsob.* 6 miest možno pospájať každé s každým 15 káblami $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15)$, obrázok 53. Takže (pri »troche« nepozornosti) spojári mohli zabudnúť na posledné 7. mesto, keď predtým pospájali 15 káblami ostatných 6 miest, každé s každým.

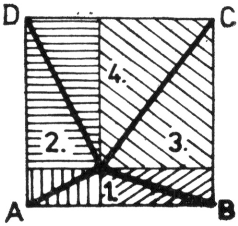


Obr. 53

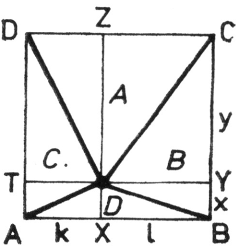
Riešenie úlohy Z5 - I - 5 (str. 103)

I. *spôsob.* Označme veľkosť Daninej záhrady d. Potom Adamova záhrada má veľkosť $4d$, Betkina záhrada má veľkosť $3d$, Cyrilova záhrada má veľkosť $2d$. Veľkosť celej záhrady je súčtom veľkostí záhrad Adama, Betky, Cyrila a Dany. Takže veľkosť celej záhrady môžeme vyjadriť ako $4d + 3d + 2d + d = 10d$. Avšak záhrada má veľkosť $100 . 100 \text{ m}^2 =$

$= 10\,000$ m². Z toho zrejme Dana má záhradu veľkosti 1 000 m², Cyril záhradu veľkosti 2 000 m², Betka záhradu veľkosti 3 000 m² a Adam záhradu veľkosti 4 000 m². Potom výška trojuholníka Daninej záhrady (k strane AB, obr. 54) musí byť 20 m, nakoľko obsah tohto trojuholníka je $1\,000\ \text{m}^2 = \dfrac{20\ \text{m} \cdot 100\ \text{m}}{2}$. Podobne výška trojuholníka Cyrilovej záhrady je 40 m, Betkinej je 60 m a Adamovej je 80 m.



Obr. 54



Obr. 55

II. *spôsob*. Rovnakým spôsobom vyšrafované trojuholníky sú rovnaké (obr. 54). To znamená, že 1. a 4. záhrada (podľa označenia v obrázku 54) majú spolu rovnakú veľkosť ako 2. a 3. záhrada spolu. Označme záhrady 1, 4 a záhrady 2, 3 ako záhrady proti sebe. Ďalej označme veľkosť Daninej záhrady d. Potom Adamova záhrada má veľkosť $4d$, Betkina záhrada má veľkosť $3d$ a Cyrilova záhrada má veľkosť $2d$. Takže záhrady Adama a Dany majú spolu veľkosť $5d$, takisto ako záhrady Betky a Cyrila spolu. Teda záhrady proti sebe musia mať Adam s Danou a Betka s Cyrilom. (Obr. 55.)

Dana má záhradu, ktorej obsah je polovica obsahu obdĺžnika $ABYT$; jeho obsah je $100 . x$ m^2. Adam má záhradu, ktorej obsah je polovica obsahu obdĺžnika $DCYT$; jeho obsah je $100 . y$ m^2. Zrejme pre x, y platí (podľa obr. 55): $x + y = 100$ a $x : y$ je v pomere $1 : 4$, nakoľko Adam má štyrikrát väčšiu záhradu ako Dana. Z toho $x = 20$ m a $y = 80$ m. Podobne pre k, l platí: $k + l = 100$, $k : l = 2 : 3$, takže $k = 40$ m, $l = 60$ m.

Ak vrchol A štvorca $ABCD$ je najbližšie k studni, potom studňa je od strany AB vzdialená 20 m a od strany AD 40 m (prípadne naopak). Riešenia pre studňu bližšie k bodu B (resp. C, D) sú obdobné. Sú len osovo, prípadne stredovo súmerné a považujeme ich za rovnaké.

Riešenie úlohy Z5 - I - 6 (str. 104)

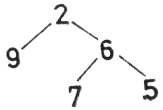
I. *spôsob.* Najskôr si vypíšeme, ktoré čísla môžu byť vedľa seba. K tomu nám pomôže, keď si uvedomíme, že možné súčty dvoch čísel vedľa seba môžu byť len: 4, 8, 11, 13, 16, 17. Potom ku každému číslu od 1 do 9 nájdeme možných susedov jednoducho ako doplnky k možným súčtom (samozrejme, že aj tie musia byť od 1 do 9). Takže

vedľa 1 môžu byť 3, 7,
vedľa 2 môžu byť 6, 9,
vedľa 3 môžu byť 1, 5, 8,
vedľa 4 môžu byť 7, 9,
vedľa 5 môžu byť 3, 6, 8,
vedľa 6 môžu byť 2, 5, 7,
vedľa 7 môžu byť 1, 4, 6, 9,
vedľa 8 môžu byť 3, 5, 9,
vedľa 9 môžu byť 2, 4, 7, 8.

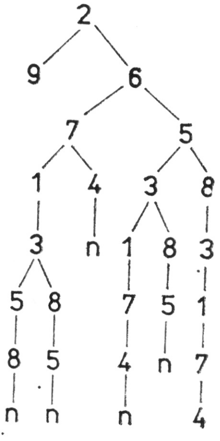
Začnime číslom, ktoré má len dvoch susedov. Vyberme si napríklad 2. Pre číslo 2 je len jedna možnosť (až na symetriu):

9 — 2 — 6

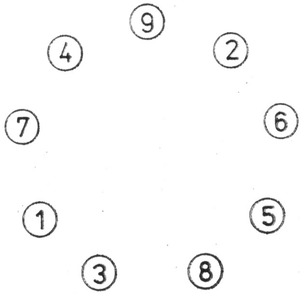
Budeme pokračovať číslom 6, číslo 9 necháme tak. K číslu 6 môžu byť (podľa nášho prehľadu možností) už len susedia čísla 5 alebo 7, pretože číslo 2 už tam je. Budeme to zapisovať prehľadne do tzv. stromu všetkých možností.



Takto postupujeme ďalej, staie dávame pozor na čísla, ktoré sme už použili, až dostaneme strom všetkých možností. (*n* znamená, že sme už vyčerpali všetky čísla, ktoré môžu byť susedom predchádzajúceho čísla.)



Teda existuje jediné riešenie (obr. 56) až na orientáciu a otočenie obrázku.

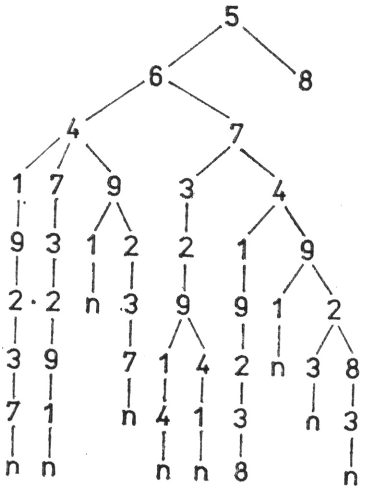


Obr. 56

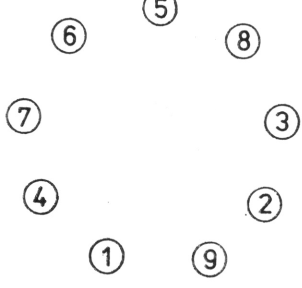
Riešenie českej verzie (zmena vznikla pravdepodobne prepisom): Vyhovujúce súčty dvoch susedných čísel sú: 5, 10, 11, 13, 17. Takže

vedľa 1 môžu byť 4, 9,
vedľa 2 môžu byť 3, 8, 9,
vedľa 3 môžu byť 2, 7, 8,
vedľa 4 môžu byť 1, 6, 7, 9,
vedľa 5 môžu byť 6, 8,
vedľa 6 môžu byť 4, 5, 7,
vedľa 7 môžu byť 3, 4, 6,
vedľa 8 môžu byť 2, 3, 5, 9,
vedľa 9 môžu byť 1, 2, 4, 8.

Začnime napríklad číslom 5. Podobným postupom ako pre slovenskú verziu zostavíme strom všetkých možností:

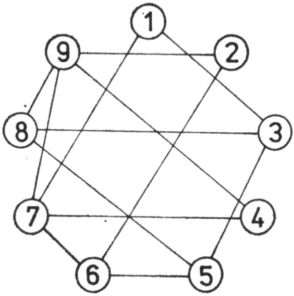


Úloha má jediné riešenie (v zmysle odpovede v slovenskej verzii) na obrázku 57.



Obr. 57

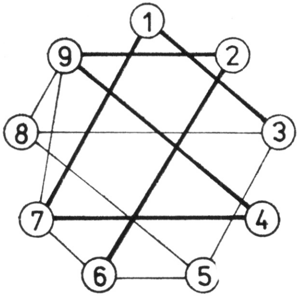
II. *spôsob.* Naznačíme len riešenie slovenskej verzie úlohy. Zapíšeme čísla do pomocnej schémy v ľubovoľnom poradí, napríklad podľa veľkosti. Spojíme úsečkou tie dvojice čísel, ktoré môžu byť vedľa seba (obr. 58a).



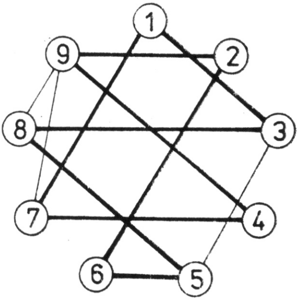
Obr. 58a

Potom v obrázku vyhľadáme uzavretú lomenú čiaru, aby prechádzala všetkými číslami. Hľadaná lomená čiara musí obsahovať spojnice 7 — 1 — 3, 9 — 2 — 6, 9 — 4 — 7 (obr. 58b), vysvetlite sami prečo. Tým dostaneme lomenú čiaru 3 — 1 — — 7 — 4 — 9 — 2 — 6. Potom ju už ľahko jediným spôsobom doplníme na lomenú čiaru 3 — 1 — 7 — 4 — 9 — 2 — — 6 — 5 — 8 — 3 (obr. 58c). Teraz už len čísla prekreslíme do kruhu v tomto poradí; dostaneme znovu riešenie znázornené na obr. 56.

Poznámka. Riešenie sme mohli hľadať aj postupným náhodným vpisovaním do koliesok v obrázku tak, že by sme pripisovali vždy len vyhovujúce susedné čísla a v prípade neúspe-



Obr. 58b



Obr. 58c

chu by sme sa vracali späť. Takým spôsobom by sme však neukázali, že úloha má práve jedno riešenie.

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z5 - II - 1 (str. 105)

Uvažujme čísla na miestach jednotiek. Ich súčet je $5 + 4 + 6 + 8 = 23$. Nahradením číslic 5, 4, 6, 8 číslicou 2 sa výsledný súčet zmenší o 3, 2, 4, 6, prípadne o ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel. Nový súčet musí byť 12, prípadne 22. Súčet 22 môžeme dostať zmenšením o 1 a to sa v našom prípade nedá. Súčet 12 dostaneme zmenšením pôvodného súčtu o 11 a to môžeme dostať len ako $3 + 2 + 6$, teda nahradením číslic 5, 4, 8 číslicou 2.

Takže medzivýsledok je

$$\begin{array}{r} 6\ 6\ 2 \\ 7\ 5\ 2 \\ 7\ 8\ 6 \\ 4\ 9\ 2 \\ \hline \ldots\ 2 \end{array} \quad \text{a »jedna zostala«.}$$

Uvažujme teraz čísla na miestach desiatok. Z miesta jednotiek zostala 1 desiatka, teda súčet na mieste desiatok je $6 + 5 + 8 + 9 + 1 = 29$. Musíme dosiahnuť súčet 22, prípadne 12. Súčet 22 dosiahneme znížením o 7, čo možno urobiť nahradením cifier 6 a 5 cifrou 2, prípadne nahradením cifry 9 cifrou 2.

Súčet 12 môžeme dosiahnuť znížením o 17, čo možno urobiť nahradením číslic 6, 8, 9 číslicou 2.

Takže máme tri možnosti ďalšieho medzivýsledku:

$$\begin{array}{r}6\,2\,2\\7\,2\,2\\7\,8\,6\\4\,9\,2\\\hline \ldots\,2\,2\end{array}\ \text{a »dve zostali«}\qquad\begin{array}{r}6\,6\,2\\7\,5\,2\\7\,8\,6\\4\,2\,2\\\hline \ldots\,2\,2\end{array}\ \text{a »dve zostali«}\qquad\begin{array}{r}6\,2\,2\\7\,5\,2\\7\,2\,6\\4\,2\,2\\\hline \ldots\,2\,2\end{array}\ \text{a »jedna zostala«}$$

V prvých dvoch prípadoch zostávajú 2 stovky z miesta desiatok, teda spolu súčet je $6 + 7 + 7 + 4 + 2 = 26$. Musíme znížiť na 22. Jediná možnosť je zameniť cifru 6 na cifru 2.

V treťom prípade zostáva 1 stovka z miesta desiatok, teda súčet na mieste stoviek je 25. Máme ho znížiť na 22, teda o 3 a to sa v našom prípade nedá.

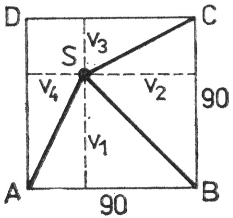
Úloha má práve dve riešenia:

$$\begin{array}{r}2\,2\,2\\7\,2\,2\\7\,8\,6\\4\,9\,2\\\hline 2\,2\,2\,2\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}2\,6\,2\\7\,5\,2\\7\,8\,6\\4\,2\,2\\\hline 2\,2\,2\,2\end{array}$$

Riešenie úlohy Z5 - II - 2 (str. 105)

Obsah záhrady je 90 m . 90 m = 8 100 m^2 (obr. 59). Keďže každý má rovnako veľkú záhradu, jedna z nich má obsah

$8\,100\ m^2 : 3 = 2\,700\ m^2$. Obsahy trojuholníkov ASB a BSC sú rovnaké, preto platí $v_1 = v_2$. Ale obsah $2\,700 = \frac{90 . v_1}{2}$, takže $v_1 = \frac{5\,400}{90} = 60$ (m). Z toho (pozri obr. 59) potom $v_3 = v_4 = 90 - 60 = 30$ (m). Teda studňa je od dvoch susedných strán štvorca vzdialená o 60 m a od druhých dvoch susedných strán o 30 m.



Obr. 59

Riešenie úlohy Z5 - II - 3 (str. 106)

Máme vo výraze $128 - 64 + 32 - 16 + 8$ umiestniť zátvorky tak, aby výsledok bol čo najmenší (prípadne čo najväčší). Zmenu výsledku dosiahneme len zátvorkovaním, pri ktorom aspoň jedna zátvorka je »za mínuskou«.

Najmenší výsledok dostaneme, ak odčítame čo najviac. To dosiahneme, ak všetky znamienka »zmeníme zátvorkovaním na mínus«. Tak je tomu v prípade:

$$128 - (64 + 32) - (16 + 8) = 8$$

Najväčší súčet je bez zátvoriek

$$128 - 64 + 32 - 16 + 8 = 88,$$

teda ak musíme dať zátvorky, urobíme to tak, aby sa výsledok nezmenil. Napríklad:

$$128 - 64 + (32 - 16 + 8) = 88$$

Najmenší výsledok, aký môžeme zátvorkovaním dostať, je 8, najväčší je 88.

Poznámka. Úlohu bolo možné riešiť i vypísaním všetkých možností zátvorkovania (pozri riešenie úlohy Z4 - I - 6) a nájdením najmenšieho a najväčšieho výsledku spomedzi všetkých možných výsledkov.