

39. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z6

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 39. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. (Slovak). **Terms of use.** Pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 75–87.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404918>
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

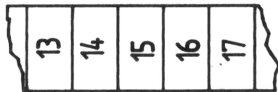
Kategória Z6

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 79)

Z6 - I - 1

Na krajčírskom metri sú zapísané za sebou idúce čísla od 1 do 150. Nájdite takú najmenšiu časť krajčírskeho metra, aby súčin čísel zapísaných na tejto časti sa končil práve tromi nulami. Nájdite aspoň dve riešenia. (Súčin čísel na časti krajčírskeho metra, ktorá je znázornená na obr. 23, sa končí práve jednou nulou.)



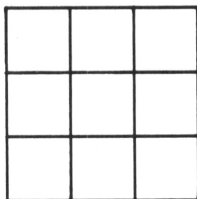
Obr. 23

Z6 - I - 2

Do tabuľky na obrázku 24a (str. 76) sme vpísali čísla 1, 2, 3, 4 tak, že súčet čísel zo susedných políčok je prvočíslo, teda: $1 + 2 = \underline{3}$, $1 + 4 = \underline{5}$, $2 + \underline{3} = 5$, $4 + 3 = \underline{7}$.

1	2
4	3

Obr. 24a



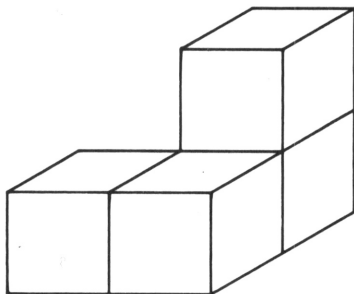
Obr. 24b

Peter tvrdí, že sa mu podarilo vpísať čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 do tabuľky na obrázku 24b (každé práve raz) tak, že súčet čísel z každých dvoch susedných políčok je prvočíslo. Nina tvrdí, že sa to nedá.

Kto z nich má pravdu? Svoj názor odôvodnite.

Z6 – 1 – 3

Zostrojte z jedinného kusa papiera sieť telesa z obrázku 25, ktoré je zložené zo štyroch zhodných kociek.



Obr. 25

Z6 - I - 4

Janko hovorí: „Naše telefónne číslo je pozoruhodné: 113 113.“ Miško mu odpovedal: „Aj naše telefónne číslo dostaneme tak, že napíšeme dve rovnaké trojciferné čísla za sebou. . .“ Janko ho prerušil: „Ani mi nemusíš hovoriť, aké máte číslo, a aj tak viem, že naše telefónne čísla majú spoločného deliteľa, ktorý je väčší ako 1 000.“

Nájdite tohto deliteľa a vysvetlite, prečo má Janko pravdu.

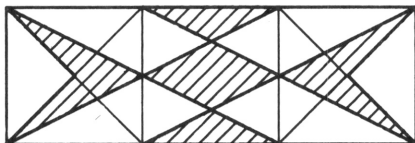
Z6 - I - 5

Za písmená P dosadzte párne číslice (nemusia byť všade rovnaké), za písmená N nepárne číslice (nemusia byť všade rovnaké) tak, aby vznikol pravdivý zápis násobenia. Nájdite aspoň jedno riešenie.

$$\begin{array}{r} P N \\ \cdot \cdot N P \\ \hline N N P \\ P N N \\ \hline P P P P \end{array}$$

Z6 - I - 6

Chodba je pokrytá tmavými a svetlými dlaždicami (obr. 26, str. 78). Je trikrát tak dlhá ako široká. Ktorými dlaždicami pokryli väčšiu plochu? Koľkokrát väčšiu?



Obr. 26

ÚLOHY II. KOLA

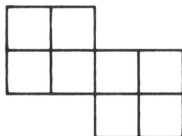
(Riešenia úloh na str. 85)

Z6 - II - 1

Z krajčírskeho metra nám zostal kus dĺžky pol metra. Boli na ňom čísla od 1 do 50. Kde treba tento kus rozstrihnúť na dve časti, aby súčin čísel na jednotlivých častiach končil rovnakým počtom núl? Nájdite všetky riešenia.

Z6 - II - 2

Ak odstrihneme na obrázku 27 vhodné dva štvorce, dostaneme sieť kocky. Nakreslite všetky možnosti.



Obr. 27

Štvorcová záhrada má strany dlhé 31 m. Máme 19 plotových dielov dĺžky 4 m a 16 dielov dĺžky 3 m. Zistite, koľko ktorých dielov treba použiť na oplotenie jednotlivých strán záhrady. Dve oplotenia, ktoré sa líšia len prehodením strán štvorca, alebo prehodením dielov na niektorej strane, považujeme za rovnaké. Nájdite dve rôzne oplotenia záhrady.

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z6-I-1 (str. 75)

Predpokladajme, že sme našli požadovanú časť krajčírskoho metra. Rozložme súčin čísel z tejto časti na prvočinitele. Nuly na konci súčinu čísel z tejto časti metra sú produktom súčinov dvojíc prvočiniteľov 2 a 5. Tri nuly na konci súčinu znamenajú, že v rozklade na prvočinitele musia byť aspoň tri 2 a aspoň tri 5. Teda súčin musí byť násobkom 8 a 125.

Skúsme, či požadovaná časť môže mať dĺžku 2 cm. Z dvoch susedných čísel môže byť najviac jedno deliteľné 5. Jedno z hľadaných čísel by teda muselo byť násobkom 125. Do 150 (možnosti krajčírskoho metra) je to len jediné číslo 125. K nemu susedné sú 124 a 126. Ani jedno z nich

nie je násobkom 8, takže úsek metra splňujúci podmienku úlohy musí byť väčší ako 2 cm.

Nech je dĺžky 3 cm. Z troch čísel idúcich za sebou môže byť najviac jedno násobkom 5, teda musí to byť číslo 125. Číslo 125 nie je násobkom 2, teda súčin druhých dvoch čísel z tejto trojice musí byť násobkom 8. Z možných čísel 123, 124, 126, 127 vyhovuje len dvojica 124, 126. Pre časť metra dĺžky 3 cm už zrejme ďalšie riešenie nie je. Pre dlhšie úseky by sme našli ďalšie „riešenia“, tie však nevyhovujú podmienke, že sú na najmenšej možnej časti krajčírskeho metra.

Riešenie úlohy Z6-I-2 (str. 75)

Uvážme najskôr, ktoré čísla môžu byť susedné (teda také, aby ich súčet bol prvočíslom). Potom

- s číslom 1 môžu susediť čísla 2, 4, 6 a iné nie,
- s číslom 2 môžu susediť čísla 1, 3, 5, 9 a iné nie,
- s číslom 3 môžu susediť čísla 2, 4, 8 a iné nie,
- s číslom 4 môžu susediť čísla 1, 3, 7, 9 a iné nie,
- s číslom 5 môžu susediť čísla 2, 6, 8 a iné nie,
- s číslom 6 môžu susediť čísla 1, 5, 7 a iné nie,
- s číslom 7 môžu susediť čísla 4, 6 a iné nie,
- s číslom 8 môžu susediť čísla 3, 5, 9 a iné nie,
- s číslom 9 môžu susediť čísla 2, 4, 8 a iné nie.

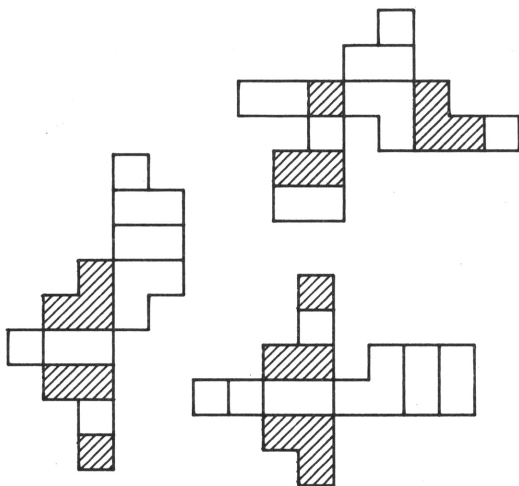
V strede tabuľky musí byť buď číslo 4, alebo číslo 2, pretože len tieto čísla môžu mať štyroch vhodných susedov. Číslo 7, nakoľko môže mať len dvoch susedov, musí byť v rohu tabuľky. Ale potom budú vedľa čísla 7 čísla 4 a 6. Takže číslo 4 nemôže byť v strede. Ale ani číslo 2 nemôže byť v strede,

nakolko by muselo susediť s číslom 4 (dokonca aj s číslom 6). Z toho už priamo plynie, že v strede nemôže byť pri danej podmienke nijaké z daných čísel a teda Petrovi sa nemohlo podariť vpísať do tabuľky čísla požadovaných vlastností.

Pravdu má Nina.

Riešenie úlohy Z6-I-3 (str. 76)

Úloha má veľa riešení. Niektoré sú na obr. 28.



Obr. 28

Riešenie úlohy Z6-I-4 (str. 77)

Každé číslo, ktoré je takto zapísané pomocou dvoch troj-
ciferných čísel, možno zapísať ako trojciferné číslo krát tisíc
plus toto trojciferné číslo. Napríklad:

$$376\ 376 = 376 \cdot 1\ 000 + 376,$$

ale to je rovné $376 \cdot 1\ 001$.

Vo všeobecnosti, každé takéto číslo možno napísať ako

$$A \cdot 1\ 000 + A = A \cdot 1\ 001.$$

Teda každé číslo, ktoré možno v desiatkovej sústave za-
písať dvomi rovnakými trojcifernými číslami za sebou, je
deliteľné číslom 1 001.

Riešenie úlohy Z6-I-5 (str. 77)

Označme párne číslice A, B, C, \dots nepárne a, b, c, \dots
ako na schématu:

$$\begin{array}{r} A\ a \\ \cdot\ b\ B \\ \hline c\ d\ C \\ D\ e\ f \\ \hline E\ F\ G\ H \end{array}$$

Rozdeľme si zapísaný súčin na dve časti I a II.

$$\begin{array}{r} A\ a \\ \cdot\ b\ B \\ \hline c\ d\ C \\ D\ e\ f \\ \hline E\ F\ G\ H \end{array} \quad \text{(I)} \quad \begin{array}{r} A\ a \\ \cdot\ B \\ \hline c\ d\ C \end{array} \quad \text{(II)} \quad \begin{array}{r} A\ a \\ \cdot\ b \\ \hline D\ e\ f \end{array}$$

V súčine I je $A \cdot B$ párne číslo a pritom c, d sú nepárne čísla. Preto súčin $a \cdot B$ musí mať nepárny počet desiatok, z čoho je vidieť, že $a > 1$. Vyskúšame možnosti pre B ; výsledok je v tabuľke:

a	3	5	7	9
B	4, 6	2, 6	2, 8	2, 4, 6, 8

Podobne zo súčiny II dostaneme:

a	3	5	7	9
b	5	3, 7	5	-

Teraz môžeme vyskúšať možnosti:

$$\begin{array}{r} \text{Pre } a = 3 \\ \begin{array}{r} A \ 3 \\ 5 \ 4 \end{array} \qquad \qquad \qquad \begin{array}{r} A \ 3 \\ 5 \ 6 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Pre } a = 5 \\ \begin{array}{r} A \ 5 \\ 3 \ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \ 5 \\ 7 \ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \ 5 \\ 3 \ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \ 5 \\ 7 \ 8 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Pre } a = 7 \\ \begin{array}{r} A \ 7 \\ 5 \ 2 \end{array} \qquad \qquad \qquad \begin{array}{r} A \ 7 \\ 5 \ 8 \end{array} \end{array}$$

Pritom za A postupne dosadzujeme čísla 2, 4, 6, 8. Vyhovujú práve dve riešenia: $83 \cdot 54 = 4482$ a $65 \cdot 72 = 4680$.

Riešenie úlohy Z6-I-6 (str. 77)

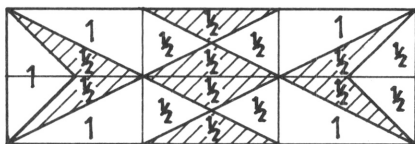
I. spôsob. Chodba sa skladá z troch štvorcov, každý s obsahom S . V každom krajnom štvorci majú pravouhlé svetlé trojuholníky spolu obsah $S/2$ a svetlý rovnoramenný

trojuholník obsah $S/4$. Svetlé trojuholníky v prostrednom štvorci majú spolu obsah $S/2$. Svetlá plocha spolu má obsah

$$\frac{3}{4}S + \frac{1}{2}S + \frac{3}{4}S = 2S.$$

Tmavej časti zostáva plocha obsahu S . Teda biela plocha má dvakrát väčší obsah.

II. spôsob. Rozdeľme si plochu na 2×6 štvorčekov (obr. 29).



Obr. 29

Čísla v obrázku určujú obsahy jednotlivých častí v štvorčekoch. Z toho ľahko zistíme, že tmavé dlaždice zaberajú plochu veľkosti $8 \cdot 0,5 = 4$ štvorčeky a biele dlaždice plochu veľkosti $6 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 = 8$ štvorčekov.

Svetlými dlaždičkami pokryli dvakrát väčšiu plochu ako tmavými.

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

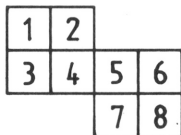
Riešenie úlohy Z6-II-1 (str. 78)

Ak rozložíme súčin $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 50$ na prvočinitele, zistíme, že sa v ňom nachádza 12 pätiok, teda tento súčin sa bude končiť 12 nulami (pozri riešenie úlohy Z6-I-1). Takže súčin jednej časti sa musí končiť 6 nulami, z toho plynie, že v rozklade tejto časti musí byť 6 pätiok (dvojok tam určite bude dosť; prečo?). Ak začneme počítať päťky od 1, tak 6 pätiok napočítame po číslo 25. Teda najbližšie číslo, za ktorým môžeme končiť, je číslo 25. Avšak nakoľko aj ďalšie čísla 26, 27, 28, 29 neobsahujú v rozklade päťku, môžeme končiť aj za nimi. Úloha má teda 5 riešení.

Kus metra možno rozstrihnúť medzi 25. a 26., medzi 26. a 27., medzi 27. a 28., medzi 28. a 29. a medzi 29. a 30. centimetrom.

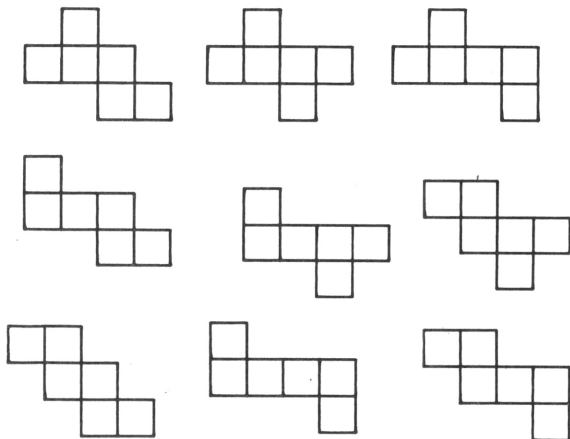
Riešenie úlohy Z6-II-2 (str. 78)

Označme si štvorčky ako na obrázku 30.



Obr. 30

Sieť dostaneme odobratím dvoch štvorčekov tak, že jeden bude z trojice štvorčekov označených na obrázku číslami 1, 2, 3 a druhý bude z trojice štvorčekov označených číslami 6, 7, 8. Všetkých 9 možností je na obrázku 31.



Obr. 31

Riešenie úlohy Z6-II-3 (str. 79)

Potrebuje oplotiť $31 \text{ m} \cdot 4 = 124 \text{ m}$. Spolu máme $19 \cdot 4 \text{ m} + 16 \cdot 3 \text{ m} = 124 \text{ m}$ dielov. Teda musíme použiť všetky diely. Číslo 31 (dĺžka strany záhrady) možno rozložiť

pomocou násobkov 4 a 3 (dĺžky dielov) takto:

$$31 = 1 \cdot 4 + 9 \cdot 3 \quad (\text{A})$$

$$= 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \quad (\text{B})$$

$$= 7 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \quad (\text{C})$$

Máme 19 štvormetrových dielov. Z nich na jednu stranu (podľa predchádzajúcich uvažovaných možností (A), (B), (C)) možno dať 1, 4, alebo 7 kusov. Číslo 19 možno rozložiť pomocou násobkov 1, 4, 7 takto:

$$19 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7$$

$$(\text{A}) \quad (\text{B}) \quad (\text{C})$$

alebo

$$19 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 7$$

$$(\text{B}) \quad (\text{C})$$

(násobky musia byť spolu 4; sú 4 strany štvorca).

Takže strany štvorcovej záhrady môžeme dostať takto:

2krát (C), t.j. 14 štvormetrových a 2 trojmetrové diely

1krát (B), t.j. 4 štvormetrové a 5 trojmetrových dielov

1krát (A), t.j. 1 štvormetrový a 9 trojmetrových dielov

čo je spolu 19 štvormetrových a 16 trojmetrových dielov

alebo takto:

3krát (B), t.j. 12 štvormetrových a 15 trojmetrových dielov

1krát (C), t.j. 7 štvormetrových a 1 trojmetrový diel

čo je spolu 19 štvormetrových a 16 trojmetrových dielov

Úloha má práve dve riešenia.