40. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z7

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Repáš (editor): 40. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 55–68.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404944

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 58)

Z7 – I – 1

Délka hrany dané krychle je v centimetrech vyjádřena celým číslem. Její objem je v centimetrech krychlových šesticiferné číslo, které je násobkem 1 008. Vyjádřete délku hrany této krychle.

Z7 – I – 2

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a bod C, který na ní neleží. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC s vrcholy A, B na kružnici k. Zjistěte, kdy má úloha 0, 1, 2, 3 a více řešení. Své tvrzení odůvodněte.

Z7 – I – 3

Nahraďte hvězdičky číslicemi tak, aby platilo naznačené násobení:

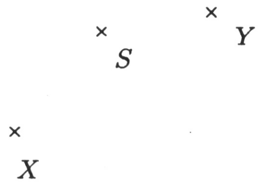
$$
\begin{array}{rrrr}
 & & * & * \\
\cdot & & * & * \\
\hline
 & * & * & * \\
* & * & * & \\
\hline
9 & * & * & *
\end{array}
$$

Z7 – I – 4

Čtyři kamarádi mají kuličky. Každý z nich má o 34 kuliček více, než je pětina kuliček, které mají ostatní dohromady. Kolik kuliček má každý z nich?

Z7 – I – 5

Jsou dány body X, Y, S (obr. 17). Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod X ležel na přímce AB, bod Y na přímce BC a bod S byl střed čtverce.



Obr. 17

Z7 – I – 6

Anička pěstovala 6 různých pokojových květin. Věděla, že květiny je třeba občas hnojit. Jednotlivé květiny potřebovaly tyto dávky hnojiva: 1 dl, 2 dl, 3 dl, 4 dl, 5 dl a 6 dl. Anička si připravila 21 dl hnojiva do větší nádoby. Kromě ní měla dvě odměrky; jednu na 5 dl a druhou na 12 dl. Jak pomocí těchto odměrek může rozdělit jednotlivým květinám potřebné množství hnojiva? (Značky na nádoby se nedají dělat.)

ÚLOHY II. KOLA

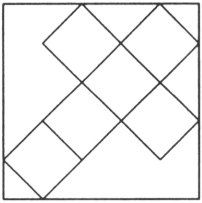
(Řešení úloh na str. 65)

Z7 – II – 1

Velká krychle byla složena z jednotkových krychlí tří barev. Z nich bylo $\frac{13}{72}$ červených a $\frac{25}{48}$ modrých. Zelených krychlí bylo méně než 1 000. Kolik bylo celkem krychlí, kolik bylo červených, kolik modrých a kolik zelených?

Z7 – II – 2

Ze čtverce byl vystřižen kříž tvořící síť krychle (viz obr. 18). Určete procento odpadu.



Obr. 18

Z7 – II – 3

Macecha dala Popelce přebrat pytel čočky smíchané s fazolemi. Hmotnost čočky a fazolí v něm byla v poměru 2 : 3. Maceše se zdálo čočky málo, tak jí přidala ještě 2 kg. Tím se změnil poměr čočky k fazolím na takový, jako předtím byl poměr fazolí k čočce. Kolik kilogramů čočky a kolik kilogramů fazolí měla Popelka přebrat?

Řešení úlohy Z7–I–1 (str. 55)

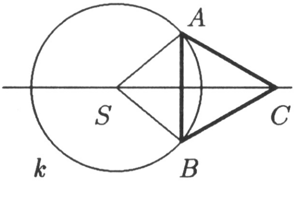
Rozklad čísla 1 008 na součin prvočísel je $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. Nejmenší číslo, které je třetí mocninou přirozeného čísla a současně násobkem 1 008 je $2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^3 = 592\,704$. Toto číslo je navíc šesticiferné, takže objem dané krychle je $592\,704\,\mathrm{cm}^3$ a délka její hrany je rovna 84 cm.

Nejbližší větší třetí mocnina přirozeného čísla k číslu 592 704 je $2^3 \cdot 592\,704 = 4\,741\,632$. Protože toto číslo již není šesticiferné, je nalezené řešení jediným řešením úlohy.

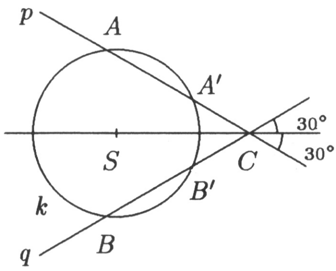
Řešení úlohy Z7–I–2 (str. 55)

Rozbor. Trojúhelníky SAC a SBC jsou shodné podle věty (sss) (obr. 19). Je tedy $|\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle SCB| = 30°$.

Konstrukce. Nejprve sestrojíme přímku SC, pak bodem C vedeme přímky p a q svírající s přímkou SC úhel 30°.



Obr. 19

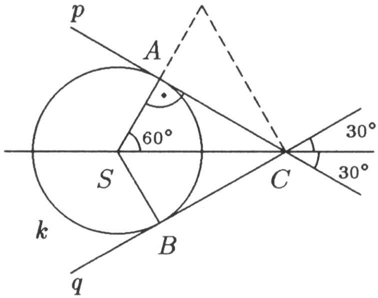


Obr. 20

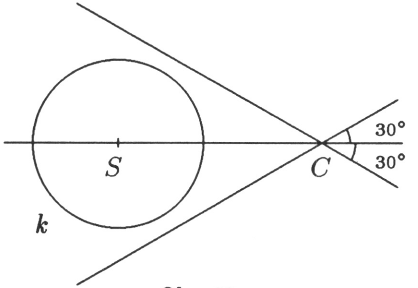
Body A a B jsou ty dvojice průsečíků přímek p a q s kružnicí k, které jsou souměrně sdružené podle přímky SC (obr. 20).

Snadno se můžeme přesvědčit, že všechny takto sestrojené trojúhelníky jsou řešením úlohy. Body A, B leží na kružnici k a trojúhelník ABC je rovnostranný, neboť je rovnoramenný (body A a B jsou souměrně sdružené podle přímky SC) a současně jeho ramena AC a BC svírají úhel 60°. Podle počtu společných bodů přímek p a q s kružnicí k dostáváme různé počty řešení:

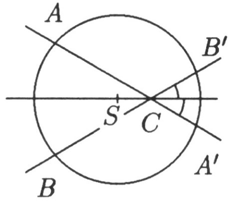
Úloha má jedno řešení, jsou-li přímky p a q tečnami kružnice k. V takovém případě (obr. 21) $|\sphericalangle ASC| = 180° - 90° - 30° = 60°$, takže trojúhelník SAC je polovinou rovnostranného trojúhelníku s výškou AC. Na obrázku je toto doplnění naznačeno a je z něho patrné, že pro tento případ platí $|SC| = 2|SA| = 2r$.



Obr. 21



Obr. 22



Obr. 23

Je-li $|SC| > 2r$, úloha nemá řešení (obr. 22) a v případě $0 < |SC| < 2r$, $|SC| \neq r$ má dvě řešení (obr. 20, 23).

Jestliže $S = C$, má úloha nekonečně mnoho řešení.

Případ, kdy bod C leží na kružnici k, je v zadání úlohy vyloučen (úloha by v takovém případě měla jedno řešení).

Shrneme: Úloha nemá řešení, je-li $|SC| > 2r$.

Úloha má: jedno řešení, je-li $|SC| = 2r$; dvě řešení, je-li $0 < |SC| < 2r$, $|SC| \neq r$; nekonečně mnoho řešení, je-li $|SC| = 0$.

Úloha nikdy nemůže mít 3 řešení.

Poznámka. Úlohu můžeme řešit také pomocí otáčení kružnice k kolem bodu C o úhel $\pm 60°$. Společný bod kružnice k a otočené kružnice různý od bodu C (pokud existuje) je jedním z vrcholů rovnostranného trojúhelníku.

Řešení úlohy Z7–I–3 (str. 55)

Označme neznámá dvojciferná čísla a a b. Musí platit $a \cdot b \geqq 9\,000$. Menší z obou čísel (případně obě, pokud se sobě rovnají), nemůže být menší nebo rovno 90, neboť $90 \cdot 99 < 9\,000$. Obě čísla jsou tedy větší než 90. Uvažujme všechny možnosti pro $a = 91, 92, \ldots, 99$.

Je-li $a = 91$, dostáváme pro b z nerovnice $a \cdot b \geqq 9\,000$ podmínku $b \geqq 9\,000 : 91 = 98{,}90\ldots$. Pro b tak máme jedinou možnost $b = 99$.

Je-li $a = 92$, je $b \geqq 9\,000 : 92 = 97{,}82\ldots$, tj. $b = 98$ nebo $b = 99$.

Podobně obdržíme další řešení. Celkem dostáváme tyto součiny:

$91 \cdot 99 = 9\,009$	$94 \cdot 98 = 9\,212$	$96 \cdot 98 = 9\,408$
	$94 \cdot 99 = 9\,306$	$96 \cdot 99 = 9\,504$
$92 \cdot 98 = 9\,016$		
$92 \cdot 99 = 9\,108$	$95 \cdot 95 = 9\,025$	$97 \cdot 97 = 9\,409$
	$95 \cdot 96 = 9\,120$	$97 \cdot 98 = 9\,506$
$93 \cdot 97 = 9\,021$	$95 \cdot 97 = 9\,215$	$97 \cdot 99 = 9\,603$
$93 \cdot 98 = 9\,114$	$95 \cdot 98 = 9\,300$	
$93 \cdot 99 = 9\,207$	$95 \cdot 99 = 9\,405$	$98 \cdot 98 = 9\,604$
		$98 \cdot 99 = 9\,702$
$94 \cdot 96 = 9\,024$	$96 \cdot 96 = 9\,216$	
$94 \cdot 97 = 9\,118$	$96 \cdot 97 = 9\,312$	$99 \cdot 99 = 9\,801$

Zbývající možnosti pak dostaneme záměnou činitelů. Nakonec nahradíme hvězdičky číslicemi. Přitom vyloučíme násobení

$$\begin{array}{r} 99 \\ \underline{\cdot\ 91} \end{array}$$

neboť v následujícím řádku by bylo pouze dvojciferné číslo.

Řešení úlohy Z7–I–4 (str. 56)

Je zřejmé, že všichni museli mít stejný počet kuliček. Označme x počet kuliček každého z chlapců. Ostatní ka-

kamarádi mají pak $3x$ kuliček, takže podle zadání platí:

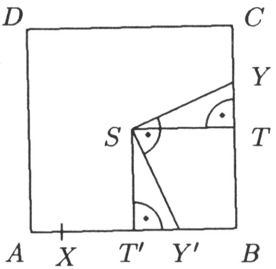
$$x = 34 + \frac{3x}{5}$$

Řešením této rovnice je $x = 85$.

Každý z chlapců měl 85 kuliček.

Řešení úlohy Z7–I–5 (str. 56)

Rozbor. Bodem S veďme přímku kolmou na SY a její průsečík se stranou AB označme Y' (obr. 24).



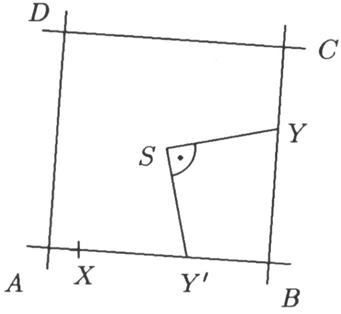
Obr. 24

Ukážeme, že $|SY| = |SY'|$. K tomu si vezmeme na pomoc paty kolmic T a T' spuštěných z bodu S postupně na strany BC a AB. Trojúhelníky STY a $ST'Y'$ jsou shodné podle věty *usu*, neboť $|ST| = |ST'|$, $|\sphericalangle YST| = 90° - |\sphericalangle Y'ST| = |\sphericalangle Y'ST'|$ a $|\sphericalangle STY| = |\sphericalangle ST'Y'| = 90°$. Je tedy $|SY| = |SY'|$.

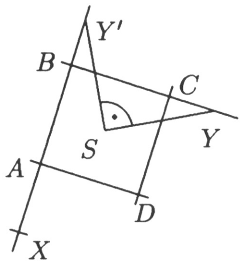
Konstrukce. Nejprve sestrojíme bod Y': Bodem S vedeme kolmici k přímce SY a na této kolmici najdeme bod Y' tak, aby $|SY| = |SY'|$ (existují dva takové body). Z toho co jsme řekli, plyne, že bod Y' musí ležet na přímce AB. Tím již známe vedle bodu X druhý bod ležící na přímce AB. To nám stačí k sestrojení přímky AB. (Musíme se ovšem přesvědčit, že body X a Y' jsou různé a určují tedy přímku. Uvažte, že k tomu, aby bylo $X = Y'$, by musel být úhel XSY pravý a navíc $|XS| = |SY|$. To však není při daném zadání splněno.)

Protože je dán střed čtverce, je po sestrojení jedné z jeho stran snadné konstrukci dokončit. (Proč nemůže ležet střed S čtverce při daném zadání bodů X, Y a S na sestrojené přímce XY'?)

Dvěma možnostem pro sestrojení bodu Y' odpovídají dvě řešení (obr. 25, 26).



Obr. 25



Obr. 26

Poznámky. 1. Řešení úlohy v podstatě obchází pojem otočení, neboť jej žáci sedmých tříd většinou ještě neznají. Užitím otočení o 90° kolem středu S se zdůvodnění zjednoduší: Bod Y' je obrazem bodu Y v tomto otočení, a protože po otočení se čtverec zobrazí na sebe, musí Y' ležet na straně AB.

2. Protože poloha bodů byla zadána, odpadá diskuse počtu řešení. V případě, že by byl $\sphericalangle XSY$ pravý, úloha by měla buď nekonečně mnoho řešení (pro $|SX| = |SY|$), nebo by neměla řešení (pro $|SX| \neq |SY|$).

Řešení úlohy Z7–I–6 (str. 56)

Anička mohla získat potřebné dávky hnojiva postupně např. takto:

3 dl: Odměrku na 12 dl naplní pomocí odměrky na 5 dl deseti decilitry hnojiva. Pak naplní odměrku na 5 dl a doplní z ní odměrku na 12 dl. V menší odměrce jí zůstanou potřebné tři decilitry hnojiva.

1 dl: Zbývajícími 18 dl naplní Anička obě odměrky. V nádobě jí zbude 1 dl na zalití nejskromnější kytičky.

2 dl a 4 dl: 2 dl hnojiva může Anička získat pomocí svých odměrek tak, že naplní odměrku na 12 dl a z ní pomocí menší odměrky odleje 10 dl. To může opakovat třikrát a zalít květiny, které potřebují 2 dl a 4 dl hnojiva.

5 dl a 6 dl: Aničce zůstává 11 dl hnojiva. Menší odměrkou zaleje květinu, která potřebuje 5 dl a pro poslední zbude potřebných 6 dl hnojiva.

Popsané řešení není jediné. Úlohu lze řešit i jiným způsobem.

Návodná úloha. Jak můžeme pomocí daných odměrek zalít jednotlivé kytičky bez ohledu na ostatní (tj. i s vyléváním mimo).

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z7–II–1 (str. 57)

Objem velké krychle je třetí mocninou přirozeného čísla (délky její strany), navíc musí být násobkem 48, protože $\frac{25}{48}$ z tohoto objemu je rovno počtu modrých krychliček.

Nejmenší třetí mocnina přirozeného čísla, která je současně násobkem 48 ($= 2^4 \cdot 3$) je $2^6 \cdot 3^3 = 1\,728$, takže počet všech krychliček musí být násobkem čísla 1 728.

Počet všech krychliček musí být dále dělitelný 72, neboť $\frac{13}{72}$ z nich je červených. Protože 1 728 je již násobkem 72, neplyne odtud žádná další podmínka.

Při celkovém počtu krychliček rovném 1 728 by bylo modrých krychliček $\frac{25}{48} \cdot 1\,728 = 900$, červených $\frac{13}{72} \cdot 1\,728 = 312$ a zelených $1\,728 - 900 - 312 = 516$. Počet zelených krychliček vyšel menší než 1 000, takže jsme dostali řešení úlohy.

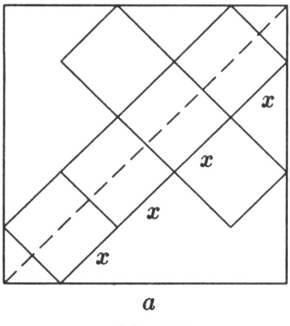
Protože pro další násobky čísla 1 728 bychom pro počet zelených krychliček dostali další násobky 516, tj. již čísla větší než 1 000, je nalezené řešení jediným řešením úlohy.

Odpověď: Celkem bylo 1 728 krychliček. Z toho modrých bylo 900, červených 312 a zelených 516.

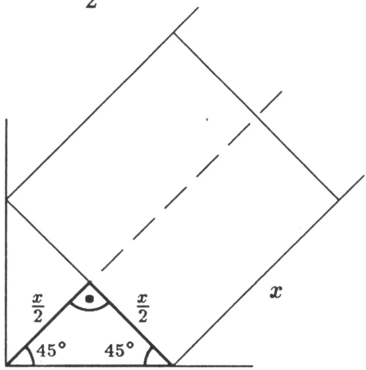
Řešení úlohy Z7–II–2 (str. 57)

1. řešení. Vyjádříme-li délku úhlopříčky čtverce jednak pomocí délky a strany čtverce a jednak pomocí délky x hrany krychle (viz obr. 27 a obr. 28, kde je zobrazen dolní roh čtverce), dostaneme:

$$a\sqrt{2} = \frac{x}{2} + 4x + \frac{x}{2} = 5x$$



Obr. 27



Obr. 28

Odtud nejdříve vypočteme délku hrany krychle

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{5}$$

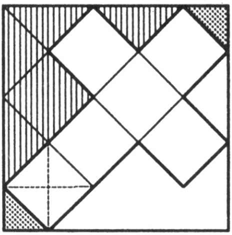
a její povrch S:

$$S = 6x^2 = \frac{12}{25}a^2$$

Nakonec vypočítáme hledané procento odpadu:

$$\frac{a^2 - \frac{12}{25}a^2}{a^2} \cdot 100\,(\%) = 52\,(\%)$$

2. řešení. Zvolme obsah čtverečku v síti za jednotkový. Výpočet obsahu odpadu sledujme na obrázku 29.



Obr. 29

Obsah vyšrafované části je $4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3$. Z naznačeného rozdělení levého dolního čtverečku sítě vidíme, že obsah každé z vytečkovaných částí je $\frac{1}{4}$. Konečně zbývající (nevyznačená) část odpadu je shodná s vyšrafovanou částí, takže celková plocha odpadu je $3 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 = 6{,}5$. Obsah čtverce obdržíme přičtením obsahu sítě. Ten je roven šesti. Odpad tedy tvoří

$$\frac{6{,}5}{6{,}5 + 6} = \frac{6{,}5}{12{,}5} = \frac{13}{25}$$

celku, což je 52 %.

Odpověď. Odpad po vystřižení kříže byl 52 %.

Řešení úlohy Z7–II–3 (str. 57)

1. řešení. Před přidáním čočky byla hmotnost čočky rovna $\frac{2}{3}$ hmotnosti fazolí a po přidání dvou kilogramů $\frac{3}{2}$ hmotnosti fazolí. Přidané 2 kg čočky tedy tvoří $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ hmotnosti fazolí. Fazolí tedy bylo $2\,\mathrm{kg} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5}\,\mathrm{kg} = 2{,}4$ kg a čočky (před přidáním) $\frac{2}{3} \cdot \frac{12}{5}\,\mathrm{kg} = 1{,}6$ kg.

2. řešení (rovnicí). Označíme-li c hmotnost čočky a f hmotnost fazolí, platí:

$$\frac{c}{f} = \frac{2}{3} \qquad \text{a} \qquad \frac{c+2}{f} = \frac{3}{2}\,.$$

Řešením těchto rovnic je $f = 2{,}4$ (kg), $c = 1{,}6$ (kg). Ověřte sami.

Odpověď: Popelka měla původně přebrat 2,4 kg fazolí a 1,6 kg čočky.