41. ročník matematické olympiády na středních školách

33. mezinárodní matematická olympiáda

In: Andrej Blaho (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Moravčík (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 41. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1991/1992. 33. mezinárodní matematická olympiáda. 4. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997. pp. 124–133.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/404963`

33. mezinárodní matematická olympiáda

se konala 10.–21. července 1992 v Moskvě, hlavním městě Ruska. Olympiády se zúčastnilo 322 žáků z 56 zemí a mimo vlastní soutěž ještě dalších 29 studentů z osmi zemí bývalého SSSR. Výsledky jednotlivých zemí, jejichž studenti měli v souhrnu nejvíce bodů, ukazuje následující tabulka:

			ceny		body
1.	ČLR	6			240
2.	USA	3	3		181
3.	Rumunsko	2	2	2	177
4.	Spolčenství nezáv. států	2	3		176
5.	Velká Británie	2	2	2	168
6.	Rusko	2	2	2	158
7.	Německo	0	4	2	149
8.–9.	Maďarsko	1	3	1	142
8.–9.	Japonsko	1	3	1	142
10.–11.	Vietnam	1	2	3	139
10.–11.	Francie	1	3	1	139
12.	Jugoslávie		2	4	136
13.	Československo		2	3	134

I. cenu získalo celkem 26 soutěžících, kteří měli 32–42 bodů, II. cena se udělovala za 24–31 bodů a dostalo ji 55 soutěžících, o III. cenu se s 14–23 body podělili 74 studenti. Celkem tedy bylo rozděleno 155 „medailí“.

Celkově byl z našich nejlepší *Michal Stehlík* následován *Michalem Kubečkem*, *Martinem Niepelem*, *Lubošem Motlem*, *Pavlem Růžičkou* a *Danielem Štefankovičem*. Jejich podrobnější výsledky vidíte v připojené tabulce.

Naše družstvo vedli doc. *Leo Boček* z MFF UK Praha a prof. *Jozef Moravčík* z Vysoké školy dopravní v Žilině.

Umístění		**Body za úlohu**						**Body**	**Cena**
		1	2	3	4	5	6		
27.–31.	Michal Stehlík, 3. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	7	3	7	2	7	5	31	II.
47.–50.	Michal Kubeček, 3. roč. gymnázium Praha, Korunní	7	7	7	1	0	6	28	II.
86.–92.	Martin Niepel, 2. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava	7	3	1	5	0	6	22	III.
93.–99.	Luboš Motl, 4. roč. gymnázia Plzeň, Opavská	5	2	1	7	0	6	21	III.
108.–114.	Pavel Růžička, 4. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	5	0	1	2	7	4	19	III.
156.–169.	Daniel Štefankovič, 3. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava	5	4	0	0	0	4	13	
	Celkem	36	19	17	17	14	31	134	

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Najděte všechna celá čísla a, b, c, pro která je $1 < a < b < c$ a číslo $(a-1)(b-1)(c-1)$ je dělitelem čísla $abc-1$.

(*Nový Zéland*)

2. Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Najděte všechny funkce

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + \left(f(x)\right)^2$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

(*Indie*)

3. V prostoru je dáno 9 bodů, z nichž žádné čtyři neleží v rovině. Každá dvojice těchto bodů je spojena úsečkou a každá tato úsečka může být obarvena modře, nebo červeně, nebo může zůstat neobarvena. Najděte nejmenší hodnotu n tak, aby při libovolném obarvení právě n úseček obsahovala množina obarvených úseček nutně trojúhelník, jehož všechny strany mají stejnou barvu.

(*ČLR*)

4. V rovině je dána kružnice $\mathscr{C}$, přímka $\mathscr{L}$ dotýkající se $\mathscr{C}$ a bod M na přímce $\mathscr{L}$. Najděte množinu všech bodů P následující vlastnosti: Na přímce $\mathscr{L}$ existují body Q, R tak, že M je středem úsečky QR a kružnice $\mathscr{C}$ je trojúhelníku PQR vepsána.

(*Francie*)

5. Nechť (O, x, y, z) je pravoúhlá soustava souřadnic v prostoru a S konečná množina bodů tohoto prostoru. Nechť S_x, S_y, S_z jsou po řadě množiny kolmých průmětů všech bodů množiny S do rovin Oyz, Oxz, Oxy. Dokažte, že

$$|\mathsf{S}|^2 \leqq |\mathsf{S}_x| \cdot |\mathsf{S}_y| \cdot |\mathsf{S}_z|,$$

kde $|\mathsf{A}|$ značí počet prvků konečné množiny A.
Poznámka: Kolmým průmětem bodu do roviny rozumíme patu kolmice vedené tímto bodem na rovinu.

(*Itálie*)

6. Pro každé celé číslo n označme $S(n)$ největší celé číslo, pro které platí: Pro každé kladné celé číslo k, $1 \leqq k \leqq S(n)$, lze číslo n^2 napsat jako součet k druhých mocnin kladných celých čísel.

a) Dokažte, že $S(n) \leqq n^2 - 14$ pro každé $n \geqq 4$.
b) Najděte celé číslo n, pro které je $S(n) = n^2 - 14$.
c) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých čísel n, pro která je $S(n) = n^2 - 14$.

(*Velká Británie*)

Řešení úloh

1. (Podle *M. Niepela* z gymnázia A. Markuša v Bratislavě.) Zřejmě platí implikace

$$m \geqq n > 1 \Rightarrow \frac{m}{m-1} \leqq \frac{n}{n-1}.$$

Jelikož $a \geqq 2$, $b \geqq 3$ a $c \geqq 4$, je

$$\frac{a}{a-1} \leqq 2, \quad \frac{b}{b-1} \leqq \frac{3}{2}, \quad \frac{c}{c-1} \leqq \frac{4}{3},$$

a tedy

$$\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < \frac{abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} \leqq 4.$$

Pro poměr

$$p = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

tedy přicházejí v úvahu pouze hodnoty $p = 1$, $p = 2$ a $p = 3$. Pro $p = 1$ by ale muselo platit $ab + bc + ca = a + b + c$, tj. $a(b-1) + b(c-1) + c(a-1) = 0$, což odporuje daným předpokladům. Budeme tedy řešit v oboru přirozených čísel rovnice

$$\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = 2, \quad \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = 3.$$

Nejdříve první rovnici. Je-li $a \geqq 4$, je $b \geqq 5$, $c \geqq 6$, a tedy

$$2 = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < \frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} \leqq \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = 2,$$

což nejde. Je proto $a < 4$. Protože $abc - 1 = 2(a-1)(b-1)(c-1)$, musí být abc číslo liché, je tedy nutně $a = 3$. Pro b, c pak máme rovnici $3bc - 1 = 4(b-1)(c-1)$ a po úpravě $(b-4)(c-4) = 11$, takže vzhledem k předpokladu $b < c$ je $a = 3$, $b = 5$, $c = 15$ jediné řešení při $p = 2$.

Přejděme k rovnici $abc - 1 = 3(a-1)(b-1)(c-1)$. Kdyby bylo $a \geqq 3$, bylo by $b \geqq 4$, $c \geqq 5$ a $3 < \frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} \leqq 2{,}5$. Je proto nutně $a = 2$, pro b, c pak máme rovnici $3(b-1)(c-1) = 2bc - 1$, po úpravě $(b-3)(c-3) = 5$ s jediným řešením $b = 4$, $c = 8$.

Úloha má právě dvě řešení:

$$(a,b,c) = (3,5,15) \quad \text{a} \quad (a,b,c) = (2,4,8).$$

2. Označme $f(0) = a$. Položíme-li $y = 0$, dostaneme $f(x^2 + a) = \bigl(f(x)\bigr)^2$, položíme-li $x = 0$, dostaneme

$$f\bigl(f(y)\bigr) = y + a^2. \tag{1}$$

Z druhé rovnice vidíme, že f je funkce prostá a zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Kromě toho je $f(a) = a^2$, $f\bigl(f(-a^2)\bigr) = 0$. Je tedy $f(x^2 + a) = \bigl(f(x)\bigr)^2 + f\bigl(f(-a^2)\bigr)$. Aplikujeme-li na obě strany funkci f, dostaneme užitím daného vztahu pro f a (1) rovnost

$$x^2 + a + a^2 = f(-a^2) + (x + a^2)^2,$$

neboli

$$2a^2x = a + a^2 - a^4 - f(-a^2).$$

Jelikož uvedená rovnost platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, je nutně $a = 0$, $f(0) = 0$, a tedy

$$f(x^2) = \bigl(f(x)\bigr)^2, \quad f\bigl(f(x)\bigr) = x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Zvolíme-li pro dané x hodnotu y tak, aby bylo $f(y) = -x^2$, dostaneme z daného vztahu rovnost $f(-x^2) = -f(x^2)$. Funkce f je tedy lichá, zobrazuje kladná čísla na kladná a záporná čísla na záporná.

Předpokládejme, že existuje kladné číslo x tak, že $f(x) \neq x$. Položme $x = z^2$ a předpokládejme, že je například $z^2 - f(z^2) > 0$. Pak je $f\bigl(z^2 - f(z^2)\bigr) = f\bigl(z^2 + f(-z^2)\bigr) = -z^2 + f(z^2) < 0$. To je spor s tím, že obrazem kladného čísla je číslo kladné, podobně dojdeme ke sporu pro $z^2 - f(z^2) < 0$. To znamená, že pro všechna kladná x je $f(x) = x$, a protože f je lichá, platí to i pro x záporná.

Dané funkcionální rovnici vyhovuje pouze funkce $f(x) = x$.

Jiné řešení (*M. Kubeček* z gymnázia v Praze 2, Korunní). Kdyby pro některé $y \in \mathbb{R}$ platilo $y > f(y)$, dostali bychom pro $x = \sqrt{y - f(y)}$ rovnost

$$f\bigl(x^2 + f(y)\bigr) = y + \bigl(f(x)\bigr)^2, \quad \text{tedy} \quad f(y) = y + \bigl(f(x)\bigr)^2,$$

což vede ke sporu. Dále uvažujme nezápornou funkci $g(x) = f(x) - x$, která jak snadno ověříme, splňuje funkcionální rovnici

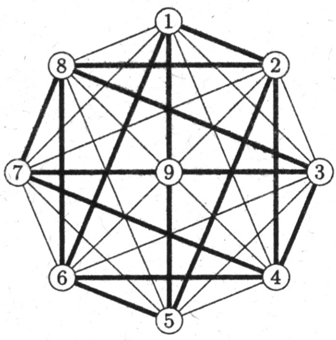
$$g\bigl(x^2 + g(y) + y\bigr) + g(y) = g(x)\bigl(2x + g(x)\bigr).$$

Kdyby byla funkce g kladná, platila by pro všechna reálná x nerovnost $g(x) > -2x$, g by tedy nemohla být omezená. Na druhé straně pro $x = 0$ dostaneme rovnost $g(y)+g\bigl(g(y)+y\bigr) = g^2(0)$, což znamená, že nezáporná funkce g musí být omezená. Proto existuje x_0 tak, že $g(x_0) = 0$. Pak je ale pro každé $y \in \mathbb{R}$ splněna rovnost

$$g\bigl(g(y) + y + x_0^2\bigr) + g(y) = 0,$$

což znamená, že $g(y) = 0$ pro všechna y, tedy $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

3. (Podle *M. Stehlíka* z gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše.) Především je zřejmé, že existence obarvených úseček nijak nezávisí na poloze bodů v prostoru a všechny úvahy budou stejné i pro body v jedné rovině. Na příkladě ukážeme, že lze obarvit 32 úsečky tak, aby nevznikl jednobarevný trojúhelník. Dané body označme 1, 2, 3, ..., 9, přičemž neobarvené zůstanou úsečky 15, 26, 37, 48, červeně obarvíme úsečky 91, 93, 95, 97, 24, 46, 68, 82, 12, 25, 56, 61 a 34, 47, 78, 83, ostatní obarvíme modře (obr. 17, kde 12345678 je pravidelný osmiúhelník a bod 9 je jeho středem).



Obr. 17

Obarvíme-li 33 úsečky, existuje již nutně jednobarevný trojúhelník. Pak jsou totiž pouze 3 úsečky neobarvené, tedy nejvýše ze 6 bodů vychází aspoň jedna neobarvená úsečka. Jinými slovy existují 3 body tak, že všech 8 úseček spojujících libovolný z těchto bodů s každým jiným bodem, je obarvených. Označme tyto body 1, 2, 3 a předpokládejme, že trojúhelník 123 není jednobarevný, jinak bychom byli hotovi. Pak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že úsečky 12, 13 jsou modré a úsečka 23 červená. Dále rozlišíme dva případy:

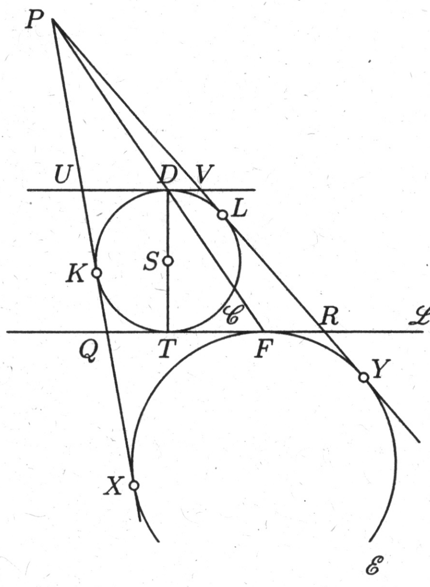
a) Z bodu 1 vede další modrá úsečka do bodu $4 \notin \{2, 3\}$. Pak je buď trojúhelník 423 červený, anebo trojúhelník 413 je modrý.

b) Všechny úsečky vycházející z bodu 1 (kromě úseček 12, 13) jsou červené. Mezi úsečkami spojujícími libovolné dva z bodů $4, 5, \ldots, 9$ jsou právě tři neobarvené, ostatní musejí být obarveny modře, jinak by každá červená úsečka spolu s bodem 1 dala červený trojúhelník. Nyní mohou nastat pouze tyto tři případy:

1. Všechny tři neobarvené úsečky vycházejí z jednoho bodu, pak ale jejich koncové body vytvoří modrý trojúhelník.
2. Dvě neobarvené úsečky vycházejí z téhož bodu, označení zvolíme tak, že to jsou úsečky 45, 46, další neobarvená úsečka je buď úsečka 56, nebo úsečka obsahující jeden z bodů různých od bodů 4, 5, 6, např. 7. Pak bude ale trojúhelník 589 modrý.
3. Žádné dvě neobarvené úsečky nemají společný bod — označení zvolíme tak, že to jsou úsečky 45, 67 a 89, pak však bude trojúhelník 468 modrý.

Tím jsme dokázali, že nejmenší hledané číslo s požadovanou vlastností je $n = 33$.

4. Předpokládejme, že PQR je trojúhelník opsaný kružnici $\mathscr{C}$ (obr. 18), přičemž přímka QR je totožná s přímkou $\mathscr{L}$. Označme T bod dotyku přímky $\mathscr{L}$ a kružnice $\mathscr{C}$, S střed kružnice $\mathscr{C}$ a D bod souměrný s bodem T podle středu S. Průsečíky tečny kružnice $\mathscr{C}$ v bodě D s přímkami PQ, PR označme U, V. Stejnolehlost se středem P zobrazující bod U na bod Q zobrazuje trojúhelník PUV na trojúhelník PQR a kružnici $\mathscr{C}$ na kružnici $\mathscr{E}$, která se dotýká přímky $\mathscr{L}$ v bodě F, který je obrazem bodu D. V uvedené stejnolehlosti se body K, L zobrazí na body X, Y, kde K, L jsou body dotyku kružnice $\mathscr{C}$ a přímek PQ, PR a body X, Y jsou body dotyku těchto přímek a kružnice $\mathscr{E}$. Je tedy $|KX| = |LY|$, tedy $|KQ| + |QX| = |RY| + |RL|$, tj. $|QT| + |QF| = |RF| + |RT|$. Přitom je $|QF| = |QT| + |TF|$, $|RT| = |RF| + |TF|$, takže $|QT| = |RF|$. Proto je bod M středem úsečky QR, právě když je středem úsečky TF, tedy právě



Obr. 18

když $SM \parallel DF$, tj. $SM \parallel PD$. Hledanou množinou je tedy polopřímka s počátečním bodem D rovnoběžná s SM a ležící v polorovině opačné k polorovině UVM (polopřímku bereme ovšem bez bodu D).

5. (Podle *P. Růžičky* z gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše.) Rozdělme množinu S na disjunktní podmnožiny $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2, \ldots, \mathsf{Z}_n$ tak, že do každé množiny Z_i dáme právě ty body množiny S, které mají stejnou souřadnici z. Pro každou množinu Z_i označme x_i počet těch bodů, které jsou průmětem aspoň jednoho bodu množiny Z_i do roviny Oyz, podobně y_i počet těch bodů, které jsou průmětem aspoň jednoho bodu množiny Z_i do roviny Oxz, a a_i označme počet bodů množiny Z_i. Je pak

$$|\mathsf{S}_x| = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad |\mathsf{S}_y| = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad |\mathsf{S}| = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$x_i y_i \geqq a_i$, $|\mathsf{S}_z| \geqq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Proto je

$$\begin{aligned}
|\mathsf{S}_z| \cdot |\mathsf{S}_x| \cdot |\mathsf{S}_y| &\geqq \max_{1 \leqq i \leqq n} a_k \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \geqq \\
&\geqq \max_{1 \leqq i \leqq n} a_k \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i y_i} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\max_{1 \leqq i \leqq n} a_k} \sqrt{x_i y_i} \right)^2 \geqq \\
&\geqq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\max_{1 \leqq i \leqq n} a_k} \cdot \sqrt{a_i} \right)^2 \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = |\mathsf{S}|^2.
\end{aligned}$$

6. (Upraveno podle *Luboše Motla* z gymnázia v Plzni.)

a) K důkazu první části úlohy stačí dokázat, že přirozené číslo n^2 se nedá napsat jako součet $n^2 - 13$ druhých mocnin přirozených čísel. Předpokládejme, že tomu tak je, tj. $n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots + z^2$, kde na pravé straně je $n^2 - 13$ sčítanců. Nejvýše čtyři z nich mohou být větší než 1, protože jinak by byl součet na pravé straně roven aspoň $5 \cdot 4 + (n^2 - 13 - 5) = n^2 + 2 > n^2$. Máme tedy $n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (n^2 - 17) \cdot 1^2$, takže $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 17$. Tato rovnice však nemá řešení v oboru přirozených čísel, což lehce ověříme přímým dosazením čísel 1, 2, 3, 4.

b) Ukážeme, že číslo 13 splňuje podmínky úlohy. Je totiž $13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 8^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2 = 8^2 + 6^2 + 6^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$, takže 13^2 je součtem jednoho, dvou, tří, čtyř, pěti, šesti i sedmi druhých mocnin přirozených čísel. Rozklad $13^2 = 8^2+8^2+4^2+3^2+3^2+2^2+1^2+1^2+1^2$ ukazuje, že 13^2 je také součtem devíti druhých mocnin přirozených čísel. Dále využijeme toho, že každou druhou mocninu $(2b)^2$ sudého čísla můžeme nahradit součtem $b^2 + b^2 + b^2 + b^2$ čtyř druhých mocnin, čímž se počet druhých mocnin v součtu zvýší o tři. Například číslo 8^2 můžeme nahradit součtem $4^2+4^2+4^2+4^2$ a každý sčítanec 4^2 můžeme postupně nahradit součtem $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$, konečně můžeme každý sčítanec 2^2 nahradit součtem $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Tímto způsobem jsme ukázali, že dovedeme číslo 8^2 napsat postupně jako součet 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ..., 64 druhých mocnin přirozených čísel. Podobně 4^2 dovedeme napsat jako součet 4, 7, 10, 13 a 16 druhých mocnin, číslo 2^2 jako součet čtyř druhých mocnin přirozených čísel. Vyjdeme-li tedy z rozkladu $13^2 = 8^2+8^2+4^2+4^2+3^2$ na pět druhých mocnin, dostaneme tak rozklady na součet 8, 11, 14, ... až na $64 + 64 + 16 + 16 + 1 = 161$ druhých mocnin přirozených čísel. Vyjdeme-li z rozkladu $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$, tedy ze součtu sedmi druhých mocnin, můžeme tak dostat rozklad na 10, 13, 16, ... až $64+64+16+16+4+4+1 = 169$ druhých mocnin. Rozkladem součtu $8^2+8^2+4^2+3^2+3^2+2^2+1^2+1^2+1^2$ dostaneme postupně číslo 169 jako součet 12, 15, 18, ... až $64+64+16+1+1+4+1+1+1 = 153$ druhých mocnin přirozených čísel. Poslední rozklad obsahuje 151 jedniček a dvě devítky.

c) Ukážeme, že platí implikace

$$n \geqq 8 \ \wedge\ S(n) = n^2 - 14 \ \Rightarrow\ S(2n) = 4n^2 - 14.$$

Předpokládejme tedy, že se číslo n^2 dá napsat jako k druhých mocnin přirozených čísel pro každé k, $1 \leqq k \leqq n^2-14$. Pak se dá také číslo $(2n)^2$ napsat jako k druhých mocnin přirozených čísel, která budou nyní vesměs sudá. Je-li totiž $n^2 = a^2 + b^2 + \ldots$, je $(2n)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + \ldots$. Nahradíme-li postupně číslo $(2a)^2$ součtem $a^2 + a^2 + a^2 + a^2$, číslo $(2b)^2$ součtem $b^2 + b^2 + b^2 + b^2$, vidíme, že se číslo $(2n)^2$ dá nejen napsat jako součet k, ale i jako součet $k + 3$, $k + 6$, $k + 9$, ..., $k + 3k = 4k$ druhých mocnin přirozených čísel. Jelikož k mohlo nabýt všech hodnot 1, 2, ..., $n^2 - 14$, dostáváme tak rozklad čísla $(2n)^2$ na součet r druhých mocnin přirozených čísel, kde r nabývá hodnot 1, 2, ..., $4n^2 - 62$, $4n^2 - 60$, $4n^2 - 59$ a $4n^2 - 56$. Kromě toho můžeme ale psát $(2n)^2 = 3n^2 + n^2$ a n^2 dovedeme napsat jako k druhých mocnin, $1 \leqq k \leqq n^2 - 14$, takže se dá $(2n)^2$ napsat jako součet $3n^2$ jedniček a k dalších druhých mocnin, tedy celkem jako $3n^2+2$, ..., $4n^2-14$ druhých mocnin přirozených čísel.

Jelikož $3n^2 + 1 \leqq 4n^2 - 62$ pro $n > 8$, je tím dokázáno, že se dá číslo $(2n)^2$ napsat jako součet m druhých mocnin přirozených čísel, kde m je libovolné přirozené číslo splňující podmínku $m \leqq 4n^2 - 14$. Tím jsme dokázali, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n s vlastností $S(n) = n^2 - 14$. Jsou to například všechna čísla tvaru $2^m \cdot 13$, kde m je přirozené číslo.