Přípravná soustředění před 37. MMO

V průběhu 45. ročníku byla uspořádána dvě výběrová soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu. První soustředění, které se konalo v dobře známém internátu při gymnáziu v Jevíčku od 24. do 29. března 1996, bylo zaměřeno na přípravu těch úspěšných řešitelů II. kola kategorie A, kteří se dle dosavadních výsledků jevili jako perspektivní reprezentanti nejen v tomto, ale i v příštím roce (proto při výběru byla dána přednost mladším ročníkům). Z 12 pozvaných studentů se bohužel tři omluvili.

Soustředění bylo zaměřeno na řešení obtížných úloh v omezeném čase (v soutěžních podmínkách). Po odpolední relaxaci byl proveden detailní rozbor opravených řešení. Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Tomáš Brauner	3B G Smetanova 168, Moravský Krumlov	14,5
Jana Flašková	3 Svobodná chebská škola, Cheb	15,5
Jiří Franta	4 G Komenského 402, Příbram	16
David Opěla	4C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	41,5
Zbyněk Pawlas	4C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	20,5
Jan Spěvák	3A G Hellichova, Praha 1	15,5
Oldřich Stražovský	3A G Tř. kpt. Jaroše 14, Brno	11
Jan Štola	3D G Zborovská 45, Praha 5	28
Petr Vodstrčil	4A G nábř. Svobody 306, Polička	27,5

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Karel Horák* (25.3.),
doc. *Jaromír Šimša* (26. a 28.3.),
dr. *Miroslav Engliš* (27.3.),
dr. *Jaroslav Švrček* (29.3.).

Druhé soustředění bylo už určeno pouze vybraným reprezentantům České republiky na 37. MMO v Bombaji včetně náhradníka a konalo se opět v Jevíčku od 9. do 14. června 1996. Výsledky jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Tomáš Bárta	4D G Zborovská 45, Praha 5	93
Michal Beneš	4D G Zborovská 45, Praha 5	100
Daniel Kráľ	4 G Lesní čtvrť 1364, Zlín	89
David Opěla	4C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	100
Jan Spěvák	3A G Hellichova, Praha 1	76
Robert Špalek	4A G tř. kpt. Jaroše 14, Brno	88
Jan Vybíral	3C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	81

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Karel Horák* (10.6.),
dr. *Jaroslav Švrček* (11.6. a 12.6.),
Michal Kubeček (student MFF UK, 13.6. a 14.6.).

Úlohy zadané na přípravných soustředěních

1. Je dán trojúhelník ABC, pro jehož těžnice AM a BN platí, že $|\sphericalangle MAC| = |\sphericalangle NBC| = 30°$. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnostranný.

2. Základnou pravidelného jehlanu je mnohoúhelník s lichým počtem stran. Dokážete hranám daného jehlanu (každé hraně jeden) přiřadit orientaci tak, aby součet odpovídajících vektorů o velikosti délek hran byl nulový?

3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Body P, Q a R mají tu vlastnost, že paty kolmic z nich spuštěných na strany trojúhelníku ABC leží vesměs uvnitř těchto stran. Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR není větší než obsah trojúhelníku ABC.

4. Je dán čtverec rozdělený čtvercovou sítí na čtverečky 1×1. V uvedeném čtverci je dáno několik obdélníků, jejichž každá strana leží v přímkách dané sítě (uvnitř nebo na hranici daného čtverce). Může se stát, že každou stranou jednotkového čtverce dané čtvercové sítě prochází lichý počet stran daných obdélníků?

5. Je dán čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém platí $|AB| = |AD|$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 90°$. Na stranách BC a CD jsou dány body F, resp. E tak, že $DF \perp AE$. Dokažte, že je $AF \perp BE$.

6. Je dán čtyřstěn, jehož tělesové výšky se protínají v jednom bodě. Dokažte, že tento průsečík výšek, pata jedné z výšek a tři body dělící zbývající tři výšky v poměru $2:1$ od vrcholu leží na jedné kulové ploše.

7. Uvažujme konvexní mnohoúhelník, který má všechny vnitřní úhly shodné. Potom alespoň pro dvě jeho strany platí, že jejich délka není větší než délky sousedních stran. Dokažte.

8. Osa úhlu BAC protne stranu BC trojúhelníku ABC v bodě K. Přímka jdoucí bodem K rovnoběžně se stranou AC protne těžnici z vrcholu A v bodě L. Dokažte, že $AK \perp CL$.

9. Dokažte, že v každé společnosti S třiceti lidí se najdou dva lidé, kteří mají v S sudý počet (všech) společných známých. (Vztah „být známý" je symetrický, mezi sudá čísla patří i nula.)

10. Nechť $S(n) = 1^1 + 2^2 + \ldots + n^n$. Dokažte, že nerovnost

$$\frac{1}{n^n} > \frac{1}{S(n)} + \frac{1}{S(n+1)} + \ldots + \frac{1}{S(n+k)}$$

platí pro libovolná celá čísla $n > 1$ a $k \geqq 0$. (Můžete bez dokazování využít poznatek, že posloupnost čísel $(1 + \frac{1}{n})^n$, kde $n = 1, 2, \ldots$, je rostoucí.)

11. Z malé Fermatovy věty plyne, že pro každé prvočíslo $p > 3$ je rozdíl $3^{p-1} - 2^{p-1}$ dělitelný číslem p. Dokažte, že číslo n dělí rozdíl $3^{n-1} - 2^{n-1}$ i pro nekonečně mnoho složených čísel n.

12. Do kružnice se středem O a poloměrem 1 je vepsán trojúhelník ABC. Označme r_1, r_2, r_3 vzdálenosti bodu O od přímek AB, BC, CA. Zjistěte, jaké největší hodnoty může nabýt součin $r_1 r_2 r_3$.

13. Dokažte, že na kružnici se středem v počátku a poloměrem $10^{10^{10}}$ leží aspoň 10^{10} bodů s celočíselnými souřadnicemi.

14. Dokažte, že existuje takové reálné číslo A, pro něž lze do grafu funkce $y = A \sin x$ vepsat alespoň 1 988 navzájem neshodných čtverců. (Vepsaný čtverec je takový, jehož všechny vrcholy leží na grafu.)

15. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Zjistěte, ve kterých bodech X dosahuje funkce

$$f(X) = |XA| + |XB| - |XC|$$

svého minima.

16. Dokažte, že každé celé nezáporné číslo lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru

$$\frac{(x+y)^2+3x+y}{2},$$

kde x, y jsou celá nezáporná čísla.

17. Dokažte, že čísla $1\,996^n$ a $1\,996^n+2^n$ $(n \geqq 1)$ začínají vždy stejným dvojčíslím.

18. Je dán mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že pro žádná navzájem různá celá čísla a, b, c nemůže současně platit $P(a)=b$, $P(b)=c$ a $P(c)=a$.

19. V rovině je dáno n bodů A_i $(1 \leqq i \leqq n)$, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Vybarveno je n různých úseček A_iA_j, jež jsou označeny u_1, u_2, …, u_n. Přitom pro libovolné dva indexy $i \neq j$ platí: úsečka A_iA_j je vybarvena, právě když úsečky u_i a u_j mají společný krajní bod. Dokažte, že z každého bodu A_i vycházejí právě dvě obarvené úsečky.

20. Nechť $F(x)=x^2+x+1$. Dokažte, že součin $F(1)F(2)\cdot\ldots\cdot F(n)$ není celým násobkem čísla $F(n+1)$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel n.

21. Pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$a^4+b^4+c^4+a^2bc+b^2ac+c^2ab \geqq 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).$$

22. Do kružnice se středem O je vepsán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ tak, že průsečík M jeho úhlopříček s bodem O nesplývá. Přímka vedená bodem M kolmo k úsečce OM protíná úsečku AB v bodě P a úsečku CD v bodě Q. Dokažte, že úsečky AB a CD jsou shodné, právě když jsou shodné úsečky BP a CQ.

23. Dva rovnostranné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ mají společný střed stran BC a $B'C'$. Určete poměr $|AA'|:|BB'|$.

24. Jsou dána reálná čísla a, b, c $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolnou trojici reálných čísel x, y, z platí

$$af(xy+z^2)+bf(yz+x^2)+cf(zx+y^2)=0.$$

25. Z pravidelného desetiúhelníku $ABCDEFGHIJ$ o straně délky 1 je přímkou p oddělen trojúhelník APQ tak, že platí $|PA|+|AQ|=1$. Určete součet velikostí úhlů, pod kterými vidíme úsečku PQ z bodů B, C, D, E, F, G, H, I a J.

26. Nechť $Q(x) = x^3 + 19x^2 + 96x + a$, kde a je přirozené číslo, a p je dané prvočíslo. Dokažte, že mezi přirozenými čísly $Q(0), Q(1), \ldots, Q(p-1)$ existují nejvýše tři, která jsou dělitelná p.

27. V rovině jsou dány tři různé body A, B a C. Bodem C prochází přímka q tak, že součin vzdáleností bodů A a B od přímky q je co největší. Rozhodněte, zda je přímka q pro libovolnou trojici bodů A, B a C jednoznačně určena. Proveďte konstrukci přímky q.

28. Dokažte, že aritmetický průměr čísel $n \sin n^\circ$ $(n = 2, 4, 6, \ldots, 180)$ je $\operatorname{cotg} 1^\circ$.

29. Pro každou neprázdnou množinu S reálných čísel označme $\sigma(\mathsf{S})$ součet jejích prvků. Pro danou množinu A obsahující n kladných čísel uvažujme všechny možné součty $\sigma(\mathsf{S})$, kde S probíhá neprázdné podmnožiny množiny A. Dokažte, že tyto součty mohou být rozděleny do n tříd tak, že v každé z nich je podíl největšího a nejmenšího součtu nejvýše 2.

30. Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že (v rovině trojúhelníku ABC) existuje přímka ℓ, pro niž má průnik vnitřku trojúhelníku ABC a vnitřku jeho obrazu $A'B'C'$ v osové souměrnosti podle přímky ℓ obsah rovný aspoň $2/3$ obsahu daného trojúhelníku ABC.

31. Konečnou posloupnost $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n prvcích, jejímiž členy jsou jen 0 nebo 1, nazveme *binární posloupnost délky* n. Označme a_n počet binárních posloupností délky n, jež neobsahují trojici za sebou jdoucích čísel 0, 1, 0, a b_n označme počet binárních posloupností délky n, jež neobsahují čtveřici za sebou jdoucích čísel 0, 0, 1, 1 nebo 1, 1, 0, 0. Dokažte, že $b_{n+1} = 2a_n$ pro všechna přirozená n.

32. Je dán trojúhelník ABC, uvnitř kterého existuje takový bod P, že $|\sphericalangle PAB| = 10^\circ$, $|\sphericalangle PBA| = 20^\circ$, $|\sphericalangle PCA| = 30^\circ$ a $|\sphericalangle PAC| = 40^\circ$. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný.

33. Zjistěte, zda existuje podmnožina X množiny přirozených čísel taková, že pro každé celé číslo n má rovnice $a + 2b = n$ právě jedno řešení $a, b \in \mathsf{X}$.

34. Nechť x, y, z jsou kladná čísla vyhovující podmínkám

$$\frac{1}{3} \leqq xy + yz + zx \leqq 3.$$

Určete, jakých hodnot nabývá výraz a) xyz, b) $x + y + z$.

35. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, BCD, CDA, DAB jsou vrcholy pravoúhelníku. Dokažte.

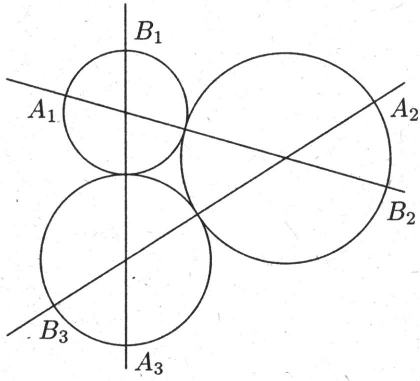
36. Dokažte, že rovnice

$$x^x = y^3 + z^3$$

má nekonečně mnoho řešení v oboru přirozených čísel.

37. V rovině jsou dány tři kružnice, které se navzájem vně dotýkají. Přímky, které procházejí vždy dvěma středy uvažovaných kružnic, protínají tyto kružnice v bodech A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 (obr. 34). Dokažte, že pro libovolný bod X roviny platí

$$|A_1X|^2 + |A_2X|^2 + |A_3X|^2 = |B_1X|^2 + |B_2X|^2 + |B_3X|^2.$$



Obr. 34

38. Jestliže nezáporná čísla a, b, c, p, q, r splňují podmínky

$$a + b + c = p + q + r, \qquad p, q, r \leqq \frac{1}{2},$$

dokažte, že platí $8abc \leqq pa + qb + rc$, a rozhodněte, kdy nastane rovnost.

39. Dokažte, že existuje trojúhelník o stranách a, b, c, právě když platí

$$pa^2 + qb^2 > pqc^2,$$

kde p, q jsou libovolná reálná čísla taková, že $p + q = 1$.

40. Kružnice k_1 a k_2 mají vnější dotyk v bodě T a obě se zevnitř dotýkají třetí kružnice k. Jedna ze společných vnějších tečen kružnic k_1 a k_2 protíná kružnici k v bodech B a C. Jejich společná tečna procházející bodem T protíná v polorovině BCT kružnici k v bodě A. Dokažte, že bod T je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

41. Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \alpha x &= |y - z| + y, \\ \alpha y &= |z - x| + z, \\ \alpha z &= |x - y| + x, \end{aligned}$$

kde α je reálný parametr.

42. Dokažte, že součet velikostí šesti úhlů, pod kterými jsou vidět jednotlivé hrany daného čtyřstěnu z jeho libovolného vnitřního bodu, je větší než $540°$.

43. Dokažte, že ke každé dvojici přirozených čísel n, k existuje $R(n,k)$ tak, že máme-li úplný graf stupně $R(n,k)$ obarvený k barvami, lze v něm najít úplný jednobarevný podgraf stupně n.

44. Množina M v rovině má tu vlastnost, že každé její tři body lze pokrýt (uzavřeným) kruhem o průměru 1. Dokažte, že celou M lze pokrýt kruhem o průměru 1.

45. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány délky jeho těžnic.

46. Nalezněte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} ax + by &= -7, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= -37, \\ ax^4 + by^4 &= 83. \end{aligned}$$

47. Dokažte, že pro nekonečně mnoho různých n je součet

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$$

složené číslo.

48. Dokažte, že číslo $\left[(\sqrt{2}+1)^n\right]$ je sudé, právě když n je liché ($[x]$ označuje celou část čísla x).

49. Mějme konečný systém $\mathscr{A}$ konečných množin. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) existuje prostá funkce $f\colon \mathscr{A} \to \bigcup \mathscr{A}$;

(ii) pro každý podsystém $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ platí $|\mathscr{B}| \leqq \left|\bigcup \mathscr{B}\right|$.

50. Zjistěte, jaké největší hodnoty může nabývat výraz

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\alpha) + \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\beta) + \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\gamma)},$$

jsou-li α, β, γ úhly v trojúhelníku.

51. Nalezněte neprohrávající strategii pro následující variantu piškvorek: vyhrává pět značek v řadě nebo sloupci (ne na diagonále).