45. ročník matematické olympiády na středních školách

2. československé střetnutí

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Richard Kollár (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 45. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1995/1996. 37. mezinárodní matematická olympiáda. 8. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997. pp. 134–139.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405003

2. československé střetnutí

Žilina, 2.–5. júna 1996

Po minuloročnej premiére v Jevíčku v Českej republike sa v tomto ročníku MO konala medzištátna súťaž medzi družstvami mladých matematikov po prvýkrát na Slovensku. Celé stretnutie prebiehalo v priestoroch SOU chemického v Žiline. Organizáciu zabezpečoval doc. RNDr. *Vojtech Bálint*, CSc., z VŠDS v Žiline.

Úlohou tejto súťaže nie je len porovnanie síl zúčastnených družstiev, prípadne príprava na MMO, jej cieľom je najmä spoznanie sa najlepších riešiteľov olympiád z dvoch tradíciami spriaznených krajín. Nakoľko medzi súťažiacimi nie je žiadna jazyková bariéra, celá organizácia podujatia je oproti iným medzinárodným súťažiam značne zjednodušená. Preto nie je potrebné prekladať zadania či riešenia do iných jazykov. Po rozdelení bývalého spoločného štátu Čechov a Slovákov sa mnoho kontaktov prerušilo. Môže nás tešiť, že matematickú olympiádu tento vývoj nepostihol a okrem spoločných úloh a spolupráce pri zabezpečovaní MO pretrvávajú kontakty nielen medzi vedeniami olympiád (predovšetkým Úlohová komisia MO), ale aj medzi riešiteľmi.

Por.	Meno	Ročník, škola	body	Súčet
1.–2.	Michal Beneš	4 G Zborovská, Praha	7 4 7 7 7 7	39
	Ivan Cimrák	4 G V. Okružná, Žilina	7 4 7 7 7 7	39
3.–5.	Miroslav Dudík	3 G Trebišov	7 4 7 7 7 7	38
	Vladimír Marko	3 GJH, Bratislava	3 7 7 7 7 6	38
	David Opěla	4 GMK, Bílovec	5 5 7 7 7 7	38
6.	Tomáš Bárta	4 G Zborovská, Praha	7 4 7 7 4 7	36
7.	Daniel Kráľ	4 G Zlín	7 4 7 7 3 7	35
8.–10.	Eugen Kováč	4 G Stropkov	7 5 7 7 1 7	34
	Tamás Varga	4 G Komárno maď.	7 4 7 7 2 7	34
	Robert Špalek	4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	6 7 6 7 1 7	34
11.	Jan Spěvák	3 G Hellichova, Praha	7 0 7 7 1 7	29
12.	Viera Růžičková	2 G V. Okružná, Žilina	4 2 7 0 2 6	21

Opravovanie riešení vždy zabezpečuje domáca strana a na koordinácii hodnotenia sa podieľajú vedúci jednotlivých družstiev. Tento rok nimi boli doc. RNDr. *Vojtech Bálint*, CSc., a *Richard Kollár* zo Slovenska a doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Českej republiky. Potešujúcou skutočnosťou môže byť, že Úlohová komisia MO sa venuje aj tejto súťaži, a tak boli všetky predložené úlohy pôvodné. Boli to najmä úlohy, ktorých náročnosť, alebo tematické zameranie prekračuje možnosti kategórie A. Zoznam súťažiacich aj s výsledkami súťaže je v tabuľke. Rovnako ako v minulom ročníku lepšie obstál tím Českej republiky. Budúci ročník súťaže sa uskutoční v Českej republike.

Texty soutěžních úloh

1. Nechť $\mathbb{Z}^*$ označuje množinu všech celých čísel různých od nuly. Dokažte, že celé číslo $p > 3$ je prvočíslo, právě když pro každou dvojici čísel $a, b \in \mathbb{Z}^*$ právě jedno z čísel

$$N_1 = a + b - 6ab + \frac{p-1}{6}, \qquad N_2 = a + b + 6ab + \frac{p+1}{6}$$

leží v množině $\mathbb{Z}^*$. *(J. Šimša)*

2. Na neprázdné množině M je dána operace $*$, která každé uspořádané dvojici prvků $(a, b) \in \mathsf{M} \times \mathsf{M}$ přiřadí nějaký prvek $c \in \mathsf{M}$, který označujeme $c = a * b$. Uvažujme operace $*$ s vlastností, že vztahy

$$(a * b) * b = a \qquad \text{a} \qquad a * (a * b) = b$$

platí pro libovolné prvky $a, b \in \mathsf{M}$.

a) Dokažte, že každá takováto operace je komutativní, tj. pro všechna $a, b \in \mathsf{M}$ platí rovnost $a * b = b * a$.

b) Na kterých konečných množinách M takováto operace existuje?

(J. Šimša, T. Werner)

3. Pravidelný čtyřboký jehlan má délku hrany podstavy $2a$ a délku boční hrany $a\sqrt{17}$. Uvnitř jehlanu je zvolen bod M. Uvažujme pět jehlanů podobných danému, které mají hlavní vrchol v bodě M a jejichž podstavy leží v rovinách stěn daného jehlanu. Dokažte, že součet povrchů těchto jehlanů je větší nebo rovný jedné pětině povrchu daného jehlanu. Kde je potřeba zvolit bod M, aby nastala rovnost? *(P. Leischner)*

4. Nechť $\mathbb{Z}$ označuje množinu všech celých čísel. Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taková, že pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots, 1996$ a pro každé $m \in \mathbb{Z}$ má rovnice $f(x) + k \cdot x = m$ aspoň jedno řešení x v oboru celých čísel. *(J. Šimša)*

5. Na přímce jsou dány dvě množiny intervalů A a B. Množina A obsahuje $2m-1$ intervalů, kde $m \in \mathbb{N}$, přičemž žádné dva intervaly z A nejsou disjunktní, nemají společný jen krajní bod, a každý interval z A obsahuje aspoň dva disjunktní intervaly z B. Dokažte, že v B lze najít interval, který patří aspoň m intervalům z A. *(P. Hliněný)*

6. Uvnitř stran AC a BC trojúhelníku ABC jsou po řadě zvoleny body E a D. Označme F průsečík přímek AD a BE. Dokažte, že podíl obsahů trojúhelníků ABC a ABF splňuje vztah

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{|AC|}{|AE|} + \frac{|BC|}{|BD|} - 1.$$

(P. Leischner)

Řešení úloh

1. Keď je výraz N_1 nulový, dostaneme zo zadania rovnosť $p = (6a-1)(6b-1)$. Podobne, ak je nulový výraz N_2, dostaneme rovnosť $p = -(6a+1)(6b+1)$.

Najprv dokážeme prvú časť ekvivalencie. Nech je $p > 3$ prvočíslo. Rozlíšime dva prípady $p \equiv 1 \pmod 6$ a $p \equiv -1 \pmod 6$ (iný prípad zrejme nemôže nastať). V prvom z nich zrejme $N_2 \notin \mathbb{Z}^*$. Predpokladajme, že pre niektorú dvojicu $a, b \in \mathbb{Z}^*$ platí aj $N_1 \notin \mathbb{Z}^*$, čiže $N_1 = 0$. To je však zrejme možné, len ak je jedno z čísel $|6a-1|$ alebo $|6b-1|$ rovné 1 (inak by p nebolo prvočíslom). Preto by muselo byť jedno z čísel a, b rovné nule, čo však nie je možné. Obdobne dostaneme spor aj v prípade $p \equiv -1 \pmod 6$.

Teraz predpokladajme, že $p > 3$ nie je prvočíslo. Okrem prípadov $p \equiv \pm 1 \pmod 6$ nemôžeme dostať ani N_1, ani N_2 celé. Potom však majú všetky delitele čísla p tvar $6k \pm 1$. Číslo p má teda aspoň jeden z možných rozkladov:

$$p = (6c+1)(6d+1), \quad p = (6c-1)(6d-1), \quad p = (6c+1)(6d-1),$$

kde c a d sú prirodzené čísla. V prvom prípade N_2 nie je celé a pre $a = -c$ a $b = -d$ dostávame $N_1 = 0$, v druhom prípade opäť N_2 nie je celé a $N_1 = 0$ pre $a = c$ a $b = d$. Napokon v treťom prípade N_1 nie je celé a pre $a = c$ a $b = -d$ dostávame $N_2 = 0$.

V každom prípade sme našli dvojicu čísel $a, b \in \mathbb{Z}^*$, pre ktorú nie je žiadne z čísel N_1, N_2 z množiny $\mathbb{Z}^*$.

2. a) Podľa prvej identity v zadaní platí $[a*(a*b)]*(a*b) = a$. Výraz v hranatej zátvorke je ale podľa druhej identity v zadaní rovný prvku b, čiže platí $b * (a * b) = a$, a teda $b * a = b * [b * (a * b)]$. Pretože posledný výraz je podľa druhej identity v zadaní rovný $a * b$, platí $b * a = a * b$ a dôkaz komutativity je hotový.

b) Prvky ľubovoľnej n-prvkovej množiny označíme číslami $1, 2, \dots, n$ a definujeme $a * b = c$, práve keď $n \mid (a + b + c)$. Táto definícia je korektná (t.j. pre každú dvojicu (a, b) existuje práve jeden taký prvok c) a má okamžitý dôsledok: ak platí $a * b = c$, potom $c * b = a$ a $a * c = b$. Preto operácia $*$ s požadovanou vlastnosťou existuje na každej konečnej množine.

3. Všimnime si, že obsah podstavy aj bočnej steny daného ihlana je rovnaký $S_1 = 4a^2$. Spojnice bodu M s vrcholmi ihlana rozdelia ihlan na štyri štvorsteny a jeden štvorboký ihlan. Všetky tieto telesá majú spoločný vrchol M. Súčet ich objemov je objem daného ihlana. Ak označíme v_i $(i = 1, \dots, 5)$ výšky týchto telies z bodu M, potom

$$\frac{1}{3} S_1 \sum_{i=1}^{5} v_i = \frac{1}{3} S_1 v,$$

z čoho vyplýva, že $\sum\limits_{i=1}^{5} v_i = v$, kde v je výška daného ihlana. Teraz si uvedomme, že tieto výšky sú zároveň aj výškami piatich ihlanov podobných danému zo zadania. Je teda

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{v_i}{v} = 1 = \sum_{i=1}^{5} k_i = \sum_{i=1}^{5} \sqrt{\frac{S_i}{S}},$$

pričom S je povrch daného ihlana, S_i sú povrchy piatich vzniknutých ihlanov a k_i sú ich koeficienty podobnosti s daným ihlanom. Z toho ďalej vyplýva, že $\sum\limits_{i=1}^{5} \sqrt{S_i} = \sqrt{S}$, čo po umocnení dáva

$$S = \sum_{i=1}^{5} S_i + \sum_{1 \leqq i < j \leqq 5} 2\sqrt{S_i S_j}.$$

Ak ďalej použijeme AG-nerovnosť, čiže $2\sqrt{S_iS_j} \leqq S_i + S_j$, dostaneme

$$S \leqq \sum_{i=1}^{5} S_i + 4\sum_{i=1}^{5} S_i = 5\sum_{i=1}^{5} S_i.$$

Teda $\sum\limits_{i=1}^{5} S_i \geqq \dfrac{1}{5}S$. Rovnosť nastáva, len keď sú všetky ihlany zhodné. Potom je však M stredom gule vpísanej danému ihlanu.

4. Dokážeme, že hľadaná funkcia existuje. Po krátkej úvahe možno nahliadnuť, že stačí nájsť jednoznačné (injektívne) priradenie $(k,m) \mapsto x$ a potom definovať $f(x) = m - kx$. Zrejme potom už bude funkcia f spĺňať zadané podmienky.

Položme $d = 1\,996 + 1 = 1\,997$. Podľa vety o delení celých čísel možno každé číslo $x \in \mathbb{Z}$ zapísať jediným spôsobom v tvare $x = md + k$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Na základe tohoto vyjadrenia (s pevným d) položme $f(x) = m - kx$, t.j. $f(md+k) = m - k(md+k)$. Potom každá rovnica $f(x) + kx = m$ má riešenie (nie nutne jediné) $x = md + k$.

5. Označme intervaly v množine A ako $\alpha_i = \langle a_i, b_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, 2m-1$; indexy môžeme zrejme voliť tak, aby platilo

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_{2m-1}. \tag{1}$$

Nech ďalej b_k, $k \in \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$, je najmenšie z čísel b_m, $b_{m+1}, \ldots, b_{2m-1}$. Podľa zadania obsahuje interval $\alpha_k \in$ A dva disjunktné intervaly z množiny B. Označme ich $\beta_1 = \langle c_1, d_1 \rangle$ a $\beta_2 = \langle c_2, d_2 \rangle$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že

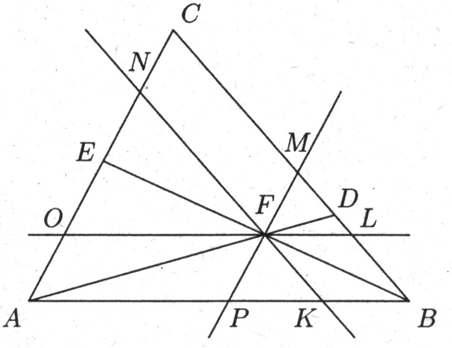
$$a_k \leqq c_1 < d_1 < c_2 < d_2 \leqq b_k. \tag{2}$$

Teraz rozlíšime nasledujúce prípady:

1) $d_1 \leqq b_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$. Potom ale z (1) aj $\beta_1 \subset \alpha_i$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, m$, a teda β_1 má požadovanú vlastnosť.
2) $d_1 > b_s$ pre nejaké $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Vďaka (2) aj $c_2 > b_s$. Pretože podľa zadania majú každé dva intervaly z A spoločný bod, platí zároveň $b_s \geqq a_i$ pre všetky i, a teda $c_2 > a_i$ pre všetky i. Napokon z definície b_k je $b_k \leqq b_i$ pre $i \in \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$. Celkom teda platí $a_i < c_2 < d_2 \leqq b_k \leqq b_i$, pre každé $i \in \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$, čiže $\beta_2 \subset \alpha_i$ pre všetky $i \in \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$. Interval β_2 má potom požadovanú vlastnosť.

   Tým je dôkaz ukončený.

6. Veďme bodom F rovnobežky so stranami trojuholníka ABC a ich priesečníky s týmito stranami označme K, L, M, N, O, P (obr. 35).



Obr. 35

Ak ďalej označíme v_C, v_F vzdialenosti bodov C, F od priamky AB, potom

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{v_C}{v_F} = \frac{|BC|}{|FK|}. \tag{3}$$

Keď teraz použijeme podobnosť trojuholníkov FLM, PKF a rovnoľahlosť úsečiek PM a AC so stredom v B (bod F sa v tejto rovnoľahlosti zobrazí na bod E), dostaneme (rovnoľahlosť zachováva pomery dĺžok úsečiek)

$$\frac{|LM|}{|FK|} = \frac{|FM|}{|FP|} = \frac{|EC|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AE|} - 1. \tag{4}$$

Ďalej platí obdobne

$$\frac{|MC|}{|FK|} = \frac{|FN|}{|FK|} = \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|BD|} - 1 \tag{5}$$

a podľa (3)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{|BC|}{|FK|} = \frac{|BL| + |LM| + |MC|}{|FK|}.$$

Do poslednej rovnosti dosadíme $|BL| = |FK|$ a dĺžky $|LM|$, $|CM|$ vyjadrené zo (4) a (5). Tak dostaneme zadaný vzťah.