Mezinárodní střetnutí česko-slovensko-polské

BÍLOVEC, 14.–15. ČERVNA 2001

V rámci přípravy na 42. MMO se uskutečnilo již sedmé tradiční střetnutí českého a slovenského reprezentačního výběru. Tentokrát se poprvé soutěže zúčastnilo i polské reprezentační družstvo.

Soutěž se uskutečnila v termínu 14. – 16. 6. 2001 na půdě Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci. Všechna zúčastněná družstva dorazila do místa konání soutěže již ve středu 13. června. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků. Soutěžící tedy (podobně jako na MMO) řešili ve dvou soutěžních dnech (14. a 15. června) po třech úlohách. Za každou z nich mohli získat nejvýše 7 bodů, celkově tedy maximálně 42 body. Na jejich řešení měli žáci každý soutěžní den rezervováno (stejně jako na MMO) 4,5 hodiny čistého času.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.–2.	Michał Adamaszek	POL	7 7 7 7 7 3	38
	Karol Cwalina	POL	7 7 5 5 7 7	38
3.	Katarína Quittnerová	SVK	7 7 2 7 7 7	37
4.–6.	Radovan Bauer	SVK	7 7 7 7 2 4	34
	Jan Kynčl	CZE	7 2 7 7 7 4	34
	Jarosław Wrona	POL	7 7 6 5 6 3	34
7.–9.	*Jaroslav Hájek*	CZE	7 7 2 7 7 1	31
	Roman Łomowski	POL	7 7 0 7 7 3	31
	Paweł Walter	POL	6 5 6 5 6 3	31
10.–11.	Jana Szolgayová	SVK	7 7 7 6 2 0	29
	Martin Tancer	CZE	7 4 7 7 1 3	29
12.	Tomáš Kulich	SVK	3 4 7 7 6 0	27
13.–14.	Peter Bella	SVK	3 7 5 1 4 4	24
	Aleksander ZabŁocki	POL	7 3 2 6 6 0	24
15.	*Jan Herman*	CZE	0 4 0 7 7 3	21
16.	Robert Lukoťka	SVK	0 1 1 7 7 3	19
17.	*Tomáš Protivínský*	CZE	1 2 2 6 2 3	16
18.	*Ondřej Suchý*	CZE	0 0 2 7 1 1	11

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili členové úlohové komise z České republiky — dr. *Jaroslav Švrček* a doc. *Jaromír Šimša*. Úlohy koordinovala mezinárodní komise ve složení Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Pavel Calábek za Českou republiku, Eugen Kováč a Juraj Földes za Slovensko a Marcin Kuczma, Józef Kalinowski a Rafał Łochowski za Polsko. Jak je vidět z připojené tabulky, nejlépe si v 7. ročníku soutěže vedl polský reprezentační výběr. Celkové výsledky také naznačily, že od našich olympioniků nelze za necelý měsíc na 42. MMO bohužel očekávat výraznější úspěch. Tato prognóza se skutečně potvrdila.

V příštím roce se uskuteční 8. mezinárodní střetnutí MO (CZE – POL – SVK) na základě pozvání polského družstva počátkem června v horském příhraničním středisku Zwardoń.

Texty soutěžních úloh

1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqq 2$) platí nerovnost

$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1)\ldots(a_n^3 + 1) \geqq (a_1^2 a_2 + 1)(a_2^2 a_3 + 1)\ldots(a_n^2 a_1 + 1).$$

2. Trojúhelník ABC má ostré vnitřní úhly při vrcholech A a B. Nad stranami AC a BC jsou trojúhelníku vně připsány rovnoramenné trojúhelníky ACD a BCE se základnami AC a BC tak, že $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|$ a současně $|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BAC|$. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že délka lomené čáry DSE je rovna obvodu trojúhelníku ABC, právě když je úhel ACB pravý.

3. Pro libovolná přirozená čísla n, k splňující podmínku $\frac{1}{2}n < k \leqq \frac{2}{3}n$ najděte nejmenší počet polí, která lze obsadit na čtvercové šachovnici $n \times n$ tak, aby v žádném řádku ani v žádném sloupci šachovnice neexistovalo k volných (tj. neobsazených) sousedních polí.

4. V rovině jsou dány body A, B ($A \neq B$). V této rovině uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vlastností: Uvnitř jeho stran BC, CA existují po řadě body D, E, pro něž platí

(i) $\dfrac{|BD|}{|BC|} = \dfrac{|CE|}{|CA|} = \dfrac{1}{3}$;

(ii) body A, B, D, E leží (v tomto pořadí) na téže kružnici.

Určete množinu průsečíků přímek AD a BE pro všechny trojúhelníky ABC s danou vlastností.

5. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující rovnici

$$f(x^2 + y) + f\big(f(x) - y\big) = 2f\big(f(x)\big) + 2y^2$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

6. V prostoru je dána kartézská soustava souřadnic. Každý bod s celočíselnými souřadnicemi nazveme *mřížovým*. Obarvěme 2 000 mřížových bodů modře a jiných 2 000 mřížových bodů červeně tak, aby žádné dvě modročervené úsečky neměly společný vnitřní bod. (Úsečku nazýváme modročervenou, pokud je jeden její krajní bod obarven modře a druhý červeně.) Uvažujme nejmenší kvádr s hranami rovnoběžnými s osami souřadnic, který obsahuje všechny obarvené body.

a) Dokažte, že kvádr obsahuje alespoň 500 000 mřížových bodů.

b) Udejte příklad popsaného obarvení, kdy uvažovaný kvádr obsahuje nejvýše 8 000 000 mřížových bodů.

Řešení úloh

1. Tvrzení dokážeme užitím principu matematické indukce vzhledem k přirozenému číslu n.

(i) Pro $n = 2$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
(a_1^3 + 1)\,(a_2^3 + 1) &\geqq (a_1^2 a_2 + 1)\,(a_2^2 a_1 + 1)\,,\\
a_1^3 a_2^3 + a_1^3 + a_2^3 + 1 &\geqq a_1^3 a_2^3 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + 1,\\
a_1^2(a_1 - a_2) + a_2^2(a_2 - a_1) &\geqq 0,\\
(a_1^2 - a_2^2)(a_1 - a_2) &\geqq 0,\\
(a_1 - a_2)^2(a_1 + a_2) &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost zřejmě platí pro libovolná kladná čísla a_1, a_2. Protože všechny použité úpravy byly ekvivalentní, platí i daná nerovnost pro $n = 2$.

(ii) Předpokládejme nyní, že nerovnost z textu úlohy platí pro určité $n \geqq 2$. Dokážeme platnost nerovnosti i pro $n + 1$. Nerovnost

$$\begin{aligned}
&(a_1^3 + 1) \ldots (a_n^3 + 1)\,(a_{n+1}^3 + 1) \geqq\\
&\qquad \geqq (a_1^2 a_2 + 1) \ldots (a_n^2 a_{n+1} + 1)\,(a_{n+1}^2 a_1 + 1)
\end{aligned}$$

bude (za uvedeného předpokladu) platit, bude-li splněna podmínka

$$a_{n+1}^3 + 1 \geqq \frac{(a_n^2 a_{n+1} + 1)\,(a_{n+1}^2 a_1 + 1)}{a_n^2 a_1 + 1}.$$

Pomocí ekvivalentních úprav zjistíme, kdy je uvedená podmínka splněna. Postupně tak obdržíme

$$
\begin{aligned}
\left(a_{n+1}^3+1\right)\left(a_n^2 a_1+1\right) &\geqq \left(a_n^2 a_{n+1}+1\right)\left(a_{n+1}^2 a_1+1\right), \\
a_{n+1}^3 a_n^2 a_1 + a_n^2 a_1 + a_{n+1}^3 + 1 &\geqq a_{n+1}^3 a_n^2 a_1 + a_{n+1} a_n^2 + a_{n+1}^2 a_1 + 1, \\
a_n^2(a_1 - a_{n+1}) + a_{n+1}^2(a_{n+1} - a_1) &\geqq 0, \\
(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

Poslední nerovnost obecně neplatí. Zadaná nerovnost je však cyklická, tj. nezmění se, jestliže n-tici kladných čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zaměníme libovolnou z n-tic

$$(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1),\ (a_3, a_4, \ldots, a_n, a_1, a_2),\ \ldots,\ (a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}).$$

Lze tudíž danou $(n+1)$-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ předem cyklicky pozměnit tak, aby číslo a_{n+1} bylo maximální ze všech $n+1$ čísel a_i. Potom jsou obě čísla $a_{n+1} - a_1$ a $a_{n+1} - a_n$ nezáporná, a proto platí i poslední nerovnost.

Tím je důkaz nerovnosti matematickou indukcí ukončen.

2. Uvažujme obvyklé označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, r nechť značí poloměr jeho opsané kružnice. Dále nechť G je střed strany AC a D' bod souměrně sdružený s bodem D podle osy AC. Protože $|\sphericalangle AD'C| = |\sphericalangle ABC|$, leží bod D' na kružnici opsané trojúhelníku ABC, tj. $|SD'| = r$, a tudíž $|GD| = |GD'| = |SG| + r$.

Odtud dostaneme $|SD| = |SG| + |GD| = 2|SG| + r = r(2\cos\beta + 1)$. Analogicky $|SE| = r(2\cos\alpha + 1)$. Délka lomené čáry DSE je tedy

$$|SD| + |SE| = 2r(\cos\alpha + \cos\beta + 1),$$

zatímco obvod trojúhelníku ABC je $2r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

Zjistíme dále, za jakých podmínek platí rovnost

$$\cos\alpha + \cos\beta + 1 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Tu postupně upravíme následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma, \\
\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right),
\end{aligned}
$$

tj.

$$\left(\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0.$$

Je-li $\gamma = 90°$, je poslední rovnost splněna. Je-li však $\gamma \neq 90°$, lze rovnost upravit ekvivalentně na tvar $\cos\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, což je však ve sporu s odhady

$$\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}<2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

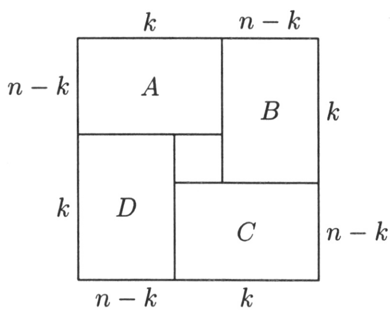
(pro ostré úhly α, β totiž zřejmě platí $|\frac{1}{2}(\alpha-\beta)| < \frac{1}{4}\pi$).

Tím je důkaz ukončen.

3. Ukážeme, že hledaný nejmenší počet polí je roven číslu $4(n-k)$. Čísla n, k splňující podmínku z textu zadání budou v celém textu pevná; každé obsazení několika polí šachovnice $n \times n$ s požadovanou vlastností nazveme „dobrým“. (Dobré je například obsazení všech n^2 polí.)

Popišme nejdříve dobré obsazení $4(n-k)$ polí. Jednotlivé řádky šachovnice označme postupně čísly $i = 0, 1, \dots, n-1$, stejně tak sloupce čísly $j = 0, 1, \dots, n-1$ a obsaďme právě ta pole, jejichž souřadnice (i, j) splňují $i + j \equiv k - 1 \pmod{k}$. Toto obsazení je zřejmě dobré a je tvořeno jednak k poli, pro která $i + j = k - 1$, jednak $2n - 2k$ poli, pro která $i + j = 2k - 1$, a konečně $2n - 3k$ poli, pro která $i + j = 3k - 1$ (v případě $k = \frac{2}{3}n$ pole třetího druhu chybí, tehdy ovšem $2n - 3k = 0$), což je celkem $k + (2n - 2k) + (2n - 3k) = 4(n - k)$ polí.

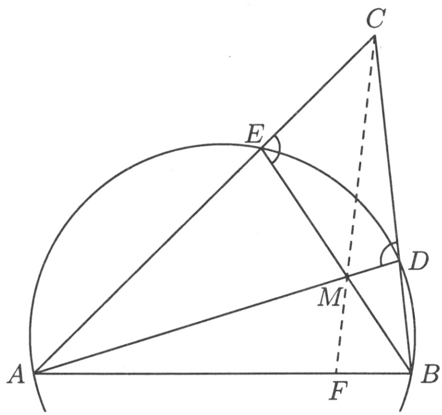
V druhé části řešení ukážeme, že každé dobré obsazení je tvořeno alespoň $4(n-k)$ poli. K tomuto účelu vyčleníme na dané šachovnici $n \times n$ čtyři nepřekrývající se obdélníky A, B, C, D o rozměrech $k \times (n-k)$, jak vidíme na obr. 29.



Obr. 29

Při libovolném dobrém obsazení celé šachovnice musí být obsazeno aspoň jedno pole v každém z $(n-k)$ řádků polí obdélníku A, takže v obdélníku A je celkem obsazeno alespoň $(n-k)$ polí. Obdobnou úvahou o sloupcích v B, řádcích v C a sloupcích v D zjistíme, že rovněž v každém z obdélníků B, C, D je obsazeno alespoň $(n-k)$ polí. Proto je na celé šachovnici obsazeno alespoň $4(n-k)$ polí, což jsme chtěli dokázat.

4. Délky stran uvažovaného trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem a, b, c.



Obr. 30

Vzhledem k tomu, že body A, B, D, E leží na téže kružnici, platí (obr. 30) $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BEC|$. Trojúhelníky ADC a BEC jsou tudíž podobné, z čehož vyplývá

$$\frac{|DC|}{|CA|} = \frac{|CE|}{|CB|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{\frac{2}{3}a}{b} = \frac{\frac{1}{3}b}{a}.$$

Snadnou úpravou odtud dostáváme $b : a = \sqrt{2} : 1$. Vrchol C trojúhelníku ABC dané vlastnosti leží tedy na Apolloniově kružnici k (se středem na přímce AB).

Označme dále M průsečík přímek AD a BE, F průsečík přímky CM se stranou AB a $|AF| = x$. Z Cèvovy věty vyplývá

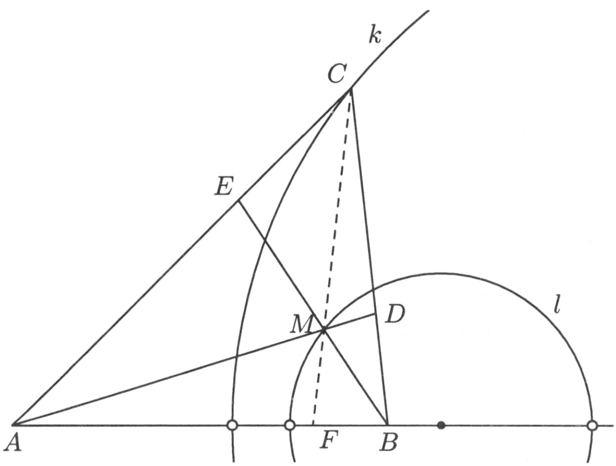
$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{x}{c-x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Z poslední rovnosti již bezprostředně plyne $x = \frac{4}{5}c$, tj. přímka CM protíná stranu AB v pevném vnitřním bodě F, pro který platí $|AF| : |FB| = 4 : 1$.

Užitím Van Aubelovy věty pro *ceviány* AD, BE a CF, které se protínají v bodě M, dostáváme dále

$$\frac{|CM|}{|MF|} = \frac{|CD|}{|DB|} + \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad \text{a tedy} \quad |FM| : |FC| = 2 : 7.$$

Uvažujme nyní stejnolehlost $h(F, \frac{2}{7})$. Ta zobrazuje vrchol C trojúhelníku ABC dané vlastnosti na průsečík M přímek AD a BE a Apolloniovu kružnici k na kružnici l, jejíž střed leží rovněž na přímce AB (obr. 31). Hledaná množina průsečíků M přímek AD a BE leží tedy na kružnici l.



Obr. 31

Ukažme naopak, že ke každému bodu M kružnice l (z níž jsou vyňaty dva body ležící na přímce AB) existuje bod $C \in k$, který je vrcholem trojúhelníku ABC s danou vlastností. Ukažme tedy, že uvnitř jeho stran BC, CA existují po řadě body D, E vyhovující podmínkám (i), (ii). Ke každému bodu M kružnice l existuje bod $C \in k$ tak, že platí $C = h^{-1}(M)$. Uvnitř stran BC, CA trojúhelníku ABC existují po řadě body D, E vyhovující podmínce (i). Ukážeme, že tyto dva body vyhovují také podmínce (ii). Stačí ověřit, že platí $\cos|\sphericalangle ADC| = \cos|\sphericalangle BEC|$. To lze např. využitím kosinové věty pro trojúhelníky ADC a BEC. Zde využijeme vztah $b : a = \sqrt{2} : 1$. Při výpočtu délek úseček AD, resp. BE opět využijeme kosinovou větu v trojúhelníku ABC (a to pro vyjádření $\cos|\sphericalangle BCA|$).

Závěr: Hledanou množinou M průsečíků přímek AD a BE všech trojúhelníků s vlastností danou v textu úlohy je tedy kružnice l, která je obrazem kružnice k ve stejnolehlosti $h(F, \frac{2}{7})$ a z níž jsou vyňaty dva body (jejího průměru) ležící na přímce AB.

5. Ukážeme, že jediné řešení je funkce $f(x) = x^2$. Položme nejprve $y = f(x)$ a dále $y = -x^2$. Porovnáním výsledků, které dostaneme těmito speciálními volbami, dostaneme $|f(x)| = x^2$ a také $f(0) = 0$. Volbou $x = 0$ dále obdržíme $f(y) + f(-y) = 2y^2$. Jak už ale víme, je nutně $f(y) \leqq y^2$ a současně $f(-y) \leqq y^2$. Obě předchozí nerovnosti však přecházejí s ohledem na podmínku $f(y) + f(-y) = 2y^2$ v rovnosti, a to pro každé $y \in \mathbb{R}$.

Zkouškou se přesvědčíme, že řešením dané funkcionální rovnice je funkce $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

6. a) Nejprve nahlédneme, že žádné dvě modročervené úsečky nesmějí mít stejný (orientovaný) směr. V opačném případě by jejich koncové body tvořily vrcholy lichoběžníku (nebo rovnoběžníku) s modročervenými úhlopříčkami majícími společný vnitřní bod (platí to i v případě, kdy čtyřúhelník degeneruje v úsečku).

Dále si uvědomme, že všechny dvojice mřížových bodů v uvažovaném kvádru o rozměrech a, b, c určují nejvýše $8(a+1)(b+1)(c+1)$ směrů.

Je-li totiž uvažovaný kvádr v kartézské souřadné soustavě $Oxyz$ popsán nerovnostmi

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad y_0 \leqq y \leqq y_0 + b, \quad z_0 \leqq z \leqq z_0 + c,$$

je každý zmíněný směr určen vektorem (u, v, w), kde u, v, w jsou celá čísla splňující nerovnosti $|u| \leqq a$, $|v| \leqq b$, $|w| \leqq c$. Všech takových vektorů je právě $(2a+1)(2b+1)(2c+1)$, což je méně než $8(a+1)(b+1)(c+1)$.

Daných 2 000 modrých a 2 000 červených bodů určuje 4 000 000 modročervených úseček, z nichž žádné dvě nemohou mít stejný směr. Je tedy $4\,000\,000 \leqq 8(a+1)(b+1)(c+1)$, neboli $(a+1)(b+1)(c+1) \geqq 500\,000$. Tím jsme hotovi s důkazem části a), neboť $(a+1)(b+1)(c+1)$ je počet mřížových bodů tohoto kvádru.

b) Vezměme kvádr o rozměrech $1\,999 \times 1\,999 \times 1$ s vrcholy v bodech $[0,0,0]$, $[0,0,1]$, $[1\,999,0,0]$, $[0,1\,999,0]$, $[1\,999,0,1]$, $[0,1\,999,1]$,

$[1\,999, 1\,999, 0]$, $[1\,999, 1\,999, 1]$. Modře nyní obarvíme všech 2 000 mřížových bodů na hraně o vrcholech $[0, 0, 0]$ a $[1\,999, 0, 0]$, červeně pak všech 2 000 mřížových bodů na hraně o vrcholech $[0, 0, 1]$ a $[0, 1\,999, 1]$. Protože tyto hrany (na nichž leží modré, resp. červené body) jsou mimoběžné, žádné dvě různé modročervené úsečky nemají společný vnitřní bod. Kvádr přitom obsahuje právě 8 000 000 mřížových bodů.