Přípravná soustředění před 43. MMO

V průběhu 51. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 22. do 26. dubna 2002 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na základě výsledků II. a III. kola na ně bylo pozváno 9 kandidátů na reprezentaci.

Soustředění bylo zaměřeno na řešení obtížných úloh v omezeném čase (v soutěžních podmínkách). Po odpolední relaxaci byl proveden detailní rozbor opravených řešení. Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Jaroslav Hájek	4/4, GMK, Bílovec	88,5
Tomáš Protivínský	4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	84,5
Martin Tancer	4/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	81
Jan Moláček	2/4, GJKT, Hradec Králové	75
Josef Cibulka	4/4, G Praha 1, Štěpánská	69
Vítězslav Kala	2/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	61
Ondřej Kurka	8/8, G Ch. Dopplera, Praha 5	54
Marek Krčál	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	46,5
Pavel Kocourek	1/4, SPŠST, Praha 1, Panská	43,5

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo vybráno šest reprezentantů a jeden náhradník. Stejné družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvem Slovenska, k němuž se od loňska přidalo i družstvo Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Jaroslav Zhouf* (22. 4.),
dr. *Pavel Calábek* (23. 4.),
dr. *Karel Horák* (24. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (25. 4.),
a doc. *Jaromír Šimša* (26. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že

$$f\big(f(n)\big) = n \quad \text{a} \quad f\big(f(n+2)+2\big) = n$$

pro všechny hodnoty celočíselné proměnné n a $f(0) = 1$.

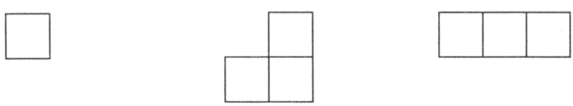
2. Rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB má úhel 80° při vrcholu C. Bod D leží uvnitř tohoto trojúhelníku tak, že velikost úhlu DAB je 10° a velikost úhlu DBA je 20°. Určete velikost úhlu ACD.

3. Nechť n je počet uspořádaných pětic $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ přirozených čísel, která splňují rovnost

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

Je n číslo sudé, nebo liché?

4. Je dána tabulka se 7×7 čtvercovými poli. Dokažte, že lze v tabulce umístit jedno monomino I tak, že ostatních 48 polí nelze pokrýt jedním trominem II a 15 trominy III.



monomino I — tromino II — tromino III

5. Nechť $p(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Posloupnost $x_0, x_1, x_2, \ldots$ je definována následovně:
(i) $x_0 = 0$,
(ii) $x_n = p(x_{n-1})$ pro všechna přirozená n.

Jestliže existuje přirozené číslo n tak, že $x_n = 0$, pak buď $x_1 = 0$, nebo $x_2 = 0$. Dokažte.

6. Pro přirozené číslo x_0 definujme posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ následujícím předpisem:
(i) $y_0 = 4$ a $z_0 = 1$.
(ii) Jestliže x_n je sudé pro $n \geqq 0$, pak $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, $y_{n+1} = 2y_n$ a $z_{n+1} = z_n$.
(iii) Jestliže x_n je liché pro $n \geqq 0$, pak $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}y_n - z_n$, $y_{n+1} = y_n$ a $z_{n+1} = z_n + y_n$.

7. Přirozené číslo x_0 nazveme dobré právě tehdy, když existuje $n \geqq 1$ tak, že $x_n = 0$. Kolik existuje dobrých čísel menších nebo rovných číslu 2 002?

8. Nechť X je konečná množina. Označme $E(X)$ množinu všech podmnožin množiny X, které obsahují sudý počet prvků. Nechť reálná funkce f definovaná na $E(X)$ má následující vlastnosti:

(i) existuje $D \in E(X)$ tak, že $f(D) > 2\,002$,

(ii) pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \in E(X)$ platí $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - 2\,002$.

Dokažte, že X můžeme rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny P a Q takové, že $f(S) > 2\,002$ pro každou neprázdnou množinu $S \in E(P)$ a $f(T) \leqq 2\,002$ pro každou $T \in E(Q)$.

9. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť existují čísla a a b ($0 < a, b < \frac{1}{2}$) tak, že $f\bigl(f(x)\bigr) = af(x) + bx$ pro všechna reálná čísla x. Dokažte, že existuje reálná konstanta k taková, že $f(x) = kx$ pro všechna reálná čísla x.

10. Je dán čtyřstěn $ABCD$, označme E kolmý průmět vrcholu D do roviny ABC. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $C = E$ nebo $CE \parallel AB$;

(ii) pro každý bod M hrany CD platí rovnost

$$S^2(ABM) = \frac{|CM|^2}{|CD|^2} \cdot S^2(ABD) + \left(1 - \frac{|CM|^2}{|CD|^2}\right) S^2(ABC).$$

(Zde $S(XYZ)$ označuje obsah trojúhelníku XYZ.)

11. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho čtveřic (x, y, z, t) přirozených čísel, jejichž největší společný dělitel je 1 a pro něž zároveň platí

$$x^3 + y^3 + z^2 = t^4.$$

12. Nechť $P_1P_2 \ldots P_n$ je konvexní mnohoúhelník v rovině takový, že ke každé dvojici jeho vrcholů P_i, P_j existuje jiný jeho vrchol, ze kterého je úsečku P_iP_j vidět pod úhlem $60°$. Dokažte, že $n = 3$.

13. Určete všechny dvojice (x, y), resp. (u, v) celých čísel, které vyhovují rovnicím

a) $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+2001)^2 = y^2$,

b) $u^3 + (u+1)^3 + (u+2)^3 + \ldots + (u+7)^3 = v^3$.

14. Stranám AC a BC ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou vně připsány pravoúhelníky $ACPQ$ a $BKLC$ o stejném obsahu. Dokažte, že střed úsečky PL, bod C a střed kružnice opsané trojúhelníku ABC leží na téže přímce.

15. Nechť k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Body M, N nechť jsou po řadě středy oblouků BC, CA a X je daným bodem oblouku AB kružnice k. Kružnice opsaná trojúhelníku XS_1S_2, kde S_1, S_2 jsou po řadě středy kružnic vepsaných trojúhelníkům XAC, XBC, se protíná s kružnicí k (kromě bodu X) ještě v dalším bodě P.
a) Dokažte, že trojúhelníky PNS_1 a PMS_2 jsou podobné.
b) Najděte množinu všech bodů P.

16. Určete, kolik pořadí $a_1, a_2, \dots, a_n$ čísel $1, 2, \dots, n$ má tu vlastnost, že pro každý index i $(1 \leqq i \leqq n)$ platí buď $a_i = 1$, nebo $a_i > \min\{a_{i-1}, a_{i+1}\}$, kde a_0 a a_{n+1} značí libovolná čísla větší než (dané) číslo n.

17. Najděte největší reálné číslo p, pro které platí následující tvrzení: Má-li mnohočlen $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tři nezáporné kořeny (počítané s ohledem na jejich násobnost), pak pro každé nezáporné číslo x platí $f(x) \geqq p \cdot (x - a)^3$.

18. Určete největší přirozené číslo N, pro které platí: Je-li na kružnici zvoleno 21 různých bodů, pak alespoň N úseček spojujících zvolené body jsou tětivy se středovým úhlem nejvýše 120°.

19. Určete nejmenší počet polí, které je nutné označit na čtvercové šachovnici 10×10, aby žádná čtyři z neoznačených polí nebyla rohovými poli některé podšachovnice $p \times q$, kde $1 < p \leqq 10$ a $1 < q \leqq 10$.