Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

Žilina, 16.–17. června 2003

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již třetí mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 44. MMO v Tokiu.

Soutěž se uskutečnila v termínu 17.–18. 6. 2003 ve slovenské Žilině. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 15. 6. 2003. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.–3.	Péter Koltai	SVK	7 7 7 7 7 7	42
	Marcin Pilipczuk	POL	7 7 7 7 7 7	42
	Aleksander Zabłocki	POL	7 7 7 7 7 7	42
4.	Paweł Januszewski	POL	7 2 7 7 7 7	37
5.	*Jan Moláček*	CZE	7 2 6 7 7 2	31
6.–9.	Hana Budáčova	SVK	7 7 1 7 7 1	30
	Tomáš Váňa	SVK	7 7 0 7 7 2	30
	Vítězslav Kala	CZE	7 7 7 0 7 2	30
	Pavel Kocourek	CZE	7 7 0 7 7 2	30
10.–11.	Michal Burger	SVK	7 2 0 7 7 6	29
	Kamil Duszenko	POL	7 2 7 7 6 0	29
12.	*Marek Krčál*	CZE	7 2 5 7 7 0	28
13.	Witold Rębacz	POL	7 7 0 7 5 0	26
14.	Jakub Závodný	SVK	7 2 1 7 7 1	25
15.–16.	*Jaromír Kuben*	CZE	7 2 7 0 7 0	23
	Michał Lasoń	POL	7 2 7 0 7 0	23
17.	*Pavel Čížek*	CZE	7 2 6 0 7 0	22
18.	František Simančík	SVK	7 0 0 7 7 0	21

Úlohy pro letošní soutěž vybrali slovenští organizátoři — většinou z úloh, jež prošly společnou česko-slovenskou úlohovou komisí. Jejich koordinaci prováděla mezinárodní jury, kterou tvořili *Rafal Lochowski* a *Paulina Domagalska* z Polska, prof. dr. *Jozef Moravčík* a doc. *Oliver Ralík* ze Slovenska a dr. *Karel Horák* a dr. *Jaroslav Švrček* za Českou republiku. Na zdárném průběhu celé soutěže, která proběhla vesměs na půdě Vysoké školy dopravní v Žilině, má nepřehlédnutelnou zásluhu doc. *Vojtech Bálint*, vedoucí příslušné katedry matematiky.

Texty soutěžních úloh

1. Nechť $n \geqq 2$ je přirozené číslo. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \max\{1, x_1\} &= x_2, \\ \max\{2, x_2\} &= x_3, \\ &\dots \\ \max\{n-1, x_{n-1}\} &= (n-1)x_n, \\ \max\{n, x_n\} &= nx_1. \end{aligned}$$

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž velikost vnitřního úhlu při vrcholu B je větší než 45°. Nechť D, E, F jsou po řadě paty výšek z vrcholů A, B, C a nechť K je takový bod úsečky AF, že platí $|\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle KEF|$. Dokažte, že

a) takový bod K vždy existuje;

b) platí rovnost $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$.

3. Jestliže pro reálná čísla p, q, r z intervalu $\langle \frac{2}{5}, \frac{5}{2} \rangle$ platí $pqr = 1$, pak existují dva trojúhelníky o stejném obsahu, z nichž jeden má strany a, b, c a druhý má strany pa, qb, rc. Dokažte.

4. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P, který leží na těžnici z vrcholu C. Označme X průsečík přímky AP s přímkou BC a Y průsečík přímky BP s přímkou AC. Je-li čtyřúhelník $ABXY$ tětivový, potom je trojúhelník ABC rovnoramenný. Dokažte.

5. Určete všechna přirozená čísla $n \geqq 2$, pro něž jsou všechny binomické koeficienty

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$$

sudá čísla.

6. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují rovnici

$$f\big(f(x) + y\big) = 2x + f\big(f(y) - x\big).$$

Řešení úloh

1. Ukážeme nejprve, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $x_i \leqq i$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $x_i > i$ pro nějaké i.

Je-li $x_1 > 1$, plyne z poslední rovnice dané soustavy nerovnost $\max\{n, x_n\} = nx_1 > n$, takže $x_n > n$. Jestliže dále pro nějaké $i > 1$ je $x_i > i$, pak $\max\{i-1, x_{i-1}\} = (i-1)x_i > (i-1)i > i-1$. Je tedy také $x_{i-1} > i-1$. Odtud plyne, že pokud nerovnost $x_i > i$ platí pro některé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pak platí už pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. V takovém případě má však daná soustava tvar

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = 2x_3, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = (n-1)x_n, \quad x_n = nx_1.$$

Vynásobením těchto rovnic dostaneme $x_1x_2\ldots x_n = n!\,x_1x_2\ldots x_n$, což neplatí pro žádné přirozené $n \geqq 2$. Všechna x_i jsou totiž kladná čísla. To je spor.

Pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je tudíž $x_i \leqq i$. Proto

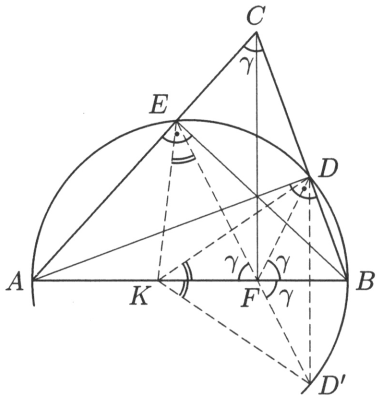
$$i = \max\{i, x_i\} = ix_{i+1}, \qquad \text{kde klademe } x_{n+1} = x_1.$$

Odtud již snadno získáme jediné reálné řešení dané soustavy:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1.$$

2. a) Označme velikosti vnitřních úhlů daného trojúhelníku ABC obvyklým způsobem a uvažujme Thaletovu kružnici sestrojenou nad průměrem BC. Vzhledem k tomu, že trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží paty výšek E, F v polorovině BCA. Z vlastností tětivového čtyřúhelníku $BCEF$ plyne (obr. 36), že je $|\sphericalangle AFE| = \gamma$ a $|\sphericalangle AEF| = \beta$. Podobně z tětivového čtyřúhelníku $AFDC$ plyne, že $|\sphericalangle DFB| = \gamma$. Je-li $K = A$, je $|\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle DAF| = 90° - \beta$ a $|\sphericalangle KEF| = |\sphericalangle AEF| = \beta$.

Jestliže se bod K bude spojitě pohybovat po úsečce AF od bodu A k bodu F, poroste velikost úhlu DKF spojitě od hodnoty $90° - \beta$ k hodnotě γ (v ostroúhlém trojúhelníku je $90° - \beta < \gamma$) a současně bude velikost úhlu KEF spojitě klesat, a to od velikosti $\beta > 90° - \beta$ k hodnotě $0°$. Existuje proto na úsečce AF bod K, pro který platí $|\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle KEF|$.



Obr. 36

b) Nechť D' je obraz bodu D v osové souměrnosti podle přímky AB. Protože $|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle DFB| = \gamma$, leží body E, F a D' na jedné přímce.

Přímka KD' je podle věty o úsekovém úhlu tečnou kružnice k opsané trojúhelníku KFE, neboť $|\sphericalangle D'KF| = |\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle KEF|$. Pro mocnost bodu D' ke kružnici k platí

$$\begin{aligned} |KD'|^2 &= |D'F| \cdot |D'E| = |D'F|(|D'F| + |FE|) = \\ &= |D'F|^2 + |D'F| \cdot |FE|. \end{aligned} \tag{1}$$

Nyní stačí využít rovnosti $|FD| = |D'F|$ a $|KD| = |KD'|$, které plynou ze souměrnosti bodů D a D' podle AB, a mocnost bodu F ke kružnici s průměrem AB, která je

$$|EF| \cdot |FD'| = |AF| \cdot |BF|.$$

Dosazením do (1) tak dostaneme $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$, což jsme chtěli dokázat.

3. Ze zadání úlohy plyne, že některá dvě z čísel p, q, r jsou buď nejvýše rovna 1, anebo jsou aspoň 1. Můžeme je proto označit tak, že nastane jeden z následujících dvou případů:

(i) $p \leqq q \leqq 1 \leqq r$,

(ii) $r \leqq 1 \leqq p \leqq q$.

(i) Položme $a = q$, $b = 1$, $c = pq$, potom platí $pa = pq = c$, $qb = q = a$, $rc = pqr = 1 = b$. Trojúhelníky, jejichž strany mají velikosti a, b, c a pa,

pb, pc, jsou tedy shodné (pokud existují). Ukážeme, že trojúhelník se stranami délek q, 1, pq existuje. Protože $pq \leqq q \leqq 1$, stačí ověřit jedinou trojúhelníkovou nerovnost, a to $pq + q > 1$. Ze vztahů

$$pq = \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad r \leqq \frac{5}{2} \qquad \text{plyne} \qquad pq \geqq \frac{2}{5}.$$

Vzhledem k tomu, že $p \leqq q$, platí rovněž

$$q \geqq \sqrt{\frac{2}{5}} > \frac{3}{5}, \qquad \text{a tedy} \qquad pq + q > 1.$$

(ii) Položme opět $a = q$, $b = 1$, $c = pq$. Ukážeme, že i v tomto případě existuje trojúhelník se stranami délek q, 1, pq. Protože nyní $pq \geqq q \geqq 1$, stačí ověřit nerovnost $pq < q + 1$. Z nerovnosti $p \leqq q$ vyplývá $\sqrt{pq} \leqq q$; stačí proto ověřit silnější nerovnost $pq < \sqrt{pq} + 1$, tj. že $t = \sqrt{pq}$ splňuje kvadratickou nerovnost $t^2 - t - 1 < 0$, neboli že $-\frac{3}{2} < \sqrt{pq} < \frac{5}{2}$. Ze vztahů

$$pq = \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad r \geqq \frac{2}{5} \qquad \text{plyne} \qquad \sqrt{pq} \leqq \sqrt{\frac{5}{2}} < \frac{5}{2},$$

a navíc je $\sqrt{pq} \geqq 1$. Tím je důkaz hotov.

4. Označme délky stran trojúhelníku ABC obvyklým způsobem a, b, c a D střed strany AB. Z mocnosti bodu C ke kružnici opsané čtyřúhelníku $ABXY$ dostaneme $|CA| \cdot |CY| = |CB| \cdot |CX|$, tedy $a \cdot |CX| = b \cdot |CY|$. Z Cèvovy věty pak vyplývá

$$\frac{|AD| \cdot |BX| \cdot |CY|}{|DB| \cdot |XC| \cdot |YA|} = \frac{|BX| \cdot |CY|}{|XC| \cdot |YA|} = 1,$$

takže dosazením $a \cdot |CX| = b \cdot |CY|$ dostáváme dále $a \cdot |BX| = b \cdot |AY|$. Sečtením rovností

$$a \cdot |CX| = b \cdot |CY| \qquad \text{a} \qquad a \cdot |BX| = b \cdot |AY|$$

dostaneme $a^2 = b^2$, neboli $a = b$. Trojúhelník ABC je tedy rovnoramenný.

Jiné řešení. Je-li čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, jsou trojúhelníky ABC a XYC podobné (uu), platí proto $a \cdot |CX| = b \cdot |CY|$.

Označme S_{EFG} obsah trojúhelníku EFG. Pro obsahy trojúhelníků zřejmě platí

$$\frac{S_{APC}}{S_{APY}} = \frac{|AC|}{|AY|} = \frac{b}{|AY|} \quad \text{a} \quad \frac{S_{BPC}}{S_{BPX}} = \frac{|BC|}{|BX|} = \frac{a}{|BX|}.$$

Protože bod P leží na těžnici z vrcholu C trojúhelníku ABC, platí také $S_{APC} = S_{BPC}$, což s oběma předešlými vztahy dává

$$\frac{b}{|AY|} S_{APY} = \frac{a}{|BX|} S_{BPX}.$$

Z rovnosti obvodových úhlů AXB a AYB a dále z rovnosti vrcholových úhlů při vrcholu P plyne podobnost trojúhelníků APY a BPX (uu). Platí tedy $S_{APY} : S_{BPX} = |AY|^2 : |BX|^2$, což ve spojení s předchozím vztahem dává $a \cdot |BX| = b \cdot |AY|$. Dále pokračujeme jako v předešlém řešení.

5. Ukážeme, že podmínkám úlohy vyhovují všechna přirozená čísla n, která jsou mocninami čísla 2, tj. všechna přirozená čísla tvaru $n = 2^m$, kde m je přirozené číslo.

Pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, 2^m - 1\}$ je

$$\binom{2^m}{k} = \frac{2^m \cdot (2^m - 1) \cdot \ldots \cdot (2^m - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}. \tag{1}$$

Libovolné přirozené číslo $r \in \{1, \ldots, k - 1\}$ lze zapsat ve tvaru $2^\alpha l$, kde l je liché číslo a $\alpha < m$ je celé nezáporné číslo. Proto každý ze zlomků

$$\frac{2^m - r}{r} = \frac{2^{m-\alpha} - l}{l}$$

má po zkrácení v čitateli i jmenovateli lichá čísla. Podobně i číslo k lze zapsat ve tvaru $2^\alpha l$, proto zlomek na pravé straně rovnosti

$$\frac{2^m}{k} = \frac{2^{m-\alpha}}{l}$$

má v čitateli sudé a ve jmenovateli liché číslo. Součin všech těchto zlomků pro $r = 1, 2, \ldots, k$ je roven kombinačnímu číslu (1), což je tudíž sudé číslo. Tím jsme dokázali, že každé kombinační číslo tvaru (1) je sudé.

Nechť naopak n není mocninou čísla 2, tj. $n = c \cdot 2^m$, kde $c \geqq 3$ je liché číslo. Ukážeme, že kombinační číslo

$$\binom{c \cdot 2^m}{2^m} = \frac{c \cdot 2^m (c \cdot 2^m - 1) \cdot \ldots \cdot (c \cdot 2^m - 2^m + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2^m} \tag{2}$$

je liché. Podobně jako prve ukážeme, že pro všechna $r \in \{1, 2, \ldots, 2^m - 1\}$ má každý ze zlomků

$$\frac{c \cdot 2^m - r}{r} \qquad \text{a také} \qquad \frac{c \cdot 2^m}{2^m} = c$$

po zkrácení v čitateli i jmenovateli lichá čísla. Součin všech těchto zlomků je roven kombinačnímu číslu (2), které je proto liché.

Dané úloze vyhovují všechna přirozená čísla n, která jsou mocninou čísla 2.

6. Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = x + c$ řešením dané funkcionální rovnice (obě její strany jsou pak rovny $x + y + 2c$). Ukážeme, že jiná řešení daná rovnice nemá.

Nejprve dokážeme, že funkce f je surjektivní. Volbou $y = -f(x)$ v dané rovnici dostaneme

$$f(0) - 2x = f\left(f\big(-f(x)\big) - x\right).$$

Protože každé reálné číslo lze vyjádřit ve tvaru $f(0) - 2x$, existuje pro každé $y \in \mathbb{R}$ takové $z \in \mathbb{R}$, že platí $y = f(z)$. Speciálně pak existuje $a \in \mathbb{R}$, pro něž platí $f(a) = 0$. Volbou $x = a$ v dané funkcionální rovnici dostaneme

$$f(y) = 2a + f\big(f(y) - a\big) \qquad \text{tj.} \qquad f(y) - a = f\big(f(y) - a\big) + a.$$

Protože funkce f je surjektivní, existuje pro každé $x \in \mathbb{R}$ takové $y \in \mathbb{R}$, že $x = f(y) - a$. Odtud plyne, že pro každé x reálné platí $x = f(x) + a$, tj. $f(x) = x - a$.

Tím je úloha vyřešena.