53. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Karel Horák (editor); Jan Kára (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 53. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2003/2004. 45. mezinárodní matematická olympiáda. 16. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. pp. 64–97.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405075

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Určete všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že rovnice $x^2 + px + q = 0$ má řešení v oboru reálných čísel, přičemž platí: Je-li t kořenem této rovnice, je $|2t - 15|$ rovněž jejím kořenem. (*P. Černek*)

A – I – 2

V rovině daného čtverce $KLMN$ určete množinu všech bodů P, pro něž jsou úhly NPK, KPL a LPM shodné. (*J. Švrček*)

A – I – 3

Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova" délky n. Rozdělme je do dvou skupin S_n a L_n podle toho, zda je v daném slově sudý, resp. lichý počet „slabik" BA (za sudý považujeme i počet 0). Například slova $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patří obě do skupiny S_7, slova $AABB\underline{A}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patří obě do skupiny L_7. Určete, pro která n mají skupiny S_n a L_n stejný počet prvků.

(*J. Šimša*)

A – I – 4

Určete nejmenší reálné číslo p takové, že nerovnost

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leqq \frac{1}{2}n(n+p)$$

platí pro každé přirozené číslo n. (*S. Trávníček*)

A – I – 5

Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, jehož vnitřní úhel při vrcholu B má velikost $60°$.

a) Jestliže $|BC| = |CD|$, pak platí $|CD| + |DA| = |AB|$. Dokažte.
b) Rozhodněte, zda platí opačná implikace. (*E. Kováč*)

A – I – 6

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad y^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}, \quad z^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

(*J. Šimša*)

A – S – 1

Nechť $P(x) = ax^2 + bx + c$ je kvadratický trojčlen s nezápornými reálnými koeficienty. Dokažte, že pro libovolné kladné číslo x platí

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \geqq \big(P(1)\big)^2.$$

(*E. Kováč*)

A – S – 2

Určete, jakou největší délku může mít úhlopříčka CE konvexního pětiúhelníku $ABCDE$, jehož strana AB má délku 6 cm, vnitřní úhly při vrcholech C a E jsou pravé a úhel ADB má velikost $120°$. (*P. Černek*)

A – S – 3

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz &= 6(y + z - 2), \\ y^2 + 2zx &= 6(z + x - 2), \\ z^2 + 2xy &= 6(x + y - 2). \end{aligned}$$

(*J. Šimša*)

A – II – 1

Určete počet všech pětimístných palindromů, které jsou dělitelné číslem 37. (Palindromem nazýváme číslo, jehož zápis v desítkové soustavě se čte zepředu stejně jako zezadu.) (*J. Šimša*)

A – II – 2

Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova“ délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani trojici AAA po sobě jdoucích písmen A, ani dvojici BB po sobě jdoucích písmen B. Určete, pro která přirozená čísla n platí, že obě čísla p_n a p_{n+1} jsou sudá. *(R. Kučera)*

A – II – 3

Nechť K je libovolný vnitřní bod strany AB daného trojúhelníku ABC. Přímka CK protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnici opsanou trojúhelníku AKL a k_2 kružnici opsanou trojúhelníku BKL.

a) Dokažte, že přímka AC je tečna kružnice k_1, právě když přímka BC je tečna kružnice k_2.

b) Předpokládejme, že přímka AC je sečna kružnice k_1. Nechť P ($P \neq A$) je průsečík přímky AC s kružnicí k_1 a Q ($Q \neq B$) průsečík přímky BC s kružnicí k_2. Dokažte, že bod K leží na úsečce PQ.

(J. Šimša, J. Zhouf)

A – II – 4

Nechť K, L, M jsou po řadě průsečíky os vnitřních úhlů α, β, γ při vrcholech A, B, C daného trojúhelníku ABC s protějšími stranami BC, CA, AB. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2} \geqq 3.$$

(J. Švrček)

A – III – 1

Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 6 + \min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4},\ y^2 - \frac{8}{y^4},\ z^2 - \frac{8}{z^4}\right\}.$$

(J. Švrček)

A – III – 2

Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova“ délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani čtveřici $AAAA$ po sobě jdoucích písmen A, ani trojici BBB po sobě jdoucích písmen B. Určete hodnotu výrazu

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$

(*R. Kučera*)

A – III – 3

V rovině je dána kružnice k a 121 jejích sečen $p_1, p_2, \ldots, p_{121}$. Uvnitř této kružnice je na každé přímce p_i dán bod A_i. Dokažte, že na kružnici k existuje bod X takový, že úsečka A_iX svírá s přímkou p_i úhel menší než 21° pro nejméně 29 různých indexů i. (*J. Šimša*)

A – III – 4

Zjistěte, pro která přirozená čísla n je součet

$$\frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \ldots + \frac{n}{n!}$$

číslo celé. (*E. Kováč*)

A – III – 5

Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici. (*J. Švrček*)

A – III – 6

Nechť $\mathbb{R}_+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, které pro libovolná kladná čísla x, y splňují rovnost

$$x^2\bigl(f(x) + f(y)\bigr) = (x + y)f\bigl(f(x)y\bigr).$$

(*P. Kaňovský*)

A – I – 1

Nechť t, s jsou reálné kořeny dané kvadratické rovnice. Uvažujme nejprve případ, kdy uvažovaná kvadratická rovnice má dvojnásobný (reálný) kořen. Platí tedy $t = s$ a přitom podle podmínek úlohy $t = |2t - 15|$. Pro $t \geqq \frac{15}{2}$ dostáváme rovnici $t = 2t - 15$ s řešením $t = 15$ a pro $t < \frac{15}{2}$ rovnici $t = -(2t - 15)$ s řešením $t = 5$. Jim odpovídající kvadratické rovnice mají tvar $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 = 0$ a $(x - 15)^2 = x^2 - 30x + 225 = 0$.

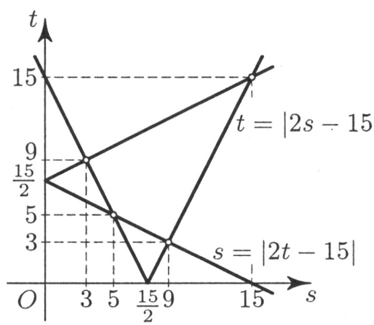
Uvažujme nyní případ, kdy uvažovaná kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny t, s. Rozlišíme tři případy.

▷ $t = |2t - 15|$ a současně $s = |2s - 15|$. Řešení obou rovnic (viz výše) tvoří dvojici $\{t, s\} = \{5, 15\}$. Odpovídající kvadratická rovnice má tvar $(x - 5)(x - 15) = x^2 - 20x + 75 = 0$.

▷ $t = |2s - 15|$ a současně $s = |2t - 15|$. Řešením čtyř soustav rovnic

$$t = \pm(2s - 15), \qquad s = \pm(2t - 15)$$

(jež odpovídají různým volbám znamének) dostaneme dvojice (s, t) rovné $(15, 15)$, $(5, 5)$, $(3, 9)$ a $(9, 3)$, z nichž pouze poslední dvě vyhovují původní soustavě a podmínce $s \neq t$. Dodejme, že soustavu rovnic $t = |2s - 15|$ a $s = |2t - 15|$ lze rovněž řešit graficky v rovině Ost, do které zakreslíme obě lomené čáry $t = |2s - 15|$ a $s = |2t - 15|$ (obr. 25). Dvojicím $(3, 9)$ a $(9, 3)$ odpovídá kvadratická rovnice $(x - 3)(x - 9) = x^2 - 12x + 27 = 0$.



Obr. 25

▷ $t = |2t - 15| = |2s - 15|$. Jak už víme, rovnice $t = |2t - 15|$ má řešení $t = 5$ a $t = 15$. Pro $t = 5$ z rovnice $5 = |2s - 15|$ plyne $s = 5$

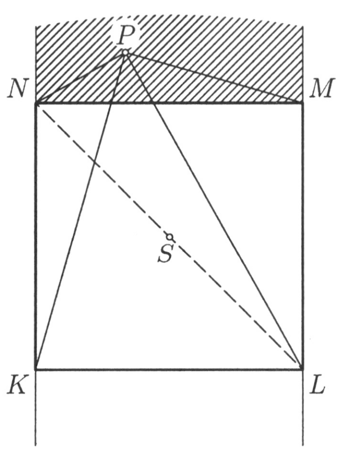
nebo $s = 10$, pro $t = 15$ z rovnice $15 = |2s - 15|$ plyne $s = 0$ nebo $s = 15$. S ohledem na podmínku $s \neq t$ tak dostáváme dvě řešení $(t, s) = (5, 10)$ a $(t, s) = (15, 0)$. Těmto řešením pak odpovídají po řadě dvě kvadratické rovnice $(x - 5)(x - 10) = x^2 - 15x + 50 = 0$ a $(x - 15)x = x^2 - 15x = 0$.

Závěr: Dané úloze vyhovuje šest dvojic (p, q) reálných čísel, a to dvojice $(-10, 25)$, $(-30, 225)$, $(-20, 75)$, $(-12, 27)$, $(-15, 50)$ a $(-15, 0)$.

A – I – 2

Označme P hledanou množinu bodů a S střed čtverce $KLMN$. Zřejmě $S \in$ P (obr. 26).

Dále určíme všechny hledané body P ($P \neq S$), které leží uvnitř pásu omezeného rovnoběžkami KN a LM. Ukážeme, že každý takový bod P leží v polorovině opačné k polorovině MNK. Pro každý bod P uvažovaného pásu, který leží v polorovině opačné k polorovině KLM, platí totiž $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle KPN|$, neboť polopřímka PN leží v úhlu KPL. Podobně zjistíme, že žádný bod čtverce $KLMN$ kromě jeho středu S nemá danou vlastnost.



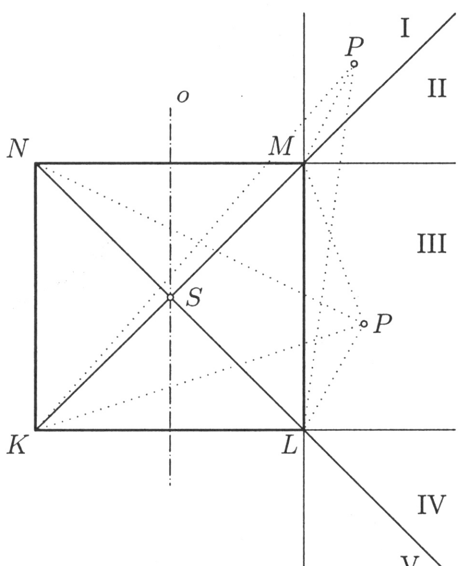
Obr. 26

Leží-li tedy hledaný bod P ve vyšrafované oblasti na obr. 26, jsou přímky PK a PL podle zadání osami úhlů NPL a KPM. Proto v trojúhelníku LPN osa PK úhlu NPL protíná kružnici opsanou tomuto trojúhelníku (kromě bodu P) v bodě ležícím na ose strany NL. Tímto bodem je ovšem vrchol K čtverce $KLMN$. Body P, N, K, L tedy leží na téže kružnici, kterou je kružnice opsaná čtverci $KLMN$. (Analogický výsledek obdržíme, uvažujeme-li osu PL úhlu KPM.) Bod P proto leží na kratším oblouku $l = \widehat{MN}$ kružnice opsané čtverci $KLMN$. Naopak pro každý bod $P \in l$ platí podle věty o obvodových úhlech (pro shodné tětivy NK, KL, LM)

$$|\sphericalangle NPK| = |\sphericalangle KPL| = |\sphericalangle LPM| = 45^\circ.$$

Tím je hledání bodů P v pásu mezi rovnoběžkami KM a LM ukončeno.

Dále snadno nahlédneme, že libovolný vnitřní bod P každé z polopřímek opačných k polopřímkám KM, LN, MK, NL má danou vlastnost. Ukážeme, že žádný další bod roviny čtverce $KLMN$ uvedenou vlastnost nemá. Stačí se přitom díky symetrii omezit na jednu z polorovin vyťatých osou o strany KL daného čtverce. Protože jsme již vyšetřili celý pás omezený rovnoběžkami KN a LM, lze (bez újmy na obecnosti) zkoumat jen body poloroviny opačné k polorovině LMN. Přímky KL, MN, LM, KM a LN dělí tuto polorovinu na pět částí (obr. 27), přitom žádný bod přímek KL, LM a MN danou vlastnost očividně nemá.

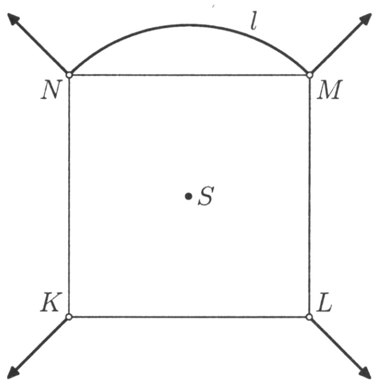


Obr. 27

Ukážeme, že žádný vnitřní bod každé z oblastí I–V roviny čtverce $KLMN$ není prvkem množiny P. Jestliže P je vnitřním bodem oblasti I, evidentně platí $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle LPM|$ (obr. 27). Je-li P vnitřním bodem libovolné z oblastí II nebo III, platí naopak $|\sphericalangle KPL| < |\sphericalangle LPN|$. Pro libovolný vnitřní bod oblasti IV zase platí $|\sphericalangle NPK| > |\sphericalangle KPL|$ a pro libovolný vnitřní bod P oblasti V platí naopak $|\sphericalangle NPK| < |\sphericalangle KPL|$. Ve všech pěti uvažovaných případech jsme se však vždy dostali do rozporu s podmínkami úlohy.

Tím jsme prozkoumali všechny body roviny čtverce $KLMN$.

Závěr: Hledaná množina bodů P se skládá ze všech vnitřních bodů kratšího oblouku MN kružnice opsané danému čtverci $KLMN$, ze všech vnitřních bodů polopřímek opačných k polopřímkám KM, LN, MK a NL a ze středu S daného čtverce (obr. 28).



Obr. 28

A – I – 3

Skupinu S_n rozdělme na dvě části $(SA)_n$ a $(SB)_n$ podle toho, zda slovo skupiny S_n končí písmenem A, resp. B. Skupinu L_n rozdělme analogicky na dvě části $(LA)_n$ a $(LB)_n$ podle toho, zda slovo skupiny L_n končí písmenem A, resp. B. Označme dále s_n, l_n, $(sA)_n$, $(sB)_n$, $(lA)_n$, $(lB)_n$ po řadě počty prvků skupin S_n, L_n, $(SA)_n$, $(SB)_n$, $(LA)_n$, $(LB)_n$. Pro každé přirozené číslo n pak podle našeho rozdělení platí

$$\begin{aligned} s_n &= (sA)_n + (sB)_n, \\ l_n &= (lA)_n + (lB)_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Každé slovo ze skupiny $(SA)_{n+1}$ vznikne tak, že připíšeme písmeno A buď na konec slova ze skupiny $(SA)_n$, nebo na konec slova ze skupiny $(LB)_n$. Platí proto

$$(sA)_{n+1} = (sA)_n + (lB)_n.$$

Analogicky platí rovněž vztahy

$$\begin{aligned}(sB)_{n+1} &= (sA)_n + (sB)_n,\\ (lA)_{n+1} &= (sB)_n + (lA)_n,\\ (lB)_{n+1} &= (lA)_n + (lB)_n.\end{aligned} \tag{2}$$

Pro $n = 1$ mají skupiny následující tvar

$$(SA)_1 = \{A\},\ (SB)_1 = \{B\},\ (LA)_1 = \emptyset,\ (LB)_1 = \emptyset,$$

a tedy $(sA)_1 = (sB)_1 = 1$ a $(lA)_1 = (lB)_1 = 0$.

Předpokládejme, že pro určité přirozené číslo k obsahují skupiny $(SA)_k$ a $(SB)_k$ stejný počet prvků, který označíme p, a zároveň skupiny $(LA)_k$ a $(LB)_k$ mají stejný počet prvků, který označíme q. Navíc předpokládejme, že platí $p \neq q$, jak je tomu v případě $k = 1$, kdy $p = 1$ a $q = 0$. Do následující tabulky zapišme počty prvků ve skupinách pro čísla $n = k, k+1, k+2, k+3, k+4$. Přitom pro výpočty hodnot užijeme vztahy (1) a (2).

n	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$
$(sA)_n$	p	$p+q$	$p+3q$	$2p+6q$	$6p+10q$
$(sB)_n$	p	$2p$	$3p+q$	$4p+4q$	$6p+10q$
$(lA)_n$	q	$p+q$	$3p+q$	$6p+2q$	$10p+6q$
$(lB)_n$	q	$2q$	$p+3q$	$4p+4q$	$10p+6q$
s_n	$2p$	$3p+q$	$4p+4q$	$6p+10q$	$12p+20q$
l_n	$2q$	$p+3q$	$4p+4q$	$10p+6q$	$20p+12q$

Z tabulky lze vyčíst několik poznatků. Protože $p \neq q$, platí rovněž $2p \neq \neq 2q$, $3p+q \neq p+3q$ a $6p+10q \neq 10p+6q$. Vidíme, že $s_k \neq l_k$, $s_{k+1} \neq l_{k+1}$, $s_{k+2} = l_{k+2}$, $s_{k+3} \neq l_{k+3}$ a že skupiny $(SA)_{k+4}$ a $(SB)_{k+4}$ obsahují opět stejný počet prvků a skupiny $(LA)_{k+4}$ a $(LB)_{k+4}$ opět stejný počet prvků, přitom tyto počty jsou navzájem různé.

Užitím matematické indukce usoudíme, že uvedená tabulka má všechny zmíněné vlastnosti pro každé $k = 4m+1$, kde m je celé nezáporné číslo, takže rovnost $s_n = l_n$ platí, právě když $n = k+2 = 4m+3$.

Závěr: Skupiny S_n a L_n mají stejný počet prvků, právě když $n = 4m + 3$, kde m je celé nezáporné číslo.

Jiné řešení. Ze vztahů (1) a (2) plynou pro každé $n \geqq 2$ rovnosti

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= (sA)_{n+1} + (sB)_{n+1} = (sA)_n + (lB)_n + s_n = \\ &= 2s_n + (lB)_n - (sB)_n = 2s_n + l_{n-1} - s_{n-1} = \\ &= 2s_n - 2s_{n-1} + \underbrace{l_{n-1} + s_{n-1}}. \end{aligned}$$

Svorkou označený součet je roven počtu všech slov délky $n - 1$, tedy číslu 2^{n-1}. Znamená to, že posloupnost zkoumaných čísel $\{s_n\}$ splňuje rekurentní rovnici

$$s_{n+1} = 2s_n - 2s_{n-1} + 2^{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

jež (spolu s počátečními hodnotami $s_1 = 0$, $s_2 = 1$) umožňuje postupný výpočet všech hodnot s_n. Podle teorie rekurentních rovnic se dá najít řešení takové úlohy v explicitním tvaru

$$s_n = 2^{n-1} - \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \cos \frac{\pi(n-1)}{4},$$

z něhož plyne, že zkoumaná rovnost $s_n = 2^{n-1}$ nastane právě pro ta čísla n, jež jsou tvaru $4m + 3$. Bez znalosti této teorie se obejdeme takto: vypočteme pomocí (3) několik prvních hodnot s_n a zapíšeme je do tabulky, kam pro porovnání uvedeme i příslušné hodnoty 2^{n-1} a rozdíl $s_n - 2^{n-1}$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
s_n	0	1	4	10	20	36	64	120	240	496	1 024	...
2^{n-1}	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	...
$s_n - 2^{n-1}$	−1	−1	0	2	4	4	0	−8	−16	−16	0	...

Tak přijdeme k hypotéze, že hledaná n jsou tvaru $4m + 3$, a objevíme rovněž vlastnosti diferencí $s_n - 2^{n-1}$ (jsou to až na znaménka mocniny dvou). Pokusíme se proto najít závislost mezi čísly s_{n+4} a s_n. Podle (3) postupně určíme

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= 2s_{n+1} - 2s_n + 2^n, \\ s_{n+3} &= 2s_{n+2} - 2s_{n+1} + 2^{n+1} = 2(2s_{n+1} - 2s_n + 2^n) - 2s_{n+1} + 2^{n+1} = \\ &= 2s_{n+1} - 4s_n + 2^{n+2}, \\ s_{n+4} &= 2s_{n+3} - 2s_{n+2} + 2^{n+2} = \\ &= 2(2s_{n+1} - 4s_n + 2^{n+2}) - 2(2s_{n+1} - 2s_n + 2^n) + 2^{n+2} = \\ &= -4s_n + 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^{n+2} = -4s_n + 2^{n+3} + 2^{n+1}, \end{aligned}$$

neboli

$$s_{n+4} - 2^{n+3} = -4(s_n - 2^{n-1}).$$

Z posledního vztahu okamžitě plyne, že rovnost $s_{n+4} = 2^{n+3}$ platí, právě když $s_n = 2^{n-1}$. Protože z hodnot $n = 1, 2, 3, 4$ poslední rovnost platí pouze pro $n = 3$, je hypotéza o tom, že hledaná n jsou právě čísla tvaru $n = 4m + 3$, dokázána.

A – I – 4

Pro $n = 1$ má daná nerovnost tvar

$$\sqrt{2} \leqq \frac{1}{2}(p+1), \quad \text{neboli} \quad p \geqq 2\sqrt{2} - 1.$$

Označme $p_1 = 2\sqrt{2} - 1$. Zjistili jsme, že žádné číslo p menší než p_1 požadovanou vlastnost nemá. Číslo p_1 je tedy hledané číslo, pokud ukážeme, že pro každé $n \geqq 1$ platí

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leqq \frac{1}{2}n(n+p_1). \tag{1}$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí.

(i) Pro $n = 1$ je nerovnost (1) splněna díky způsobu, jakým jsme číslo p_1 určili.

(ii) Předpokládejme, že nerovnost (1) platí pro určité přirozené číslo n, a ukážeme, že platí i pro přirozené číslo $n + 1$. Nechť tedy

$$\begin{aligned} F(n) = \sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leqq \\ \leqq \frac{1}{2}n(n+p_1). \end{aligned} \tag{2}$$

Protože

$$F(n+1) = F(n) + \sqrt{(n+1)^2+1},$$

platí podle indukčního předpokladu (2) a definice p_1

$$F(n+1) \leqq \frac{1}{2}n\bigl(n + 2\sqrt{2} - 1\bigr) + \sqrt{(n+1)^2+1}. \tag{3}$$

Nyní dokážeme nerovnost

$$\frac{1}{2}n\bigl(n+2\sqrt{2}-1\bigr) + \sqrt{(n+1)^2+1} \leqq \frac{1}{2}(n+1)\bigl(n+1+2\sqrt{2}-1\bigr). \tag{4}$$

Její úpravou dostaneme nerovnost s ní ekvivalentní

$$\sqrt{(n+1)^2+1} \leqq n+\sqrt{2},$$

o jejíž platnosti se snadno přesvědčíme po umocnění obou stran na druhou:

$$\left(n+\sqrt{2}\right)^2 = n^2 + 2\sqrt{2}n + 2 > n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1.$$

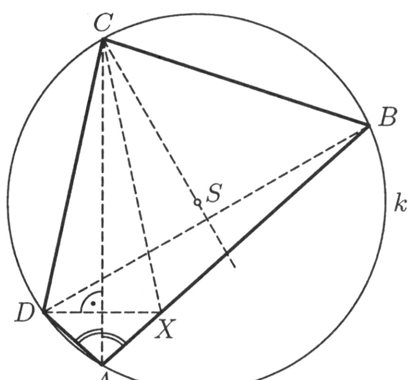
Podle (3) a (4) platí

$$F(n+1) \leqq \frac{1}{2}(n+1)\left(n+1+2\sqrt{2}-1\right) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1+p_1),$$

což je nerovnost (1) pro hodnotu $n+1$.
Závěr: Hledaným reálným číslem je číslo $p = 2\sqrt{2}-1$.

A – I – 5

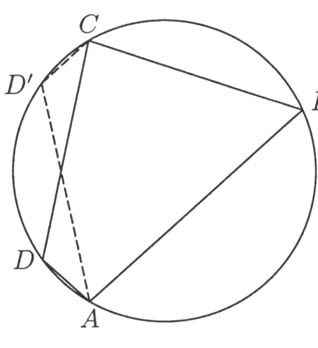
Nejprve zvažme, jak může takový tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s šedesátistupňovým úhlem při vrcholu B a se shodnými stranami BC a CD vypadat. Označme k kružnici, jež je čtyřúhelníku $ABCD$ opsána. Protože $|\sphericalangle ABC| = 60°$, je už určena velikost úhlopříčky AC, která je tětivou odpovídající obvodovému úhlu $60°$. Vrchol D pak musí být vnitřním bodem kratšího oblouku AC kružnice k (v polorovině opačné k ACB) a vrchol B je obrazem bodu D v souměrnosti podle přímky SC (obr. 29), kde S je střed kružnice k.



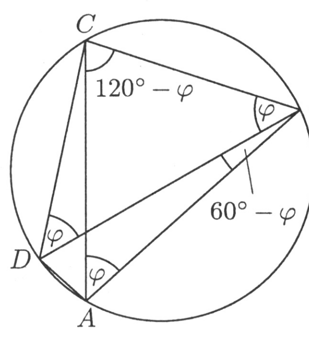
Obr. 29

Protože dle předpokladu $|BC| = |CD|$, jsou obvodové úhly BAC a CAD příslušné shodným tětivám shodné. Vidíme tedy, že polopřímky AD a AB jsou souměrně sdruženy dle osy AC. Označme X obraz bodu D v této souměrnosti (obr. 29). Bod X zřejmě leží uvnitř strany AB (obraz kratšího oblouku AC leží celý ve vnitřní oblasti kružnice k), a protože $|CX| = |CD| = |BC|$, je trojúhelník XBC rovnoramenný. Trojúhelník XBC je dokonce rovnostranný, protože velikost jeho úhlu při vrcholu B je $60°$. Je proto $|BX| = |BC| = |CD|$. Ze souměrnosti navíc plyne $|DA| = |XA|$, takže $|CD| + |DA| = |BX| + |XA| = |AB|$, což je požadovaná rovnost.

b) Snadno nahlédneme, že opačná implikace neplatí. Stačí vzít takový čtyřúhelník $ABCD$, který splňuje předpoklady úlohy, a zároveň v něm platí $|CD| \neq |DA|$ (takový určitě existuje, jak jsme naznačili hned v úvodu řešení). Prohodíme-li nyní strany CD a DA, tj. nahradíme-li vrchol D vrcholem D' souměrně sdruženým s vrcholem D podle osy úhlopříčky AC (obr. 30), dostaneme tětivový čtyřúhelník $ABCD'$ s šedesátistupňovým úhlem při vrcholu B, který bude i nadále splňovat rovnost $|CD'| + |D'A| = |DA| + |CD| = |AB|$, ale bude v něm platit $|BC| = |CD| = |D'A| \neq |D'C|$.



Obr. 30



Obr. 31

Jiné řešení. Uvažujme *sinovou větu* v následujícím tvaru, který plyne z věty o obvodových úhlech: *Je-li R poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, je* $\sin\alpha = \frac{1}{2}a/R$, *kde* $a = |BC|$. (Doplníme-li cyklicky další dvě rovnosti, dostaneme odtud snadno běžné znění sinové věty ze školních učebnic.)

Označíme-li nyní φ obvodový úhel příslušný shodným tětivám BC a CD ($0° < \varphi < 60°$), snadno zjistíme, že tětivě DA přísluší obvodový úhel $60° - \varphi$ a tětivě AB obvodový úhel $120° - \varphi$ (obr. 31). Dokazovaná rovnost je pak dle sinové věty ekvivalentní rovnosti

$$\sin\varphi + \sin(60° - \varphi) = \sin(120° - \varphi).$$

Protože $\sin(120° - \varphi) = \sin(60° + \varphi)$, je uvedená rovnost (po jednoduché úpravě) ekvivalentní rovnosti

$$\sin\varphi = 2\cos 60° \sin\varphi,$$

která triviálně platí.

Stejně jako v předchozím řešení si uvědomíme, že rovnost $|CD| + |DA| = |AB|$ zůstane zachována, i když v daném čtyřúhelníku vyměníme obě strany CD a DA. Nový čtyřúhelník zůstane tětivový, velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu B se nezmění, ale místo rovnosti $|BC| = |CD|$ bude splněna rovnost $|BC| = |DA|$.

Jiné řešení. Označme délky stran čtyřúhelníku $ABCD$, který splňuje podmínky úlohy, obvyklým způsobem a, b, c, d. Protože vnitřní úhly při vrcholech B a D mají velikost $60°$, resp. $120°$, z kosinové věty pro trojúhelníky ABC a CDA plyne dvojím vyjádřením hodnoty $|AC|^2$ rovnost

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 + cd. \tag{6}$$

a) Jestliže $b = c$, lze z rovnosti (6) postupně odvodit:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - ac &= c^2 + d^2 + cd, \\ a^2 - d^2 &= ac + cd, \\ (a-d)(a+d) &= c(a+d), \\ a - d &= c. \end{aligned}$$

Rovnost $a = c + d$, kterou jsme měli dokázat, tedy platí.

b) Jestliže platí $a = c + d$, dostaneme po dosazení za a do rovnosti (6)

$$(c+d)^2 + b^2 - (c+d)b = c^2 + d^2 + cd.$$

Odtud po úpravě obdržíme vztah $(b - c)(b - d) = 0$, z něhož plyne, že platí $b = c$ nebo $b = d$. Opačná implikace tedy obecně neplatí.

A – I – 6

Jsou-li čísla x, y, z řešením dané soustavy, zřejmě platí $xyz \neq 0$. Vynásobme proto jednotlivé rovnice činiteli yz, zx resp. xy a v oboru nenulových reálných čísel řešme ekvivalentní soustavu rovnic

$$x^2yz = y + z, \quad xy^2z = x + z, \quad xyz^2 = x + y. \tag{1}$$

Sečtením levých a pravých stran této soustavy rovnic získáme po úpravě rovnici

$$(xyz - 2)(x + y + z) = 0.$$

Odtud vidíme, že platí $xyz = 2$ nebo $x + y + z = 0$.

▷ Nechť $xyz = 2$. Po dosazení za součin xyz v soustavě (1) dostaneme

$$2x = y + z, \quad 2y = x + z, \quad 2z = x + y,$$

což je ekvivalentní se soustavou

$$3x = x + y + z, \quad 3y = x + y + z, \quad 3z = x + y + z.$$

Odtud plyne $x = y = z$. S ohledem na podmínku $xyz = 2$ dostáváme $x = y = z = \sqrt[3]{2}$. Zkouškou ověříme, že trojice $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$ je skutečně řešení soustavy (1), a tedy i původní soustavy rovnic.

▷ Nechť $x + y + z = 0$. Z první rovnice soustavy (1) plyne $x^2yz = -x$, odkud s ohledem na podmínku $x \neq 0$ dostaneme $xyz = -1$. Ověřme, že každá trojice nenulových reálných čísel (x, y, z) splňující soustavu dvou rovnic

$$x + y + z = 0, \quad xyz = -1 \tag{2}$$

je řešením původní soustavy. Z rovností (2) totiž plyne

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{y + z}{yz} = \frac{-x}{-1/x} = x^2$$

(s ohledem na symetrii zadané soustavy stačilo ověřit jednu rovnici).

Soustava rovnic (2) má v oboru nenulových reálných čísel nekonečně mnoho řešení, která získáme například tak, že jednu proměnnou (např. z) zvolíme jako parametr. Tím dostaneme soustavu

$$x + y = -z, \quad xy = -\frac{1}{z}.$$

Po dosazení za x z první rovnice do druhé dostaneme

$$(y+z)y = \frac{1}{z},$$

tedy

$$y^2 + yz - \frac{1}{z} = 0. \tag{3}$$

Jedná se o kvadratickou rovnici s neznámou y a parametrem z. Její diskriminant je roven $D = z^2 + 4/z$. Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby tato rovnice měla reálné kořeny, je nerovnost $D \geqq 0$. Vyřešením nerovnice $(z^3+4)/z \geqq 0$ dostaneme pro parametr z podmínku

$$z \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{4}\right\rangle \cup (0, \infty). \tag{4}$$

Za podmínky (4) má kvadratická rovnice (3) kořeny

$$y_1 = \frac{-z + \sqrt{z^2 + 4/z}}{2} \quad \text{a} \quad y_2 = \frac{-z - \sqrt{z^2 + 4/z}}{2},$$

kterým podle vztahu $x = -y - z$ odpovídají hodnoty

$$x_1 = \frac{-z - \sqrt{z^2 + 4/z}}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-z + \sqrt{z^2 + 4/z}}{2},$$

přitom pouze v případě $z = -\sqrt[3]{4}$ platí $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Závěr: Daná soustava má řešení $x = y = z = \sqrt[3]{2}$. Všechna ostatní řešení jsou trojice (x, y, z) tvaru

$$(x, y, z) = \left(\frac{-z \pm \sqrt{z^2 + 4/z}}{2}, \frac{-z \mp \sqrt{z^2 + 4/z}}{2}, z\right),$$

kde z je libovolné číslo splňující podmínku (4).

A – S – 1

Protože $P(x)$ je kvadratický trojčlen s nezápornými koeficienty, je nutně $a > 0$.

Nechť x je libovolné kladné reálné číslo a n přirozené. Protože

$$0 \leqq \left(\sqrt{x^n} - \frac{1}{\sqrt{x^n}}\right)^2 = x^n + \frac{1}{x^n} - 2,$$

platí

$$x^n + \frac{1}{x^n} \geqq 2, \tag{1}$$

přitom rovnost nastává, právě když $\sqrt{x^n} = 1/\sqrt{x^n}$, tj. když $x = 1$.

Protože čísla ab, bc a ca jsou podle předpokladů úlohy nezáporná, užitím nerovnosti (1) dále platí

$$\begin{aligned} P(x) \cdot P\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr) &= (ax^2 + bx + c)\Bigl(a\,\frac{1}{x^2} + b\,\frac{1}{x} + c\Bigr) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab\Bigl(x + \frac{1}{x}\Bigr) + bc\Bigl(x + \frac{1}{x}\Bigr) + ca\Bigl(x^2 + \frac{1}{x^2}\Bigr) \geqq \\ &\geqq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = \bigl(P(1)\bigr)^2. \end{aligned}$$

Rovnost nastává, právě když $x = 1$, nebo $ab = bc = ca = 0$, což s ohledem na podmínku $a > 0$ dává $b = c = 0$.

Pro libovolné kladné reálné číslo x tedy platí

$$P(x) \cdot P\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr) \geqq \bigl(P(1)\bigr)^2,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, je-li $x = 1$ nebo $b = c = 0$.

Poznámka. Úlohu lze řešit také užitím Cauchyovy nerovnosti:

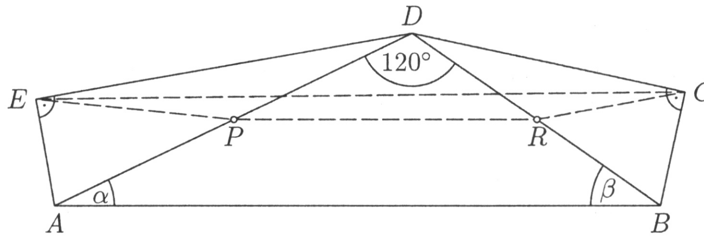
$$\begin{aligned} P(x) \cdot P\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr) &= (ax^2 + bx + c)\Bigl(a\,\frac{1}{x^2} + b\,\frac{1}{x} + c\Bigr) = \\ &= \Bigl((\sqrt{a}x)^2 + (\sqrt{bx})^2 + (\sqrt{c})^2\Bigr)\left(\Bigl(\frac{\sqrt{a}}{x}\Bigr)^2 + \Bigl(\sqrt{\frac{b}{x}}\Bigr)^2 + (\sqrt{c})^2\right) \geqq \\ &\geqq \left(\sqrt{a}x \cdot \frac{\sqrt{a}}{x} + \sqrt{bx} \cdot \sqrt{\frac{b}{x}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c}\right)^2 = (a + b + c)^2 = \bigl(P(1)\bigr)^2. \end{aligned}$$

A – S – 2

Nechť $ABCDE$ je libovolný konvexní pětiúhelník s uvažovanými vlastnostmi. Označme P, R po řadě středy stran AD, BD trojúhelníku ABD (obr. 32). Pak bude

$$|PR| = \frac{1}{2}|AB|, \qquad |CR| = \frac{1}{2}|BD|, \qquad |PE| = \frac{1}{2}|AD|, \tag{1}$$

protože PR je střední příčka trojúhelníku ABD a protože v pravoúhlém trojúhelníku je střed přepony zároveň středem jeho opsané kružnice (Thaletova věta).



Obr. 32

Z trojúhelníkové nerovnosti je zřejmé, že pro délku úhlopříčky CE platí

$$|CE| \leqq |CR| + |RP| + |PE| = s,$$

kde délka s lomené čáry $CRPE$ je podle (1) zároveň rovna polovině obvodu trojúhelníku ABD.

Dále zkoumejme, kdy bude mít trojúhelník ABD daných vlastností ($|AB| = 6\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ADB| = 120°$) největší obvod. Označíme-li α a β (obr. 32) velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A a B trojúhelníku ABD ($\alpha + \beta = 60°$), dostaneme ze sinové věty v trojúhelníku ABD

$$|BD| = |AB| \frac{\sin\alpha}{\sin 120°}, \quad |AD| = |AB| \frac{\sin\beta}{\sin 120°}.$$

Sečtením obou předchozích rovností vyjde

$$\begin{aligned} |AD| + |BD| &= |AB| \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin 120°} = \\ &= 2|AB| \frac{\sin 30°}{\sin 120°} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqq 2|AB| \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

přičemž rovnost v poslední nerovnosti nastává, právě když $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 1$, tj. pro $\alpha = \beta = 30°$. Trojúhelník ABD má tedy největší obvod, právě když je rovnoramenný a jeho úhly při základně AB mají velikost 30°. Vzhledem k tomu, že $|AB| = 6\,\text{cm}$, platí pro libovolný pětiúhelník $ABCDE$ požadovaných vlastností

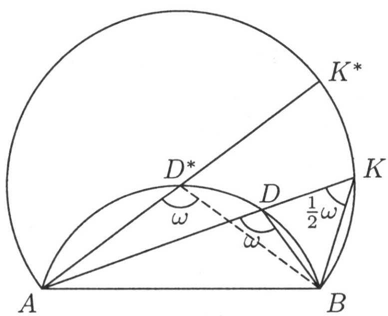
$$\begin{aligned} |CE| \leqq s = \frac{1}{2}(|AB| + |AD| + |BD|) \leqq \frac{1}{2}|AB|\left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \\ = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Přitom pro uvažovaný pětiúhelník $ABCDE$ v situaci, kdy je trojúhelník ABD rovnoramenný a vrcholy C, E leží na přímce RP, skutečně platí $|CE| = (3 + 2\sqrt{3})$ cm.

Největší délka úhlopříčky CE pětiúhelníku $ABCDE$ vyhovujícího podmínkám úlohy je tedy $(3 + 2\sqrt{3})$ cm.

Poznámka. V druhé části řešení jsme (pro konkrétní hodnotu $\omega = 120°$) ukázali, že trojúhelník ABD s danou stranou AB a daným úhlem ω při vrcholu D má největší obvod, právě když je rovnoramenný se základnou AB. To plyne i z následující úvahy:

Bod D probíhá oblouk, z něhož je úsečku AB vidět pod úhlem ω. Na polopřímce opačné k DA (obr. 33) sestrojme bod K tak, aby $|DB| = |DK|$. Z rovnoramenného trojúhelníku BDK plyne, že $|\sphericalangle AKB| = \frac{1}{2}\omega$. Bod K proto leží na oblouku, z něhož je úsečku AB vidět pod úhlem $\frac{1}{2}\omega$. Délka $|AK| = |AD| + |BD|$ bude tudíž největší, právě když bude úsečka AK průměrem AK^* zmíněného oblouku; tehdy je bod D středem D^* příslušné kružnice, takže platí $|AD^*| = |BD^*| = |D^*K^*|$.



Obr. 33

A – S – 3

Odečtením první rovnice dané soustavy od druhé dostaneme rovnici

$$y^2 - x^2 + 2zx - 2yz = 6(z + x - 2) - 6(y + z - 2),$$

kterou upravíme na tvar

$$(x - y)(x + y - 2z + 6) = 0.$$

Podobně odečtením první rovnice soustavy od třetí dostaneme

$$(x - z)(x + z - 2y + 6) = 0.$$

Daná soustava je proto ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz - 6(y + z - 2) &= 0, \\ (x - y)(x + y - 2z + 6) &= 0, \\ (x - z)(x + z - 2y + 6) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Vzhledem ke druhé a třetí rovnici této soustavy je možno rozlišit čtyři případy.

1. Nechť $(x - y = 0) \wedge (x - z = 0)$. Pak $x = y = z$ a dosazením za y a z do první rovnice soustavy (2) dostaneme rovnici

   $$3x^2 - 12x + 12 = 0,$$

   která má dvojnásobný reálný kořen $x = 2$. Proto trojice $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ je v tomto případě jediným řešením dané soustavy.
2. Nechť $(x - y = 0) \wedge (x + z - 2y + 6 = 0)$. Pak $y = x$ a $z = x - 6$. Dosazením do první rovnice soustavy (2) dostaneme po úpravě rovnici

   $$3x^2 - 24x + 48 = 0,$$

   která má dvojnásobný reálný kořen $x = 4$. Proto trojice $(x, y, z) = (4, 4, -2)$ je v tomto případě jediným řešením dané soustavy.
3. Nechť $(x+y-2z+6 = 0) \wedge (x-z = 0)$. Podobně jako v předcházejícím případě dostaneme jediné řešení $(x, y, z) = (4, -2, 4)$.
4. Nechť $(x + y - 2z + 6 = 0) \wedge (x + z - 2y + 6 = 0)$. Odečtením druhé rovnice od první dostaneme, že $3y - 3z = 0$, tedy $y = z$. Z prvního předpokladu tak máme $y = x + 6$. Dosazením do první rovnice soustavy (2) dostaneme po úpravě rovnici

   $$3x^2 + 12x + 12 = 0,$$

   která má dvojnásobný reálný kořen $x = -2$. Proto trojice $(x, y, z) = (-2, 4, 4)$ je v tomto případě jediným řešením dané soustavy.

Daná soustava má v oboru reálných čísel čtyři řešení (x, y, z), kterými jsou trojice $(2, 2, 2)$, $(4, 4, -2)$, $(4, -2, 4)$ a $(-2, 4, 4)$.

Poznámka. Pokud si všimneme, že sečtením všech tří rovnic dané soustavy dostaneme po úpravě

$$(x + y + z - 6)^2 = 0,$$

pak např. z podmínky $z + x - 2y + 6 = 0$ přímo plyne $y = 4$, což předcházející úvahy zjednoduší.

A – II – 1

Každý pětimístný palindrom p se dá zapsat ve tvaru $p = \overline{abcba}$, kde a, b, c jsou číslice v desítkové soustavě, $a \neq 0$. Z vyjádření

$$p = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 37(270a + 27b + 3c) + 11(a + b - c)$$

plyne, že p je dělitelné číslem 37, právě když je číslem 37 dělitelné číslo $a+b-c$. Vzhledem k tomu, že a, b, c jsou číslice ($a \neq 0$), je $-8 \leqq a+b-c \leqq 18$. Proto je číslo $a + b - c$ dělitelné 37, právě když $a + b - c = 0$, neboli $c = a + b$. Číslice a, b tedy musejí splňovat podmínku $a + b \leqq 9$.

Ke každému $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ lze číslici b zvolit $10 - a$ způsoby tak, aby platilo $a + b \leqq 9$ ($b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9 - a\}$). Číslice c je pak určena jednoznačně jako součet $a + b$. Palindromů s číslicí $a = 1$ je proto 9, palindromů s číslicí $a = 2$ je 8 atd.; konečně pro číslici $a = 9$ existuje právě jeden palindrom.

Počet všech pětimístných palindromů, které jsou dělitelné číslem 37, je tedy

$$9 + 8 + 7 + \ldots + 1 = 45.$$

A – II – 2

Počet vyhovujících slov délky $n \geqq 2$, která končí dvojicemi písmen AA, AB, BA označme postupně $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$; počet vyhovujících slov délky $n \geqq 1$, která končí písmenem A, resp. B, označme a_n, resp. b_n. Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 2$ platí:

$$\begin{aligned}
a_n &= (aa)_n + (ba)_n, \\
b_n &= (ab)_n, \\
p_n &= a_n + b_n = (aa)_n + (ba)_n + (ab)_n.
\end{aligned}$$

Existují právě dvě vyhovující slova délky jedna, a to slova A a B, a právě tři vyhovující slova délky dva, a to slova AA, AB, BA, proto $a_1 = b_1 = 1$, $p_1 = 2$, $(aa)_2 = (ab)_2 = (ba)_2 = 1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $p_2 = 3$.

Každé vyhovující slovo délky $n \geqq 3$, které končí dvojicí písmen AA, dostaneme tak, že připíšeme písmeno A na konec slova délky $n-1$ končícího dvojicí BA. Proto platí

$$(aa)_n = (ba)_{n-1}.$$

Analogicky zjistíme, že pro každé $n \geqq 3$ platí rovněž vztahy

$$(ba)_n = (ab)_{n-1},$$
$$(ab)_n = (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1}.$$

Protože nás zajímá pouze parita přirozeného čísla p_n a výrazů, pomocí kterých ho počítáme, můžeme na základě uvedených rovností sestavit tabulku ze symbolů S a L, jimž odpovídají sudá resp. lichá čísla. Dostaneme

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$(aa)_n$		L	L	L	S	S	L	S	L	...
$(ba)_n$		L	L	S	S	L	S	L	L	...
$(ab)_n$		L	S	S	L	S	L	L	L	...
a_n	L	S	S	L	S	L	L	L	S	...
b_n	L	L	S	S	L	S	L	L	L	...
p_n	S	L	S	L	L	L	S	S	L	...

Tato tabulka je nutně periodická, protože existuje jen osm různých uspořádaných trojic písmen S a L, takže nejdéle po osmi sloupcích se vzhledem k dokázané rekurenci začnou hodnoty posloupností $((aa)_n)$, $((ba)_n)$, $((ab)_n)$ opakovat. Hodnoty posloupností (a_n), (b_n), (p_n) jsou z nich odvozeny, takže se začnou opakovat rovněž. Z tabulky vidíme, že její perioda je 7 (první dva shodné sloupce jsou pro $n = 2$ a $n = 9$). A protože v příslušném úseku tabulky je dvojice sousedních sudých čísel p_7, p_8 jediná, jsou obě čísla p_n a p_{n+1} sudá, právě když je číslo n dělitelné sedmi.

Poznámky. Z výše uvedených vztahů můžeme odvodit rekurentní rovnice pro čísla a_n a b_n. Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 4$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= (aa)_n + (ba)_n = (ba)_{n-1} + (ab)_{n-1} = \\ &= (ab)_{n-2} + (ab)_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-1}, \\ b_n &= (ab)_n = (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1} = a_{n-1}. \end{aligned}$$

Tyto rovnice také můžeme odvodit následující úvahou. Vyhovující slovo končící písmenem A má koncovku BA nebo BAA, počet slov prvního typu je b_{n-1}, slov druhého typu je b_{n-2}. Vyhovující slovo končící písmenem B má nutně koncovku AB a těchto slov je a_{n-1}.

Ze vztahů uvedených v předchozím odstavci se dá odvodit rekurentní rovnice přímo pro čísla p_n. Pro každé $n \geqq 4$ totiž platí

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-3}, \\ b_n &= a_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-3}. \end{aligned}$$

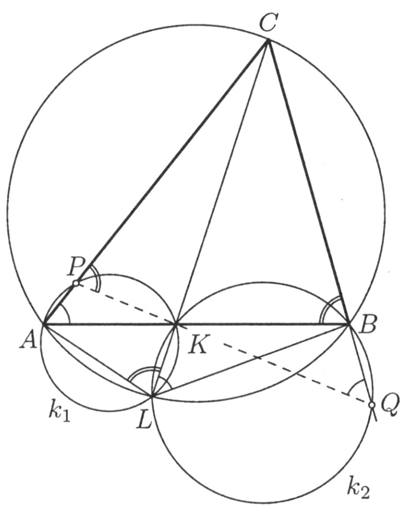
Vzhledem k tomu, že $p_n = a_n + b_n$, dostaneme sečtením těchto vztahů rovnici

$$p_n = p_{n-2} + p_{n-3},$$

kterou můžeme odvodit i takto: Každé vyhovující slovo délky n má právě jednu z koncovek $ABAA$, ABA, BAB, $BAAB$, přitom koncovky ABA a BAB má právě p_{n-2} slov, zatímco koncovky $ABAA$ a $BAAB$ má právě p_{n-3} slov.

A – II – 3

a) V tětivovém čtyřúhelníku $ALBC$ platí $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BLC|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ALC|$ (obr. 34). Z rovnosti obvodového a příslušného úsekového úhlu pro tětivu AK v kružnici k_1 vyplývá, že přímka AC je



Obr. 34

tečnou ke kružnici k_1, právě když platí $|\sphericalangle CAK| = |\sphericalangle ALK|$, tj. právě když $\alpha = \beta$. Z analogických důvodů je přímka BC tečnou ke kružnici k_2, právě když $\beta = \alpha$. Přímka AC je proto tečnou ke kružnici k_1, právě když přímka BC je tečnou ke kružnici k_2, což jsme chtěli dokázat.

b) Podle části a) víme, že platí $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BLK|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ALK|$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí $\alpha < \beta$. Tečna v bodě A ke kružnici k_1 svírá s tětivou AK úsekový úhel $\beta > \alpha$, proto leží bod P na polopřímce AC, zatímco bod Q leží analogicky na polopřímce opačné k BC. Z tětivových čtyřúhelníků $ALKP$ a $BQLK$ plynou rovnosti $|\sphericalangle KPC| = \beta$ a $|\sphericalangle BQK| = \alpha$ (obr. 34). Trojúhelníky APK a QBK se proto shodují ve dvou úhlech (u vrcholů A, Q a P, B). Shodují se tedy i v úhlu při společném vrcholu K:

$$|\sphericalangle AKP| = |\sphericalangle BKQ| \ (= \beta - \alpha).$$

Odtud plyne, že body P, K, Q leží na téže přímce. Tím je tvrzení části b) dokázáno.

Poznámka. Dokázali jsme vlastně následující tvrzení: Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný s rameny AC, BC, dotýkají se obě ramena odpovídajících kružnic k_1 a k_2 ve vrcholech A a B; není-li rovnoramenný, protínají jeho strany AC a BC odpovídající kružnice k_1 a k_2 v dalších bodech P a Q ($P \neq A$, $Q \neq B$), přičemž jejich spojnice PQ prochází daným bodem K.

A – II – 4

Užitím sinové věty v trojúhelnících BKA a CKA dostaneme

$$\frac{|BK|}{|AK|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta} \quad \text{a} \quad \frac{|CK|}{|AK|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\gamma}.$$

Sečtením obou předešlých rovností vyjde

$$\frac{|BC|}{|AK|} = \frac{|BK|}{|AK|} + \frac{|CK|}{|AK|} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Vynásobíme-li obě strany poslední rovnosti výrazem $2\cos\frac{\alpha}{2}$, obdržíme po úpravě

$$2\,\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right). \tag{1}$$

Cyklickou záměnou získáme další dvě analogické rovnosti

$$2\,\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}=\sin\beta\left(\frac{1}{\sin\gamma}+\frac{1}{\sin\alpha}\right), \tag{2}$$

$$2\,\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\gamma\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right). \tag{3}$$

Sečtením rovností (1), (2) a (3) dostaneme po dělení dvěma rovnost

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ jsou kladná čísla, můžeme každý ze tří výrazů v závorkách na pravé straně poslední rovnosti odhadnout zdola číslem dvě (využíváme známou nerovnost $a/b+b/a \geqq 2$, která je pro libovolná kladná čísla a, b ekvivalentní se zřejmou nerovností $(a-b)^2 \geqq$ $\geqq 0$). Odtud plyne požadovaná nerovnost a důkaz je hotov.

A – III – 1

Vyhovuje-li nějaká trojice $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ $(xyz\neq 0)$ podmínkám úlohy, je řešením následující soustavy nerovnic

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &\leqq 6+x^2-\frac{8}{x^4}, & \qquad & & \frac{8}{x^4}+y^2+z^2 &\leqq 6,\\ x^2+y^2+z^2 &\leqq 6+y^2-\frac{8}{y^4}, & & \text{tj.} & x^2+\frac{8}{y^4}+z^2 &\leqq 6,\\ x^2+y^2+z^2 &\leqq 6+z^2-\frac{8}{z^4}, & & & x^2+y^2+\frac{8}{z^4} &\leqq 6. \end{aligned}$$

Sečtením všech tří nerovnic této soustavy dostaneme nerovnici

$$\left(\frac{8}{x^4}+x^2+x^2\right)+\left(\frac{8}{y^4}+y^2+y^2\right)+\left(\frac{8}{z^4}+z^2+z^2\right)\leqq 18.$$

Výrazy v každé ze tří závorek na levé straně lze odhadnout užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice kladných čísel. Obdržíme tak postupně

$$18\geqq\left(\frac{8}{x^4}+x^2+x^2\right)+\left(\frac{8}{y^4}+y^2+y^2\right)+\left(\frac{8}{z^4}+z^2+z^2\right)\geqq$$
$$\geqq 3\sqrt[3]{\frac{8}{x^4}\cdot x^2\cdot x^2}+3\sqrt[3]{\frac{8}{y^4}\cdot y^2\cdot y^2}+3\sqrt[3]{\frac{8}{z^4}\cdot z^2\cdot z^2}=18.$$

Odtud plyne, že v každé ze tří použitých nerovností mezi aritmetickým a geometrickým průměrem nastává rovnost, takže příslušná trojice čísel má vždy tři stejné složky. Musí tedy současně platit

$$\frac{8}{x^4} = x^2, \qquad \frac{8}{y^4} = y^2, \qquad \frac{8}{z^4} = z^2,$$

tj.

$$x^6 = y^6 = z^6 = 8.$$

Z poslední podmínky bezprostředně plyne

$$(x, y, z) = \left(\varepsilon_1\sqrt{2}, \varepsilon_2\sqrt{2}, \varepsilon_3\sqrt{2}\right), \quad \text{kde } \varepsilon_i \in \{-1; 1\} \text{ pro } i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Vzhledem k užité důsledkové úpravě je nutno provést zkoušku, pomocí níž zjistíme, že všech 8 trojic reálných čísel určených vztahem (1) vyhovuje podmínkám úlohy.

Jiné řešení. Nechť trojice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $(xyz \neq 0)$ je řešením dané úlohy. Označme

$$A = \min\{x^2, y^2, z^2\} > 0.$$

Potom platí

$$\min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4}\right\} = A - \frac{8}{A^2}.$$

Proto též

$$A + A + A \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq 6 + \min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4}\right\} =$$
$$= 6 + A - \frac{8}{A^2}.$$

Po úpravě dostaneme nerovnost, jejíž pravou stranu odhadneme užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem:

$$6 \geqq A + A + \frac{8}{A^2} \geqq 3\sqrt[3]{A \cdot A \cdot \frac{8}{A^2}} = 6.$$

To znamená, že ve všech užitých nerovnostech musí nastat rovnost, proto

$$2 = A = x^2 = y^2 = z^2.$$

Zkouškou opět ověříme, že všechny trojice určené vztahem (1) jsou řešením zadané nerovnice.

A – III – 2

Počet vyhovujících slov délky n, která končí písmenem A, resp. B, označme a_n, resp. b_n. Platí

$$p_n = a_n + b_n. \tag{1}$$

Nechť $n \geqq 4$. Vyhovující slovo končící písmenem A má jednu z koncovek BA, BAA, nebo $BAAA$. Počet slov prvního typu je b_{n-1}, druhého typu b_{n-2}, třetího typu b_{n-3}. Proto

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}. \tag{2}$$

Podobně pro $n \geqq 3$ má vyhovující slovo končící písmenem B jednu z koncovek AB, ABB, tudíž

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \tag{3}$$

Nechť dále $n \geqq 6$; každé z čísel b_i ve vztahu (2) vyjádřeme pomocí (3), dostaneme tak

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} = \\ &= (a_{n-2} + a_{n-3}) + (a_{n-3} + a_{n-4}) + (a_{n-4} + a_{n-5}) = \\ &= a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + a_{n-5}. \end{aligned} \tag{4}$$

Podobně dostaneme

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1} + a_{n-2} = \\ &= (b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4}) + (b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5}) = \\ &= b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5}. \end{aligned} \tag{5}$$

Sečtením vztahů (4) a (5) dostaneme dle (1)

$$p_n = p_{n-2} + 2p_{n-3} + 2p_{n-4} + p_{n-5}.$$

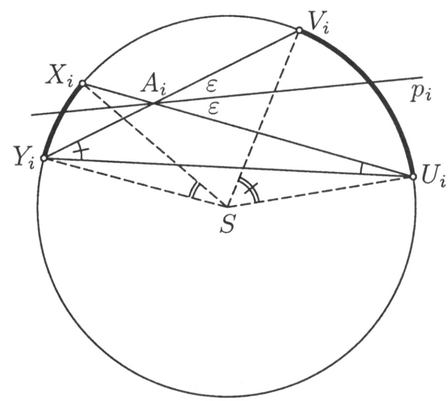
Proto pro libovolné přirozené číslo $n \geqq 6$ platí

$$\frac{p_n - p_{n-2} - p_{n-5}}{p_{n-3} + p_{n-4}} = 2,$$

tudíž zadaný zlomek má hodnotu 2 i pro $n = 2\,004$.

A – III – 3

Pro libovolné i, $1 \leqq i \leqq 121$, označme M_i množinu všech bodů X kružnice k, pro něž úsečka A_iX svírá s odpovídající přímkou p_i úhel velikosti menší než $\varepsilon = 21°$. Množina M_i je zřejmě tvořena dvěma oblouky X_iY_i a U_iV_i (obr. 35). Oběma uvažovaným obloukům kružnice k odpovídá dvojice středových úhlů X_iSY_i a U_iSV_i, kde S je střed dané kružnice k. Ukážeme, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, 121\}$ platí $|\sphericalangle X_iSY_i| + |\sphericalangle U_iSV_i| = 4\varepsilon = 84°$.



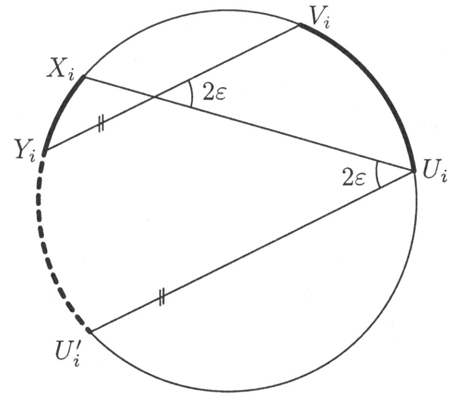
Obr. 35

V trojúhelníku $A_iY_iU_i$ je součet velikostí vnitřních úhlů při vrcholech Y_i a U_i roven velikosti vedlejšího úhlu při vrcholu A_i, tj. 2ε. Avšak součet obou uvažovaných vnitřních úhlů v trojúhelníku $A_iY_iU_i$ je roven součtu obvodových úhlů odpovídajících obloukům X_iY_i a U_iV_i. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem dostáváme

$$|\sphericalangle X_iSY_i| + |\sphericalangle U_iSV_i| = 2 \cdot 2\varepsilon = 4\varepsilon = 84°.$$

Celkově tak 121 uvažovaným tětivám p_i a jejich bodům A_i odpovídá 121 dvojic oblouků X_iY_i a U_iV_i kružnice k s celkovou obloukovou délkou $121 \cdot 84° = 10\,164°$. Pokud každý bod X kružnice k náleží nejvýše 28 množinám M_i, musí být uvedený součet všech obloukových délek nejvýše roven $28 \cdot 360° = 10\,080°$, což neplatí. Proto existuje aspoň jeden bod kružnice k, který náleží současně aspoň 29 množinám M_i, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Že oběma obloukům X_iY_i a U_iV_i odpovídá dohromady středový úhel 4ε, nahlédneme snadno i z obr. 36, neboť oblouky $U_i'Y_i$ a U_iV_i jsou shodné.



Obr. 36

A – III – 4

Pro $n = 1, 2, 3$ je daný součet roven celým číslům 1, 3, resp. 5. Předpokládejme proto dále, že $n > 3$. Jednoduchou úpravou dostaneme

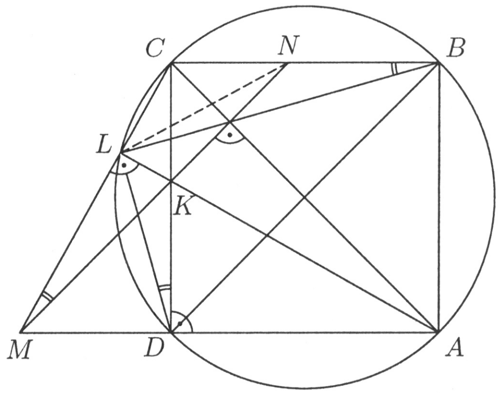
$$\frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \ldots + \frac{n}{(n-2)!} + \frac{n}{(n-1)!} + \frac{n}{n!} =$$
$$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2 + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3 + \ldots + n(n-1) + n + 1}{(n-1)!}.$$

Je-li poslední zlomek celé číslo, je nutně číslo $n-1$ dělitelem jeho čitatele. Proto je číslo $n-1$ dělitelem čísla $n+1$. Protože největší společný dělitel dvou čísel je dělitelem i jejich rozdílu, je největší společný dělitel čísel $n-1$ a $n+1$ dělitelem čísla 2, takže $n-1 \in \{1, 2\}$, což je ve sporu s předpokladem $n > 3$.

Daný součet je celé číslo pro přirozená čísla n z množiny $\{1, 2, 3\}$.

A – III – 5

Úhlopříčka AC je průměrem kružnice opsané čtverci $ABCD$, takže podle Thaletovy věty je úhel ALC pravý (obr. 37). Bod K je tak průsečíkem výšek CD a AL v trojúhelníku ACM, takže i přímka MK je kolmá na AC a protíná stranu BC daného čtverce v jejím vnitřním bodě N, neboť $MK \parallel DB$.



Obr. 37

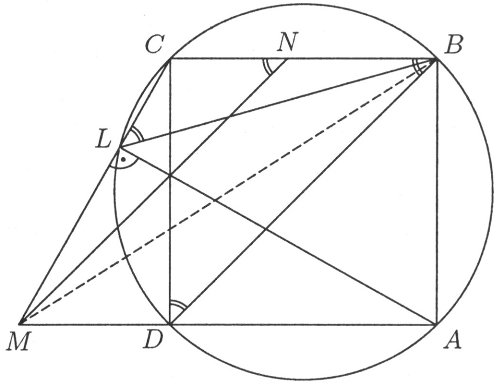
Tvrzení lze úlohy dokázat několika způsoby.

1. Čtyřúhelníky $BCLD$ a $KLMD$ jsou tětivové, proto podle věty o obvodových úhlech postupně platí

$$|\sphericalangle NBL| = |\sphericalangle CBL| = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle KDL| = |\sphericalangle KML| = |\sphericalangle NML|.$$

Protože body B a M leží v téže polorovině vyťaté přímkou NL, leží body B, L, M, N na téže kružnici.

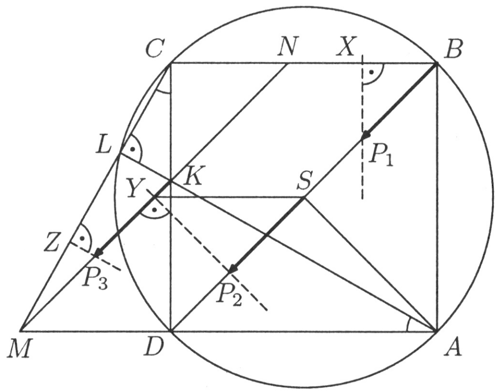
2. Protože $MN \parallel DB$, je $|\sphericalangle MNC| = 45°$, rovněž úhel BLC nad tětivou BC kružnice k má velikost $45°$ (obr. 38), je tedy $|\sphericalangle BLM| =$



Obr. 38

$= |\sphericalangle BNM| = 135°$. Body L a N zřejmě leží v téže polorovině vyťaté přímkou MB, proto leží body B, L, M, N na téže kružnici.

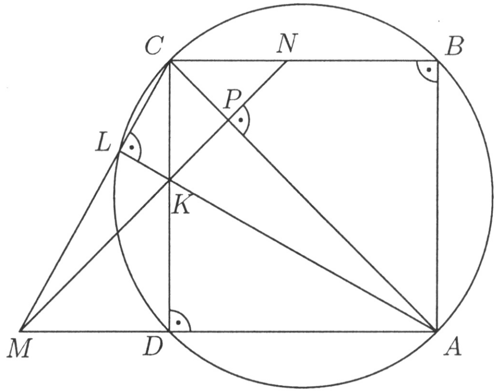
3. (Oceněné řešení *Martina Seleckého.*) Ukážeme, že osy úseček BN, MN a LM se protínají v jednom bodě. Označme X, Y a Z středy těchto úseček (obr. 39). Osa úsečky BN je zřejmě rovnoběžná s AB. Z rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle DCL|$ nad tětivou DL kružnice opsané



Obr. 39

danému čtverci plyne, že trojúhelníky DAK a DCM jsou shodné (*usu*), takže $|MD| = |DK|$. Trojúhelník MDK je tedy pravoúhlý rovnoramenný, takže $|\sphericalangle DMN| = 45°$, neboli $MN \parallel BD$. To znamená, že osa úsečky MN je rovnoběžná s přímkou SA. Konečně úhel CLA je pravý úhel nad průměrem AC kružnice opsané danému čtverci, takže osa úsečky LM je rovnoběžná s KA. Označme P_1, P_2 průsečíky os úseček NB a MN s úhlopříčkou BD a P_3 průsečík osy úsečky LM s přímkou MN (obr. 39), přitom zřejmě je P_3 středem úsečky KM. Protože $|MD| = |YS| = |NB|$, je také $|BP_1| = |SP_2| = |KP_3|$ (stačí si uvědomit shodnost příslušných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků $BNP_1 \cong SYP_2 \cong DKP_3$). Zjistili jsme, že osy úseček BN, MN a LM dostaneme po řadě rovnoběžným posunutím přímek BA, SA a KA o vektor $\boldsymbol{BP}_1$, a protože uvedené přímky mají společný bod A, je společným bodem všech tří os bod, který dostaneme posunutím bodu A o týž vektor.

4. Označme P patu výšky z vrcholu M na stranu AC a uvažujme čtyřúhelníky $ABNP$, $APKD$ a $DKLM$ (obr. 40). Podle Thaletovy věty jsou všechny tři čtyřúhelníky tětivové. Vrchol C daného čtverce $ABCD$ leží vně každé ze tří kružnic opsaných uvažovaným tětivovým čtyřúhel-



Obr. 40

níkům, takže užitím věty o mocnosti bodu C ke kružnicím opsaným po řadě čtyřúhelníkům $ABNP$, $APKD$, $DKLM$ obdržíme následující tři rovnosti

$$|CN|\cdot|CB| = |CP|\cdot|CA|,$$
$$|CP|\cdot|CA| = |CK|\cdot|CD|,$$
$$|CK|\cdot|CD| = |CL|\cdot|CM|,$$

z nichž bezprostředně vyplývá rovnost

$$|CN|\cdot|CB| = |CL|\cdot|CM|.$$

Odtud již plyne, že body B, L, M, N leží na téže kružnici.

A – III – 6

Nechť f je libovolná z hledaných funkcí. Označme $f(1) = p$, vzhledem k podmínkám úlohy platí $p > 0$.

V daném vztahu položme $x = 1$, $y = 1$. Po úpravě dostaneme

$$p = f(p). \tag{1}$$

V daném vztahu dále položme $x = p$, $y = 1$. Potom

$$p^2\big(f(p) + p\big) = (p+1)f\big(f(p)\big)$$

a podle (1) vyjde

$$2p^3 = (p+1)p.$$

Tato algebraická rovnice má tři reálné kořeny $-\frac{1}{2}$, 0, 1. Jediný kořen vyhovující podmínce $p > 0$ je $p = 1$, tedy

$$f(1) = 1. \tag{2}$$

Nechť t je libovolné kladné reálné číslo. V daném vztahu položme $x = 1$, $y = t$, takže vzhledem k (2) dostaneme

$$1 + f(t) = (1 + t)f(t).$$

Odtud po úpravě

$$f(t) = \frac{1}{t}. \tag{3}$$

Dosazením snadno ověříme, že funkce $f(t) = 1/t$ vyhovuje rovnici ze zadání.

Funkce určená vztahem (3) je jediné řešení dané úlohy.

Jiné řešení. Předpokládejme, že existuje funkce daných vlastností, a libovolnou z takových funkcí označme f.

Nechť t je libovolné kladné reálné číslo. V daném vztahu položme $x = t$, $y = t$. Po úpravě dostaneme

$$tf(t) = f\bigl(tf(t)\bigr).$$

Odtud plyne, že množina $\mathsf{P} = \{p \in \mathbb{R}_+ : p = f(p)\}$ pevných bodů funkce f je neprázdná, protože pro každé kladné reálné číslo t je $tf(t) \in \mathsf{P}$.

Předpokládejme, že množina P obsahuje alespoň dvě různá čísla, a označme je a a b. V daném vztahu položme $x = a$, $y = b$, dostaneme tak

$$a^2\bigl(f(a) + f(b)\bigr) = (a + b)f\bigl(f(a)b\bigr),$$

a protože $a = f(a)$, $f(a) + f(b) = a + b \neq 0$, vyjde po úpravě

$$a^2 = f(ab). \tag{1}$$

Položíme-li naopak $x = b$, $y = a$, dostaneme obdobně

$$b^2 = f(ab). \tag{2}$$

Protože a a b jsou kladná čísla, plyne ze vztahů (1) a (2) rovnost $a = b$, což je spor s předpokladem, že množina P obsahuje dvě různá čísla. Množina P tedy obsahuje jediné číslo p ($p \in \mathbb{R}_+$). Z předcházejících vztahů vyplývá, že pro každé kladné reálné číslo t platí $tf(t) = p$, proto je funkce f nutně tvaru

$$f(t) = \frac{p}{t}.$$

Dosadíme-li tento předpis do původního vztahu, dostaneme pro všechna $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$x^2\left(\frac{p}{x} + \frac{p}{y}\right) = (x + y)\frac{p}{\frac{p}{x}y},$$

což po úpravě dává $p = 1$.

Funkce f daná pro všechna kladná reálná čísla t předpisem

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

je tedy jediná funkce, která vyhovuje zadání.