53. ročník matematické olympiády na středních školách

Přípravná soustředění před 45. MMO

In: Karel Horák (editor); Jan Kára (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 53. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2003/2004. 45. mezinárodní matematická olympiáda. 16. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. pp. 153–156.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405077

**Terms of use:**

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

## Přípravná soustředění před 45. MMO

V průběhu 53. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 5. do 9. dubna 2004 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 9 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

| | | |
|---|---|---|
| Vítězslav Kala | 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14 | 90 |
| Jan Moláček | 4/4 GJKT, Hradec Králové | 90 |
| Marek Pechal | 6/8 G Zlín, Lesní čtvrť 1364 | 87,5 |
| Jaromír Kuben | 2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14 | 85,5 |
| František Konopecký | 7/8 GLJ Holešov, Palackého 524 | 84,5 |
| Alexandr Kazda | 8/8 G Praha 6, Nad Alejí | 84 |
| Pavel Kocourek | 3/4 SPŠST Praha 1, Panská | 82 |
| Tomáš Gavenčiak | 4/4 GMK Bílovec | 80,5 |
| Sven Dražan | 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14 | 67 |

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Jaroslav Zhouf* (5. 4.),
dr. *Karel Horák* (6. 4.),
dr. *Pavel Calábek* (7. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (8. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (9. 4.).

## Úlohy zadané na přípravném soustředění

**1.** Na stole leží $n \geqq 3$ listů papíru, které jsou očíslovány od 1 do $n$. Pak jsou listy libovolně rozděleny na dvě hromádky (jedna hromádka může být prázdná) a hledáme v aspoň jedné hromádce právě dva listy, jejichž čísla dávají v součtu druhou mocninu nějakého přirozeného čísla. Dokažte, že

a) když je $n \geqq 15$, pak takové dva listy mohou být vždy nalezeny,

b) když je $n < 14$, pak takové dva listy nemusejí být nutně nalezeny.

**2.** Najděte všechna přirozená čísla $n$ taková, že zároveň platí

(a) $n$ má právě šest různých dělitelů $1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$,

(b) $1 + n = 5(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$.

**3.** Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Průsečík přímek $AB$ a $CD$ označme $E$, průsečík přímek $DA$ a $BC$ označme $F$. (Nechť $B$ leží mezi $A$ a $E$, $C$ leží mezi $D$ a $E$, $A$ leží mezi $D$ a $F$, $B$ leží mezi $C$ a $F$.) Středy kružnic vepsaných trojúhelníkům $AFB$, $BEC$ a $ABC$ označme postupně $I_1$, $I_2$ a $I_3$. Průsečíky přímky $I_1I_3$ s přímkami $EA$ a $ED$ označme $K$ a $L$, průsečíky přímky $I_2I_3$ s přímkami $FC$ a $FD$ označme $M$ a $N$. Dokažte, že platí $|EK| = |EL|$, právě když platí $|FM| = |FN|$.

**4.** Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{(n-k)2^{k-1}} < 4$$

pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$.

**5.** V rovině jsou dány dvě kružnice $k_1$, $k_2$ s poloměry $r_1$, $r_2$ $(r_1 < r_2)$, jež se vně dotýkají. Jejich společná tečna $t_1$ se dotýká $k_1$ v bodě $A$ a $k_2$ v bodě $D$. Označme $t_2$ druhou tečnu kružnice $k_1$ rovnoběžnou s $t_1$ a $E$, $F$ její průsečíky s kružnicí $k_2$. Jestliže polopřímka z bodu $D$ protne protne přímku $t_2$ v bodě $B$ a kružnici $k_2$ v bodě $C$, je $t_1$ tečnou kružnice opsané trojúhelníku $ABC$. Dokažte.

**6.** Uvažujme abecedu $\{a, b, c, d\}$ a slova složená z $n$ písmen této abecedy. Slovo považujeme za *složité*, jestliže obsahuje dvě stejné skupiny písmen za sebou (např. *caab* nebo *cababdc* jsou složitá slova, ale slovo *abcab* není). Slovo, které není složité, nazveme *jednoduché*. Dokažte, že jednoduchých slov složených z $n$ písmen je více než $2^n$.

**7.** V daném trojúhelníku $ABC$ označme $O$ střed opsané a $V$ střed vepsané kružnice. Dále označme $K$ a $M$ body dotyku připsané kružnice $\omega_a$, která leží v úhlu $BAC$ a strany $BC$ se dotýká v bodě $N$. Jestliže střed $P$ úsečky $KM$ leží na opsané kružnici trojúhelníku $ABC$, leží body $O$, $V$ a $N$ v přímce. Dokažte.

**8.** Nechť $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel. Určete všechny funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla $x$, $y$ platí

$$f(x) - f(y) = (x - y)g(x + y).$$

**9.** Určete počet všech nekonečných posloupností $a_1, a_2, a_3, \ldots$ čísel $+1$ a $-1$, které vyhovují současně podmínkám:

(i) Pro všechna přirozená čísla $m$, $n$ platí

$$a_{mn} = a_m a_n.$$

(ii) V každé trojici po sobě jdoucích členů $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$ se vyskytuje současně jak číslo $+1$, tak číslo $-1$.

**10.** Určete všechny funkce $f\colon (1, +\infty) \to (1, +\infty)$ takové, že pro všechna reálná čísla $x, y > 1$ a pro všechna kladná reálná čísla $m$, $n$ platí

$$f(x^m y^n) \leqq f(x)^{\frac{1}{4m}} f(y)^{\frac{1}{4n}}.$$

**11.** Určete všechna přirozená čísla $n$ mající tuto vlastnost: Nechť $p$ je mnohočlen s celočíselnými koeficienty takový, že $0 \leqq p(k) \leqq n$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$, potom platí

$$p(0) = p(1) = p(2) = \ldots = p(n + 1) = 0.$$

**12.** Nechť $I$ je středem kružnice vepsané danému trojúhelníku $ABC$. Uvažujme kružnici se středem v bodě $I$, která protíná strany $BC$, $CA$, $AB$ po řadě vždy ve dvou vnitřních bodech $D$ a $P$, $E$ a $Q$, $F$ a $R$. Nechť dále dvojice úseček $EF$ a $QR$, $FD$ a $RP$, $DE$ a $PQ$ se protínají po řadě v bodech $S$, $T$, $U$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $FRT$, $DPU$ a $EQS$ procházejí společným bodem.

**13.** Dokažte, že každém tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí nerovnost

$$\big||AC| - |BD|\big| < \big||AB| - |CD|\big|.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

**14.** V obdélníku o rozměrech $20 \times 25$ je umístěno 120 jednotkových čtverců. Dokažte, že v tomto obdélníku existuje kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$, která neprotíná žádný z jednotkových čtverců.

**15.** Čísla $x - 2004$ a $y - 2004$ jsou druhé mocniny dvou po sobě jdoucích celých čísel. Určete největší možnou hodnotu největšího společného dělitele čísel $x$ a $y$.

**16.** Určete nejmenší hodnotu výrazu $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$, kde $x, y, z$ jsou kladná reálná čísla splňující podmínku $xyz = 32$.

**17.** Rovnoběžník $ABCD$ má vnitřní úhel $60°$ u vrcholu $A$. Označme $O$ střed kružnice opsané trojúhelníku $ABD$ a předpokládejme, že polopřímka $AO$ protne osu vnějšího úhlu při vrcholu $C$ rovnoběžníku v bodě $K \neq C$. Najděte možné hodnoty poměru $|AO| : |OK|$.

**18.** Určete nejmenší přirozené číslo $n$, pro které platí: Z libovolné $n$-tice navzájem různých celých čísel lze vybrat čtyři různá čísla $a$, $b$, $c$, $d$, pro která je číslo $a + b - c - d$ dělitelné dvaceti.

**19.** Šachovnice $(n - 1) \times (n - 1)$ má $(n - 1)^2$ čtvercových polí, která mají dohromady $n^2$ vrcholů. Kolika způsoby lze těchto $n^2$ bodů obarvit červenou a modrou barvou tak, aby každé pole mělo dva modré a dva červené vrcholy?