53. ročník matematické olympiády na středních školách

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

In: Karel Horák (editor); Jan Kára (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 53. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2003/2004. 45. mezinárodní matematická olympiáda. 16. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. pp. 157–165.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405078

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

Bílovec, 21.–22. června 2004

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již čtvrté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 45. MMO v Athénách.

Soutěž se uskutečnila v termínu 21.–22. 6. 2004 v severomoravském Bílovci. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 20. 6. 2004. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Mateusz Michałek	POL	6 7 6 7 7 5	38
2.–3.	*Vítězslav Kala*	CZE	6 7 1 7 7 7	35
	František Simančík	SVK	7 6 1 7 7 7	35
4.–5.	Kamil Duszenko	POL	6 7 0 7 7 7	34
	Tomáš Váňa	SVK	5 7 1 7 7 7	34
6.	*František Konopecký*	CZE	5 7 0 7 7 7	33
7.–8.	*Jaromír Kuben*	CZE	7 7 0 7 1 7	29
	Jan Moláček	CZE	7 0 1 7 7 7	29
9.	Alexandr Kazda	CZE	3 7 0 4 7 7	28
10.–11.	*Marek Pechal*	CZE	6 1 0 5 7 7	26
	Michał Pilipczuk	POL	4 0 1 7 7 7	26
12.	Andrzej Grzesik	POL	5 7 0 7 1 3	23
13.	Ondrej Budáč	SVK	4 0 1 6 6 3	20
14.	Hana Budáčová	SVK	2 0 1 7 1 6	17
15.	Peter Černo	SVK	5 0 0 2 1 7	15
16.	Piotr Danilewski	POL	0 0 0 7 0 6	13
17.	Jakub Kallas	POL	0 0 0 2 1 7	10
18.	Jozef Bodnár	SVK	3 0 1 2 0 3	9

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili členové úlohové komise z České republiky — dr. *Jaroslav Švrček* a doc. *Jaromír Šimša.* Úlohy koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček* a *Karel Horák* za Českou republiku, *Pavol Novotný* a *Ján Mazák* za Slovensko a *Waldemar Pompe* a *Adam Osękowski* za Polsko.

Texty soutěžních úloh

1. Dokažte, že reálná čísla p, q, r splňují podmínku

$$p^4(q-r)^2+2p^2(q+r)+1=p^4,$$

právě když kvadratické rovnice

$$x^2+px+q=0, \qquad y^2-py+r=0$$

mají reálné kořeny (ne nutně různé), které lze označit $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takovém pořadí, že platí rovnost $x_1y_1-x_2y_2=1$. (*J. Šimša*)

2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k existuje nejvýše konečně mnoho takových trojic navzájem různých prvočísel p, q, r, pro něž je číslo $qr-k$ násobkem p, číslo $pr-k$ násobkem q a současně číslo $pq-k$ násobkem r.

3. Uvnitř tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ je dán bod P tak, že platí

$$|\sphericalangle BPC|=|\sphericalangle BAP|+|\sphericalangle PDC|.$$

Označme E, F, G paty kolmic z bodu P po řadě na přímky AB, AD a DC. Dokažte, že trojúhelník FEG je podobný trojúhelníku PBC.

(*Toshio Seimiya*)

4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\frac{1}{xy}=\frac{x}{z}+1, \quad \frac{1}{yz}=\frac{y}{x}+1, \quad \frac{1}{zx}=\frac{z}{y}+1.$$

(*J. Földes*)

5. Uvnitř stran AB, BC, CA daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body K, L, M tak, že platí

$$\frac{|AK|}{|KB|}=\frac{|BL|}{|LC|}=\frac{|CM|}{|MA|}.$$

Dokažte, že trojúhelníky ABC a KLM mají společný průsečík výšek, právě když je trojúhelník ABC rovnostranný. (*P. Černek*)

6. Na stole leží k hromádek o $1, 2, \ldots, k$ kamenech, kde $k \geqq 3$. V prvním kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a z této nové hromádky odstraníme jeden kámen (pryč ze stolu). Ve druhém kroku opět sloučíme některé tři hromádky do jedné a pak z ní odebereme dva kameny. Obecně v i-tém kroku sloučíme libovolné tři hromádky, ve kterých je dohromady více než i kamenů, do jedné hromádky a pak z ní i kamenů odstraníme. Předpokládejme, že po několika krocích zůstane na stole jediná hromádka, v níž je p kamenů. Dokažte, že číslo p je úplný kvadrát, právě když obě čísla $2k+2$ a $3k+1$ jsou úplné kvadráty. Dále pak najděte nejmenší k, pro které je číslo p úplný kvadrát.

(*R. Kučera*)

Řešení úloh

1. Předpokládejme, že uvažované kořeny obou daných rovnic splňují rovnost $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 1$. Podle známého vzorce je

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm K}{2} \qquad \text{a} \qquad y_{1,2} = \frac{p \pm L}{2}, \tag{1}$$

kde reálná čísla K, L splňují rovnosti $K^2 = p^2 - 4q$ a $L^2 = p^2 - 4r$ (číslům K, L přiřadíme znaménka podle očíslování kořenů). Potom

$$1 = x_1 y_1 - x_2 y_2 = \frac{(-p+K)(p+L) - (-p-K)(p-L)}{4} = \frac{p(K-L)}{2},$$

odkud $p \neq 0$ a $K - L = 2/p$. Dosadíme-li to do rovnosti

$$(K+L)(K-L) = K^2 - L^2 = (p^2 - 4q) - (p^2 - 4r) = 4(r-q),$$

vyjde nám $K + L = 2p(r-q)$. Ze získaných vyjádření čísel $K+L$ a $K-L$ dostaneme $K = 1/p - p(q-r)$, po umocnění $K^2 = 1/p^2 - 2(q-r) + p^2(q-r)^2$. Porovnáme-li to s rovností $K^2 = p^2 - 4q$, obdržíme po snadné úpravě požadovanou podmínku

$$p^4(q-r)^2 + 2p^2(q+r) + 1 = p^4, \tag{2}$$

Předpokládejme naopak, že platí rovnice (2). Pak zřejmě $p \neq 0$. Rovnici upravíme dvěma obdobnými způsoby do tvarů

$$p^4(r-q)^2 + 2p^2(r-q) + 1 = p^4 - 4p^2 q$$

a

$$p^4(q-r)^2 + 2p^2(q-r) + 1 = p^4 - 4p^2 r;$$

odtud po vydělení číslem p^2 zjišťujeme, že diskriminanty uvažovaných kvadratických rovnic mají vyjádření

$$p^2 - 4q = \left(\frac{p^2(r-q)+1}{p}\right)^2 \quad \text{a} \quad p^2 - 4r = \left(\frac{p^2(q-r)+1}{p}\right)^2,$$

takže to jsou nezáporná čísla a příslušné (reálné) kořeny mají tvar (1), kde

$$K = \frac{p^2(r-q)+1}{p} \quad \text{a} \quad L = -\frac{p^2(q-r)+1}{p}.$$

Znaménka čísel K a L jsme zvolili tak, aby vyšlo (viz důkaz 1. implikace)

$$x_1y_1 - x_2y_2 = \frac{p(K-L)}{2} = \frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p^2(r-q)+1}{p} + \frac{p^2(q-r)+1}{p}\right) = 1.$$

2. Navzájem různá prvočísla p, q, r vyhovují podmínkám úlohy, právě když číslo $pq + qr + rp - k$ je dělitelné každým z čísel p, q, r, neboli jejich součinem pqr. Rovnost $pq + qr + rp - k = n \cdot pqr$ pro vhodné celé n přepišme do tvaru $k = pq + qr + rp - n \cdot pqr$. Je-li $n \leqq 0$, plyne z poslední rovnosti, že $\max\{pq, pr, qr\} \leqq k$; pak ovšem každé z prvočísel p, q, r je nejvýše $\frac{1}{2}k$ a takových trojic je konečný počet. Je-li $n \geqq 1$, dostáváme odhad $k \leqq pq + qr + rp - pqr$. Zřejmě můžeme předpokládat, že $2 \leqq p < q < r$.

Kdyby bylo $r \geqq 7$, dostali bychom

$$\frac{pq + qr + rp - npqr}{pqr} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - n \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - 1 < 0,$$

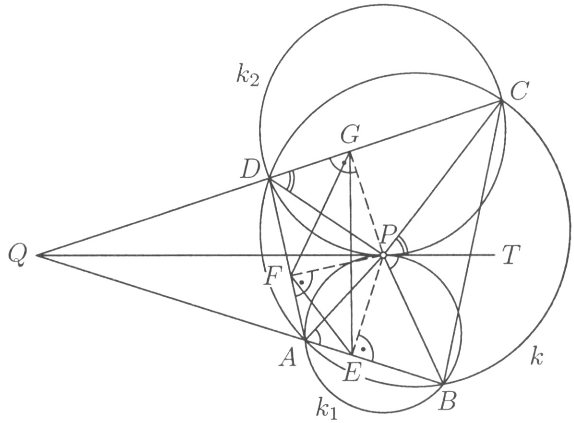
což nejde. Může tedy být jedině $r = 5$, $q = 3$ a $p = 2$.

3. Označme k kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$ a k_1, k_2 kružnice opsané trojúhelníkům PAB, PCD. Uvnitř úhlu BPC uvažujme takovou polopřímku PT, pro niž platí $|\sphericalangle BPT| = |\sphericalangle BAP|$. Podle zadání pak platí (obr. 42)

$$|\sphericalangle CPT| = |\sphericalangle BPC| - |\sphericalangle BPT| = |\sphericalangle BPC| - |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PDC|.$$

Přímka PT je tudíž společnou vnitřní tečnou obou kružnic k_1 a k_2.

Uvažujme nejprve případ, kdy strany AB a CD uvažovaného tětivového čtyřúhelníku nejsou rovnoběžné. Vzhledem k tomu, že úsečky AB a CD jsou společnými tětivami odpovídajících dvojic kružnic k_1,



Obr. 42

k a k_2, k, existuje jediný bod Q, který má stejnou mocnost ke všem třem kružnicím k, k_1 a k_2. Tímto bodem Q je společný bod všech tří přímek (chordál) AB, CD a PT. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod Q leží na polopřímce BA za bodem A (obr. 42).

Podle Thaletovy věty jsou zřejmě čtyřúhelníky $AEPF$, $FPGD$ a $QEPG$ tětivové. Z rovností příslušných obvodových úhlů tak plyne

$$|\sphericalangle FEG| = |\sphericalangle FEP| - |\sphericalangle GEP| = |\sphericalangle FAP| - |\sphericalangle GQP| =$$
$$= |\sphericalangle DAP| - |\sphericalangle DQP| = |\sphericalangle QDA| - |\sphericalangle QPA|,$$

neboť úhly při vrcholech A, P a úhly při vrcholech D, Q v nekonvexním čtyřúhelníku $APQD$ dávají stejný součet: $|\sphericalangle DAP| + |\sphericalangle QPA| = |\sphericalangle QDA| + |\sphericalangle DQP|$. Pro úsekový úhel QPA navíc platí $|\sphericalangle QPA| = |\sphericalangle PBA|$, takže

$$|\sphericalangle FEG| = |\sphericalangle QDA| - |\sphericalangle QPA| = |\sphericalangle QDA| - |\sphericalangle PBA| =$$
$$= |\sphericalangle QBC| - |\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PBC|.$$

Analogicky dokážeme, že je $|\sphericalangle FGE| = |\sphericalangle PCB|$. Trojúhelníky FEG a PBC se tedy shodují ve dvou vnitřních úhlech a jsou podobné (uu).

Jsou-li přímky AB a CD rovnoběžné, je $ABCD$ rovnoramenný lichoběžník se základnami AB a CD. Odtud plyne, že body E, P, G leží na ose souměrnosti lichoběžníku $ABCD$ a trojúhelníky APD a BPC jsou shodné. Jak snadno plyne z vlastností obvodových úhlů tětivových čtyřúhelníků $AEPF$ a $FPGD$, jsou trojúhelníky EFG a APD podobné (je $|\sphericalangle FEG| = |\sphericalangle PAD|$ a $|\sphericalangle EGF| = |\sphericalangle ADP|$). Odtud již plyne podobnost trojúhelníků FEG a PBC. Tím je důkaz ukončen.

Poznámka. V předvedeném řešení jsme potřebovali ukázat, že se trojúhelníky FEG a PBC shodují ve dvou úhlech. Rovnost úhlů $|\sphericalangle EFG| = |\sphericalangle BPC|$ plyne téměř okamžitě z rovností příslušných obvodových úhlů v tětivových čtyřúhelnících $AEPF$, $FPGD$.

4. Z tvaru rovnic plyne podmínka $xyz \neq 0$. Dvě z čísel x, y, z musejí mít stejné znaménko, pak je kladná pravá strana rovnice, ve které jsou tato dvě čísla v podílu, proto je kladná i příslušná levá strana, takže zbývající z čísel x, y, z má totéž znaménko jako prvá dvě. Platí tedy buď $x, y, z > 0$, nebo $x, y, z < 0$.

Zabývejme se pouze prvním případem, druhý se totiž převede na první změnou řešení (x, y, z) na řešení $(-x, -y, -z)$. První dvě rovnice soustavy vynásobme výrazem xyz a odečtěme je, po úpravě dostaneme $z - x = y(x^2 - yz)$. Je-li trojice (x, y, z) řešením, jsou řešeními i trojice (y, z, x) a (z, x, y), které dostaneme cyklickou záměnou. Proto můžeme předpokládat, že $x = \max\{x, y, z\}$. Potom $z - x \leqq 0$ a $x^2 - yz \geqq 0$ (nezapomeňme, že $x, y, z > 0$), takže z rovnosti $z - x = y(x^2 - yz)$ a podmínky $y > 0$ plyne $z - x = x^2 - yz = 0$, což znamená $x = y = z$. Máme tedy jedinou rovnici $1/x^2 = 1 + 1$, která má (jediný) kladný kořen $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Odpověď. Soustava má právě dvě řešení $x = y = z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

5. Bod V roviny trojúhelníku ABC je průsečíkem jeho výšek, právě když platí zároveň $AV \perp BC$ a $BV \perp AC$, neboli $\boldsymbol{AV} \cdot \boldsymbol{BC} = 0$ a $\boldsymbol{BV} \cdot \boldsymbol{AC} = 0$. Po dosazení $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{BV} - \boldsymbol{CV}$, $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AV} - \boldsymbol{CV}$ a snadné úpravě dostaneme ekvivalentní podmínku ve formě rovnosti skalárních součinů

$$\boldsymbol{AV} \cdot \boldsymbol{BV} = \boldsymbol{BV} \cdot \boldsymbol{CV} = \boldsymbol{CV} \cdot \boldsymbol{AV}. \tag{1}$$

Naším úkolem je tedy zjistit, kdy platí soustava (1) zároveň s obdobnou soustavou

$$\boldsymbol{KV} \cdot \boldsymbol{LV} = \boldsymbol{LV} \cdot \boldsymbol{MV} = \boldsymbol{MV} \cdot \boldsymbol{KV}, \tag{2}$$

která vyjadřuje, že bod V je průsečíkem výšek trojúhelníku KLM. Vyjádříme vektory z (2) jako lineární kombinace vektorů z (1). Podle zadání existuje číslo λ, $0 < \lambda < 1$, pro které platí

$$\boldsymbol{AK} = \lambda\,\boldsymbol{AB}, \quad \boldsymbol{BL} = \lambda\,\boldsymbol{BC}, \quad \boldsymbol{CM} = \lambda\,\boldsymbol{CA}.$$

Dosadíme-li do první rovnosti $\boldsymbol{AK} = \boldsymbol{AV} - \boldsymbol{KV}$ a $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AV} - \boldsymbol{BV}$, dostaneme po úpravě první z rovností

$$\boldsymbol{KV} = (1-\lambda)\boldsymbol{AV} + \lambda\,\boldsymbol{BV}, \quad \boldsymbol{LV} = (1-\lambda)\boldsymbol{BV} + \lambda\,\boldsymbol{CV},$$
$$\boldsymbol{MV} = (1-\lambda)\boldsymbol{CV} + \lambda\,\boldsymbol{AV};$$

druhé dvě rovnosti odvodíme analogicky. Odtud vynásobením dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{KV}\cdot\boldsymbol{LV} &= (1-\lambda)^2\boldsymbol{AV}\cdot\boldsymbol{BV} + \lambda(1-\lambda)\boldsymbol{AV}\cdot\boldsymbol{CV} + \lambda(1-\lambda)\boldsymbol{BV}^2 = \\ &= (1-\lambda)s + \lambda(1-\lambda)\boldsymbol{BV}^2,\end{aligned}$$

kde písmeno s označuje společnou hodnotu součinů z (1). Analogicky platí

$$\boldsymbol{KV}\cdot\boldsymbol{MV} = (1-\lambda)s+\lambda(1-\lambda)\boldsymbol{AV}^2 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{LV}\cdot\boldsymbol{MV} = (1-\lambda)s+\lambda(1-\lambda)\boldsymbol{BV}^2.$$

Vidíme, že soustava (2) je ekvivalentní se soustavou rovností

$$\lambda(1-\lambda)\boldsymbol{AV}^2 = \lambda(1-\lambda)\boldsymbol{BV}^2 = \lambda(1-\lambda)\boldsymbol{CV}^2,$$

která je s ohledem na $\lambda(1-\lambda) \neq 0$ splněna, právě když $|AV| = |BV| = |CV|$. Tato podmínka znamená, že průsečík výšek V trojúhelníku ABC splývá se středem kružnice opsané. To nastane, právě když je trojúhelník ABC rovnostranný.

Jiné řešení. Je-li trojúhelník ABC rovnostranný, označme O střed jeho kružnice opsané. Při jedné z rotací o 120° kolem bodu O platí $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ a rovněž $K \mapsto L \mapsto M \mapsto K$, neboť například body K, resp. L dělí ve stejném poměru úsečku AB, resp. úsečku BC, jež je obrazem první úsečky ve zmíněné rotaci. To znamená, že i trojúhelník KLM je rovnostranný a bod O je středem (a tedy i průsečíkem výšek) obou trojúhelníků ABC a KLM.

Jestliže ABC není rovnostranný trojúhelník, je střed O jeho opsané kružnice různý od těžiště T. Snadno ukážeme, že bod $T = \frac{1}{3}(A+B+C)$ je těžištěm i trojúhelníku KLM: podle zadání totiž existuje číslo $\lambda \in (0,1)$ tak, že

$$K = \lambda A + (1-\lambda)B, \quad L = \lambda B + (1-\lambda)C, \quad M = \lambda C + (1-\lambda)A,$$

odkud okamžitě plyne rovnost $\frac{1}{3}(K+L+M) = \frac{1}{3}(A+B+C)$.

Připusťme, že trojúhelníky ABC a KLM mají kromě těžiště T společné i ortocentrum, které označíme H. Podle známé věty leží body H, T, O v uvedeném pořadí na jedné přímce (zvané Eulerova přímka trojúhelníku ABC), přičemž platí $|HT| : |TO| = 2 : 1$. Střed kružnice opsané je tedy těžištěm a ortocentrem jednoznačně určen; úvahou o Eulerově přímce trojúhelníku KLM tak zjišťujeme, že bod O je nejen středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, ale i středem kružnice opsané trojúhelníku KLM. Body K, L, M mají proto stejnou vzdálenost od bodu O, takže mají i stejnou mocnost ke kružnici opsané trojúhelníku ABC. Tyto mocnosti se rovnají veličinám

$$\begin{aligned}
-|AK|\cdot|BK| &= -p(1-p)|AB|^2,\\
-|BL|\cdot|CL| &= -p(1-p)|BC|^2,\\
-|CM|\cdot|AM| &= -p(1-p)|AC|^2,
\end{aligned}$$

jejichž porovnáním dostaneme rovnosti $|AB| = |BC| = |CA|$ (neboť $\lambda \notin \{0,1\}$). To je ve sporu s předpokladem, že trojúhelník ABC není rovnostranný.

6. Po i provedených krocích bude na stole $k - 2i$ hromádek; zůstane-li proto nakonec na stole jediná hromádka, bylo číslo k liché a celkový počet kroků byl $\frac{1}{2}(k-1)$. Rozlišíme, zda číslo k dává při dělení čtyřmi zbytek 1, nebo zbytek 3.

Případ $k = 4c+1$. Na začátku leží na stole $1+\ldots+k = \frac{1}{2}k(k+1) = (4c+1)(2c+1)$ kamenů, ve všech $2c$ krocích odstraníme celkem $1+\ldots+2c = c(2c+1)$ kamenů, takže počet kamenů v poslední hromádce bude

$$p = (4c+1)(2c+1) - c(2c+1) = (2c+1)(3c+1).$$

Čísla $2c+1$ a $3c+1$ jsou ovšem nesoudělná, takže p je úplný kvadrát, právě když jsou úplné kvadráty obě čísla $2c+1$ a $3c+1$, tedy právě když jsou úplné kvadráty jejich čtyřnásobky $4(2c+1) = 2k+2$ a $4(3c+1) = 3k+1$.

Případ $k = 4c+3$. Na začátku leží na stole $1+\ldots+k = \frac{1}{2}k(k+1) = 2(c+1)(4c+3)$ kamenů, ve všech $2c+1$ krocích odstraníme celkem $1+\ldots+(2c+1) = (c+1)(2c+1)$ kamenů, takže počet kamenů v poslední hromádce bude

$$p = 2(c+1)(4c+3) - (c+1)(2c+1) = (c+1)(6c+5).$$

Kdyby bylo číslo p úplný kvadrát, musela by být úplnými kvadráty obě nesoudělná čísla $c+1$ a $6c+5$. Ukažme, že to není možné: připusťme existenci přirozených čísel x, y takových, že $c+1=x^2$ a $6c+5=y^2$. Z rovnosti $6x^2-y^2=1$ plyne, že číslo y je liché, tudíž číslo y^2 dává při dělení osmi zbytek 1. Číslo $6x^2$ pak při dělení osmi dává zbytek 2, odkud plyne, že číslo $3x^2$ při dělení čtyřmi dává zbytek 1, což není možné. V případě $k=4c+3$ tedy p nikdy není úplný kvadrát, stejně jako není úplný kvadrát ani číslo $3k+1=12c+10$ (sudé číslo, jež není dělitelné čtyřmi).

Najdeme nyní nejmenší číslo $k=4c+1$, $c \geqq 1$, pro které jsou obě čísla $2c+1$ a $3c+1$ úplné kvadráty. Z rovností $2c+1=x^2$ a $3c+1=y^2$ pro vhodná celá $x, y>1$ plyne $3x^2-2y^2=1$, takže x je liché, číslo $2y^2$ pak při dělení čtyřmi dává zbytek 2, takže i y je liché. Položme $x=2a+1$, $y=2b+1$ (a, b celá kladná) a dosaďme do rovnosti $3x^2-2y^2=1$. Po úpravě dostaneme vztah $3a(a+1)=2b(b+1)$, kam postupně dosazujeme přirozená čísla $a=1,2,\ldots$. Najdeme tak rychle nejmenší vyhovující $a=4$ a $b=5$, kterým odpovídají $x=9$, $y=11$, $c=40$ a $k=161$.