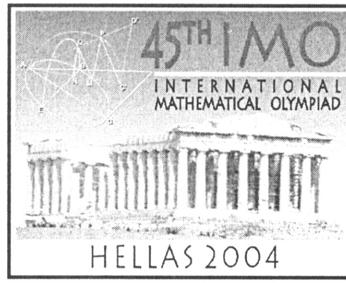
45. mezinárodní matematická olympiáda



Zhruba měsíc před zahájením letních olympijských her se v době od 4. do 18. července 2004 uskutečnil v hlavním městě Řecka Athénách i 45. ročník mezinárodní matematické olympiády. Olympiády se tentokrát zúčastnilo 486 studentů z 85 zemí (každou zemi reprezentuje vždy nejvýše šest soutěžících).

Výběr soutěžících za Českou republiku byl proveden v Kostelci nad Černými lesy na závěrečném soutěžním soustředění devíti nejúspěšnějších účastníků ústředního kola kategorie A. Vybraní reprezentanti se pak ještě zúčastnili trojutkání v severomoravském Bílovci mezi Českou republikou, Polskem a Slovenskem, kde soutěžili reprezentanti zúčastněných zemí za podmínek podobných jako při soutěži na MMO. Po této přípravě odjela do Athén tato šestice soutěžících: *Vítězslav Kala* a *Jaromír Kuben* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *František Konopecký* z Gymnázia Holešov, *Jan Moláček* z Gymnázia J.K. Tyla v Hradci Králové a *Marek Pechal* z Gymnázia ve Zlíně, Lesní čtvrť. Vedoucím české delegace byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Univerzity Palackého v Olomouci.

Mezinárodní jury složená z vedoucích jednotlivých zúčastněných zemí strávila prvních šest dnů výběrem úloh a přípravou jejich textů v národních jazycích v Delfách. Den po příletu soutěžících se konalo slavnostní zahájení v athénském Paláci kultury (Megaro Mousikis). Vlastní soutěž pak proběhla v pondělí a v úterý 12. a 13. července ve dvou velkých sálech Matematického ústavu Athénské univerzity. Každý z těchto dnů řešili soutěžící trojici úloh po dobu 4,5 hodiny. Za každou úlohu mohli získat maximálně 7 bodů.

Kromě vlastní soutěže byl pro studenty připraven další zajímavý program: mimo prohlídku starověkých Athén s Akropolí po soutěži všichni účastníci během celodenního výletu navštívili slavné Mykény, přímořské městečko Nauplios a antický amfiteátr v Epidauru.

Výsledky našich jsou uvedeny v následující tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
143.–158.	Vítězslav Kala	6	6	0	6	3	1	22	III.
351.–366.	Alexandr Kazda	0	5	0	3	0	0	8	
93.–100.	František Konopecký	7	2	1	7	7	2	26	II.
124.–142.	Jaromír Kuben	6	3	0	7	7	0	23	III.
113.–123.	Jan Moláček	7	3	0	7	6	1	24	II.
382.–395.	Marek Pechal	2	2	0	0	2	0	6	
	Celkem	28	21	1	30	25	4	109	

Jak je z tabulky vidět, z našich si nejlépe vedli *František Konopecký* z Gymnázia Holešov a *Jan Moláček* z Gymnázia v Hradci Králové. Ten zopakoval svůj úspěch z předchozí MMO a opět přivezl stříbrnou medaili. Nezklamali ani maturant *Vítězslav Kala*, který oproti předešlé MMO získal dvojnásobný počet bodů, a student teprve 2. ročníku *Jaromír Kuben*, oba z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně. Stříbro jim uteklo jen o chloupek.

O náročnosti soutěžních úloh zpravidla svědčí hranice pro zisk medailí, případně počet absolutních vítězů: na bronzovou medaili tentokrát stačilo 16 bodů, stříbro se udělovalo za 24–31 bodů a zlato za alespoň 32 z možného počtu 42 bodů. Plný počet bodů získali čtyři soutěžící: Kanaďan *Jacob Tsimerman*, Maďar *Bela Andras Racz* a dva soutěžící Ruska *Andrej Badzjan* a *Michail Dubašinskij*.

Jak dopadli naši slovenští kolegové, je nejlépe vidět z následující tabulky. Za pozornost stojí zejména bezchybný výkon slovenského družstva v první úloze, která byla opravdu nejlehčí, a nás může jen mrzet, že jsme za ni získali o 14 bodů méně.

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
244.–263.	Jozef Bodnár	7	2	0	1	4	1	15	HM
113.–123.	Ondrej Budáč	7	2	2	7	6	0	24	II.
244.–263.	Hana Budáčová	7	1	3	1	3	0	15	HM
244.–263.	Peter Černo	7	0	0	7	1	0	15	HM
101.–112.	František Simančík	7	4	1	7	3	3	25	II.
101.–112.	Tomáš Váňa	7	5	0	7	6	0	25	II.
	Celkem	42	14	6	30	23	4	119	

	I	II	III	body
ČLR	6	0	0	220
USA	5	1	0	212
Rusko	4	1	1	205
Vietnam	4	2	0	196
Bulharsko	3	3	0	194
Tchaj-wan	3	3	0	190
Maďarsko	2	3	1	187
Japonsko	2	4	0	182
Írán	1	5	0	178
Rumunsko	1	4	1	176
Ukrajina	1	5	0	174
Korea	2	2	2	166
Bělorusko	0	4	2	154
Indie	0	4	2	151
Izrael	1	1	4	147
Polsko	2	1	1	142
Moldavsko	2	0	4	140
Singapur	0	3	3	139
Mongolsko	0	3	2	135
Velká Británie	1	1	4	134
Brazílie	0	2	4	132
Kanada	1	0	3	132
Kazachstán	2	0	2	132
Srbsko a Černá Hora	0	2	3	132
Německo	0	3	1	130
Řecko	0	2	3	126
Austrálie	1	1	2	125
Gruzie	0	0	5	123
Kolumbie	0	2	2	122
Hongkong	0	2	2	120
Slovensko	0	3	0	119
Turecko	0	2	3	118
Jihoafrická republika	0	3	1	110
Česká republika	0	2	2	109
Thajsko	0	0	4	99
Arménie	0	0	4	98
Mexiko	0	0	3	96
Francie	0	0	4	94
Argentina	1	0	2	92
Chorvatsko	0	0	3	89
Maroko	0	0	3	88
Belgie	0	1	2	86
Macao	0	0	2	86

	I	II	III	body
Estonsko	0	0	2	85
Uzbekistán	0	0	3	79
Švédsko	0	0	3	75
Ázerbájdžán	0	1	0	72
Makedonie	0	0	1	71
Itálie	0	0	2	69
Slovinsko	0	0	2	69
Litva	0	0	0	65
Kirgizie	0	0	1	63
Lotyšsko	0	0	1	63
Indonézie	0	0	1	61
Albánie	0	0	1	57
Španělsko	0	0	1	57
Švýcarsko	0	0	2	57
Nový Zéland	0	0	2	56
Norsko	0	0	0	55
Rakousko	0	0	1	55
Nizozemsko	0	0	0	53
Turkmenistán	0	0	2	52
Finsko	0	0	1	49
Kypr	0	0	1	49
Peru (3)	0	0	2	49
Irsko	0	0	1	48
Uruguay	0	0	0	47
Dánsko	0	0	1	46
Portoriko (5)	0	1	0	43
Bosna a Hercegovina	0	0	0	40
Lucembursko (3)	0	1	0	36
Island	0	0	0	35
Malajsie	0	0	1	34
Srí Lanka	0	0	0	33
Tunisko	0	0	0	31
Trinidad a Tobago (5)	0	0	0	29
Portugalsko	0	0	0	26
Kuba (1)	0	0	1	17
Filipíny (5)	0	0	0	16
Venezuela (2)	0	0	0	15
Ekvádor	0	0	0	14
Mozambik (3)	0	0	0	13
Paraguay (3)	0	0	0	13
Kuvajt	0	0	0	5
Saudská Arábie	0	0	0	4

Jak je patrno z tabulky zúčastněných států, na čelných místech se žádné překvapení nekonalo. Naše i slovenské družstvo se opět nedostalo ani do třetí desítky, o moc lépe se zato vedlo Polákům. (Případná čísla v závorce upozorňují na nižší počet reprezentantů.)

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

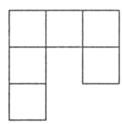
1. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$. Kružnice nad průměrem BC protíná strany AB a AC po řadě v bodech M a N. Označme O střed strany BC. Osy úhlů BAC a MON se protínají v bodě R. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR procházejí společným bodem ležícím na straně BC. (*Rumunsko*)

2. Najděte všechny mnohočleny $P(x)$ s reálnými koeficienty, jež splňují rovnost

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2\,P(a+b+c)$$

pro všechna reálná čísla a, b, c taková, že $ab+bc+ca=0$. (*Korea*)

3. Nazvěme *dlaždicí* obrazec vytvořený ze šesti jednotkových čtverců jako na obrázku



anebo libovolný obrazec vzniklý jeho otočením či souměrností. Určete všechny pravoúhelníky $m \times n$, které lze dlaždicemi pokrýt tak, že

- ▷ pravoúhelník je pokryt bez mezer a překrytí;
- ▷ žádná část dlaždice nepokrývá plochu vně pravoúhelníku.

(*Estonsko*)

4. Nechť $n \geqq 3$ je celé číslo. Nechť $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou kladná reálná čísla taková, že

$$n^2+1>(t_1+t_2+\ldots+t_n)\Big(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\Big).$$

Ukažte, že t_i, t_j, t_k jsou délky stran trojúhelníku pro všechna i, j, k, kde $1 \leqq i<j<k \leqq n$. (*Korea*)

5. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ úhlopříčka BD nepůlí ani jeden z úhlů ABC, CDA. Bod P leží uvnitř $ABCD$ a splňuje rovnosti

$$|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DBA| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle BDA|.$$

Dokažte, že $ABCD$ je tětivový, právě když $|AP| = |CP|$. (*Polsko*)

6. Přirozené číslo nazveme *pruhované*, jestliže každé dvě sousední číslice v jeho desítkovém zápise mají různou paritu. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že n má pruhovaný násobek. (*Írán*)

Řešení úloh

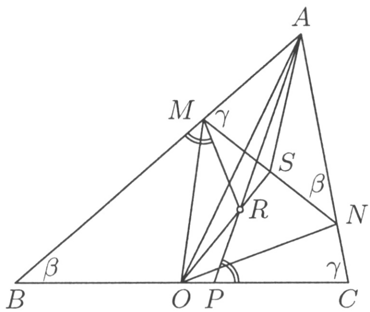
1. Označme S střed úsečky MN a P průsečík osy úhlu BAC se stranou BC. Protože trojúhelníky AMN a ACB jsou podobné (to plyne z vlastností tětivového čtyřúhelníku $BCNM$), přičemž těžnici AS odpovídá těžnice AO, je $|\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle CAS|$ (obr. 43), takže osa úhlu BAC je zároveň i osou úhlu OAS. Proto

$$\frac{|RS|}{|RO|} = \frac{|AS|}{|AO|}.$$

Z uvedené podobnosti dále plyne

$$\frac{|AS|}{|AO|} = \frac{|MN|}{|BC|} = \frac{|MS|}{|BO|} = \frac{|MS|}{|MO|},$$

což spolu s předchozí rovností znamená, že MR je osou úhlu OMS.



Obr. 43

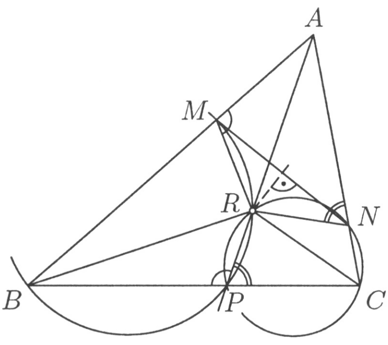
Označme vnitřní úhly trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Protože $|OM| = |OB|$, tedy $|\sphericalangle BMO| = \beta$, a protože $|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle BCA| = \gamma$, vychází velikost úhlu OMN jako α. Je tudíž $|\sphericalangle BMR| = \beta + \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle CPA|$. Dostali jsme, že čtyřúhelník $BPRM$ je tětivový. Analogicky je tětivový i čtyřúhelník $CPRN$. Je tedy bod $P \in BC$ společným bodem obou kružnic opsaných trojúhelníkům BMR a CNR, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení. (Podle *Františka Konopeckého.*) Protože body M a N leží na kružnici se středem O, je $|OM| = |ON|$. Trojúhelník MNO je tedy rovnoramenný a osa jeho úhlu MON je zároveň osou úsečky MN. Bod R, který je průsečíkem osy úhlu MAN s osou protější strany MN trojúhelníku AMN, leží proto na kružnici trojúhelníku AMN opsané. Přitom obě osy splynou, jen když $|AM| = |AN|$, což vzhledem k předpokladu $|AB| \neq |AC|$ nelze, neboť z vlastností tětivového čtyřúhelníku $BCNM$ snadno plyne, že trojúhelníky AMN a ACB jsou podobné (shodují se ve dvou úhlech).

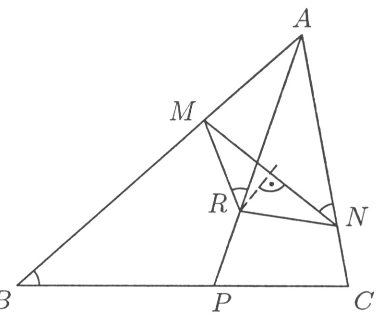
Z mocnosti bodu A ke kružnici s průměrem BC plyne, že bod A má stejnou mocnost i k oběma kružnicím opsaným trojúhelníkům BMR a CNR (obr. 44). Označíme-li P druhý společný bod těchto dvou kružnic (jedním je bod R), musí bod A ležet na jejich společné sečně PR (to je právě množina všech bodů, jež mají k oběma kružnicím stejnou mocnost). Abychom ukázali, že bod P leží na straně BC, spočteme velikost úhlu BPC z tětivových čtyřúhelníků $BPRM$ a $CPRN$:

$$|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BPR| + |\sphericalangle CPR| = |\sphericalangle AMR| + |\sphericalangle ANR| = 180°,$$

neboť AMR a ANR jsou protější úhly tětivového čtyřúhelníku $AMRN$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 44



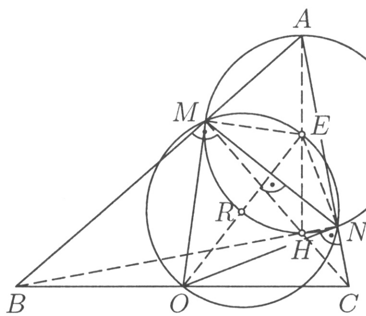
Obr. 45

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení ukážeme nejprve, že bod R leží na kružnici opsané trojúhelníku AMN. Označme dále P ten bod strany BC, v němž ji protne osa AR úhlu BAC (obr. 45). Protože čtyřúhelník $AMRN$ je tětivový, je $|\sphericalangle ARM| = |\sphericalangle ANM| = |\sphericalangle ABC|$, což znamená, že i čtyřúhelník $BPRM$ je tětivový. Analogicky ukážeme, že i čtyřúhelník $PCNR$ je tětivový. Bod P na úsečce BC je pak ovšem průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům BMR a CNR, jak jsme měli dokázat.

Poznámky. V předchozích dvou řešeních jsme nijak nevyužili, že střed kružnice opsané čtyřúhelníku $BCNM$ je zároveň středem strany BC.

Tvrzení ve skutečnosti platí pro libovolnou kružnici s tětivou BC, pokud není opsána trojúhelníku ABC (pak by bylo $M = N = A = R$). Uvedená situace je vlastně speciálním případem tzv. *Miquelovy věty*, když za jeden z bodů zvolíme průsečík osy úhlu s protější stranou: Je-li na každé straně daného trojúhelníku zvolen bod, tři kružnice určené dvojicemi bodů na sousedních stranách a jejich společným vrcholem mají společný bod.

Pokud ovšem předpokládáme, že střed O kružnice opsané čtyřúhelníku $BCNM$ je středem strany BC, vyplývá z prvního řešení, že uvažovaný bod R je středem kružnice vepsané trojúhelníku MNO. V tom případě jsou body M a N patami výšek trojúhelníku ABC. Kružnice nad průměrem AH, kde H je průsečík obou výšek, je tedy kružnicí opsanou trojúhelníku AMN (obr. 46). Paty výšek, středy stran a středy spojnic



Obr. 46

průsečíku výšek s vrcholy leží na tzv. *kružnici devíti bodů* daného trojúhelníku. Pro trojúhelník ABC jsou čtyřmi z těchto devíti bodů body M, N, O a střed E úsečky AH, a protože $|EM| = |EN|$, je to zároveň střed příslušného oblouku MN kružnice opsané trojúhelníku MNO. Ten má však tu vlastnost, že leží jednak na ose úhlu MON, jednak má od středu kružnice vepsané trojúhelníku MNO stejnou vzdálenost jako od obou vrcholů M, N (tuto vlastnost hezky využívá např. řešení 2. úlohy na 43. MMO, viz ročenku 51. ročníku MO), tj. leží na kružnici opsané trojúhelníku AMN. Jak už víme, tímto bodem je bod R.

2. (Podle *Alexandra Kazdy.*) Ukážeme, že řešením jsou jen mnohočleny $P(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4$ pro libovolná reálná α_1 a α_2.

Nechť mnohočlen P splňuje podmínky úlohy. Je-li $a = b = 0$, je $ab + bc + ca = 0$ pro každé reálné číslo c. Dostáváme proto

$$P(0-0) + P(0-c) + P(c-0) = 2P(0+0+c),$$

neboli

$$P(0) + P(-c) = P(c)$$

pro libovolné reálné c. Dosazením $c = 0$ dostaneme $P(0) = 0$, takže $P(c) = P(-c)$ pro všechna reálná c. Mnohočlen P je tudíž sudá funkce a musí být tvaru

$$P(x) = a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + \ldots + a_1 x^2, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0.$$

Ukážeme nyní, že stupeň mnohočlenu P je nejvýše 4.

Rovnost $ab+bc+ca = 0$ je homogenní, proto ji s trojicí (a, b, c) splňuje i každá trojice (ta, tb, tc) pro libovolné reálné t. Protože $ab + bc + ca = ab+(a+b)c$, vidíme, že pro $a+b = 1$, $c = -ab$ je $ab+bc+ca = 0$, takže pro libovolná reálná čísla s a t uvedenou rovnost splňuje i trojice $a = st$, $b = (1-s)t$, $c = -ab = (s^2 - s)t$. Dosazením této trojice do rovnosti ze zadání dostaneme pro všechna reálná s a t rovnost

$$P\left((2s-1)t\right) + P\left((1-s^2)t\right) + P\left((s^2-2s)t\right) = 2P\left((s^2-s+1)t\right).$$

Pro pevné s ji můžeme považovat za rovnost mnohočlenů v proměnné t. Porovnáním vedoucích koeficientů (u mocnin t^{2n}) na obou stranách dostáváme pro všechna reálná s rovnost

$$(2s-1)^{2n} + (1-s^2)^{2n} + (s^2-2s)^{2n} = 2(s^2-s+1)^{2n}. \tag{1}$$

Porovnejme nyní koeficienty u mocnin s^{4n-2}. Na pravé straně je dle polynomické věty mnohočlen

$$2 \sum_{i+j \leqq 2n} \frac{(2n)!}{i!\,j!\,(2n-i-j)!}(-1)^j s^{2i+j},$$

přičemž $2i + j = 4n - 2$ jedině pro $j = 0$, $i = 2n - 1$ a pro $j = 2$, $i = 2n - 2$ (j musí být sudé a z podmínky $i + j \leqq 2n$ díky rovnosti $i = (2i + j) - (i + j)$ plyne $i \geqq 2n - 2$, tudíž $j \leqq 2$). Zmíněná mocnina má tedy na pravé straně koeficient

$$2\left[\binom{2n}{1} + \binom{2n}{2}\right] = 4n^2 + 2n,$$

zatímco na levé straně rovnosti (1) dostaneme podle binomické věty koeficient

$$\binom{2n}{2-2n}2^{4n-2} - \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2}2^2 = \begin{cases} 6 & \text{pro } n = 1, \\ 8n^2 - 6n & \text{pro } n \geqq 2. \end{cases}$$

Vidíme, že rovnosti obou koeficientů vyhovuje $n = 1$, a pro $n \geqq 2$ dostáváme rovnici $4n(n-2) = 0$, které vyhovuje $n = 2$. Podmínkám úlohy tak mohou vyhovět jedině mnohočleny tvaru $P(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4$ pro reálná α_1 a α_2.

Nyní ukážeme, že každý mnohočlen uvedeného tvaru splňuje podmínky úlohy. Abychom to ověřili, uvědomme si nejdříve, že libovolná lineární kombinace dvou mnohočlenů, jež splňují podmínky úlohy, je rovněž splňuje. Stačí to tedy ověřit pro mnohočleny x^2 a x^4.

To, že vyhovuje x^2, vyplývá z rovnosti

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2 = -6(ab+bc+ca).$$

Ověřme požadovanou rovnost i pro jednočlen x^4. Nechť $ab + bc + ca = 0$ a položme $p = a - b$, $q = b - c$ a $r = c - a$. Při ověřování x^2 jsme vlastně ukázali, že

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2(a+b+c)^2.$$

Protože $p + q + r = 0$, postupně dostaneme:

$$pq + qr + rp = -\tfrac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2) = -(a+b+c)^2,$$
$$(pq)^2 + (qr)^2 + (rp)^2 = (pq + qr + rp)^2 - 2pqr(p+q+r) = (a+b+c)^4,$$

takže

$$p^4 + q^4 + r^4 = (p^2 + q^2 + r^2)^2 - 2\left((pq)^2 + (qr)^2 + (rp)^2\right) = 2(a+b+c)^4,$$

což je požadovaná rovnost.

Jiné řešení. Vraťme se k rovnosti (1) předchozího řešení. Volbou $s = -2$ vyjde $5^{2n} + 3^{2n} + 8^{2n} = 2 \cdot 7^{2n}$, takže $8^{2n} < 2 \cdot 7^{2n}$. Ale už pro $n = 3$ platí $8^{2n} > 2 \cdot 7^{2n}$ ($8^{2 \cdot 3} = 262\,144 > 235\,298 = 2 \cdot 7^{2 \cdot 3}$), tím spíš to platí pro $n > 3$. Takže $n \leqq 2$, což znamená, že $P(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4$ pro reálná α_1 a α_2. Zbývá jen ověřit, že všechny mnohočleny tohoto tvaru úloze vyhovují, což učiníme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Pro každé reálné t splňuje trojice $(a, b, c) = (6t, 3t, -2t)$ podmínku $ab + bc + ca = 0$. Dosazením do dané rovnosti dostáváme

$$P(3t) + P(5t) + P(-8t) = 2P(7t).$$

Pokud tedy $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, platí nutně pro každé $i = 0, 1, 2, \ldots$ rovnost

$$\left(3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i\right) a_i = 0.$$

Výraz v závorkách je záporný pro lichá i a kladný pro $i = 0$ a pro všechna sudá $i \geqq 6$. Jen pro $i = 2$ a $i = 4$ je výraz nulový. Proto musí být $P(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4$ pro reálná α_1 a α_2. Zbývá jen ověřit, že všechny mnohočleny tohoto tvaru úloze vyhovují, což učiníme stejně jako v prvním řešení.

Jiné řešení. (Podle Tony Zhanga.) Jak jsme už zjistili v úvodu prvního řešení, je hledaný mnohočlen P sudá funkce s nulovým absolutním členem, je tedy tvaru $P(x) = x^2 f(x^2)$ pro vhodný mnohočlen f. Ukážeme, že jeho stupeň je nejvýše 1.

Daná podmínka má pro mnohočlen f tvar

$$(a-b)^2 f\big((a-b)^2\big) + (b-c)^2 f\big((b-c)^2\big) + \\ + (c-a)^2 f\big((c-a)^2\big) = 2(a+b+c)^2 f\big((a+b+c)^2\big). \qquad (2)$$

Mezi čísly a, b, c, jež splňují rovnost $ab+bc+ca = 0$, najdeme taková, pro něž bude $a-b = b-c$, tj. $a+c = 2b$, takže $0 = (a+c)b+ca = 2b^2+(2b-a)a$. Z této kvadratické rovnice vyjde $a = b \pm b\sqrt{3}$, takže do (2) můžeme dosadit $a = (1-\sqrt{3})b$ a $c = (1+\sqrt{3})b$ a dostaneme

$$6b^2 f(3b^2) + 12b^2 f(12b^2) = 18b^2 f(9b^2),$$

což můžeme přepsat jako

$$12b^2\big(f(12b^2) - f(9b^2)\big) = 6b^2\big(f(9b^2) - f(3b^2)\big),$$

anebo pro $b \neq 0$ jako

$$\frac{f(12b^2) - f(9b^2)}{3b^2} = \frac{f(9b^2) - f(3b^2)}{6b^2}. \qquad (3)$$

Protože $3b^2$ je libovolné kladné číslo, platí podle (3) pro každé reálné $x > 0$ rovnost

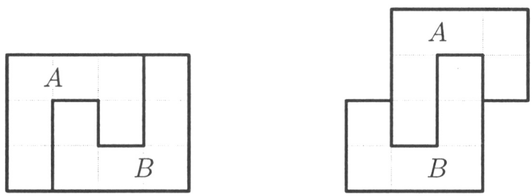
$$\frac{f(4x) - f(3x)}{x} = \frac{f(3x) - f(x)}{2x}. \qquad (4)$$

Obě strany (4) jsou (po zkrácení) mnohočleny proměnné x, takže musí jít o stejné mnohočleny. Je-li mnohočlen f stupně $k \geqq 1$ s vedoucím členem αx^k, jsou obě strany (4) mnohočleny stupně $k-1$ s vedoucími členy

$$\alpha(4^k - 3^k)x^{k-1}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\alpha(3^k-1)}{2}x^{k-1}.$$

Porovnáním těchto členů s ohledem na $\alpha \neq 0$ dostaneme po úpravě rovnici $2 \cdot 4^k = 3^{k+1} - 1$, která je splněna pouze pro $k = 1$, neboť pro $k \geqq 2$ máme $2 \cdot 4^k > 3^{k+1}$, jak snadno ověříme indukcí. Mnohočlen f je tudíž nejvýše lineární, $f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ a $P(x) = x^2 f(x^2) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4$. Zbývá jen ověřit, že všechny mnohočleny tohoto tvaru úloze vyhovují, což učiníme stejně jako v prvním řešení.

3. Předpokládejme, že pravoúhelník $m \times n$ je pokryt dlaždicemi dle zadání. Ke každé dlaždici v pokrytí přísluší jedno čtvercové pole pravoúhelníku, které dlaždice nepokrývá, které je však zároveň ze tří stran obklopeno jejími čtverci. Takové pole označíme jako „vnitřní pole" dlaždice. Zřejmě tedy ke každé dlaždici A v pokrytí můžeme přiřadit dlaždici B, která pokrývá „vnitřní pole" dlaždice A. Jsou jen dvě možnosti (až na otočení a souměrnost), jak takto dlaždici B k dlaždici A přiložit (obr. 47); v obou případech dlaždice A „recipročně" pokrývá vnitřní pole dlaždice B. To znamená, že v pokrytí jsou všechny dlaždice jednoznačně rozděleny do dvojic, z nichž každá vytváří buď obdélník 3×4, nebo nekonvexní osmiúhelník znázorněný na obr. 47 vpravo. Daný pravoúhelník lze tedy dlaždicemi pokrýt, právě když ho lze pokrýt *dvojútvary* složenými z 12 čtverců na obr. 47.



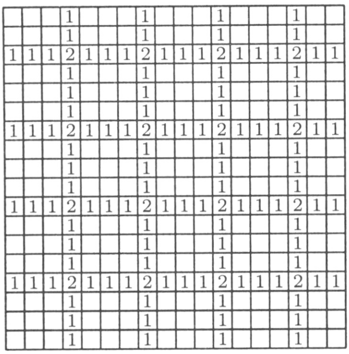
Obr. 47

Dále je vidět, že žádná ze stran daného pravoúhelníku nemůže mít délku 1, 2 či 5 čtverců (řádek či sloupec podél takové strany pravoúhelníku nedokážeme žádným způsobem pokrýt).

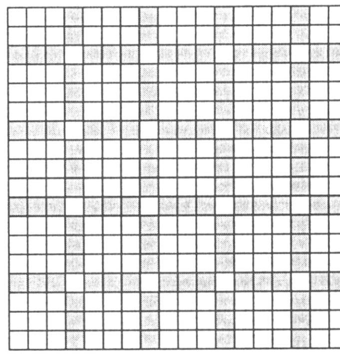
Naopak je zřejmé, že jen pomocí obdélníků 3×4 dokážeme pokrýt každý pravoúhelník $3a \times 4b$, speciálně tedy i pravoúhelník $12c \times 3$ a $12c \times \times 4$. A protože každé číslo $d \geqq 6$ lze napsat jako součet několika trojek a několika čtyřek, lze pokrýt i každý pravoúhelník $12c \times d$, pokud $d \notin \notin \{1, 2, 5\}$. Ukážeme, že tím jsou všechny možné pravoúhelníky, jež lze danými dlaždicemi pokrýt, vyčerpány.

Jestliže pravoúhelník $m \times n$ je pokryt dvojútvary složenými z 12 čtverců, je jeho obsah mn dělitelný dvanácti. Naším jediným úkolem je dokázat, že aspoň jedno z čísel m, n musí být dělitelné čtyřmi. Předpokládejme, že tomu tak není. Protože mn je dělitelné 4, jsou obě čísla m, n sudá. Ukážeme-li, že počet dvojútvarů v pokrytí musí být sudý, bude součin mn dělitelný dvaceti čtyřmi, což odporuje předpokladu, že ani jedno z čísel m, n není čtyřmi dělitelné.

První způsob. Označme v pravoúhelníku čtvercová pole každého čtvrtého sloupce a každého čtvrtého řádku jednotkami, přičemž na pole v průsečíku označených řádků a sloupců místo dvou jednotek napíšeme dvojku (obr. 48 pro $m = n = 18$, řádky počítáme odspodu jako u šachovnice). Protože počet řádků i sloupců pravoúhelníku je sudý, je součet všech čísel v něm sudý. Na druhé straně obdélník 3×4 pokryje čísla se součtem 3 nebo 7, zatímco osmiúhelníkový útvar z obr. 47 pokryje čísla se součtem 5 nebo 7. To znamená, že počet všech dvojútvarů v pokrytí je sudý.

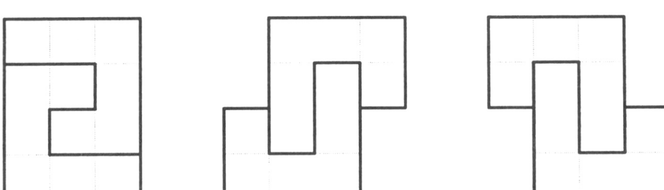


Obr. 48



Obr. 49

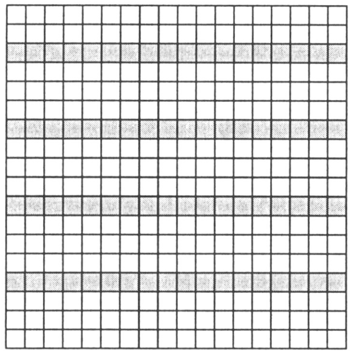
Druhý způsob. Místo čísel obarvíme čtvercová pole v každém čtvrtém sloupci a v každém čtvrtém řádku, přičemž společná pole v jejich průsečíku ponecháme neobarvená (obr. 49). Jestliže $m = 4i + 2$, $n = 4j + 2$, bude celkový počet tmavých polí $i(3j + 2) + j(3i + 2) = 2(3ij + i + j)$, což je sudé číslo. Zároveň není těžké se přesvědčit, že každý dvojútvar pokryje 3 nebo 5 obarvených čtverců. Jejich počet proto musí být sudý.



Obr. 50

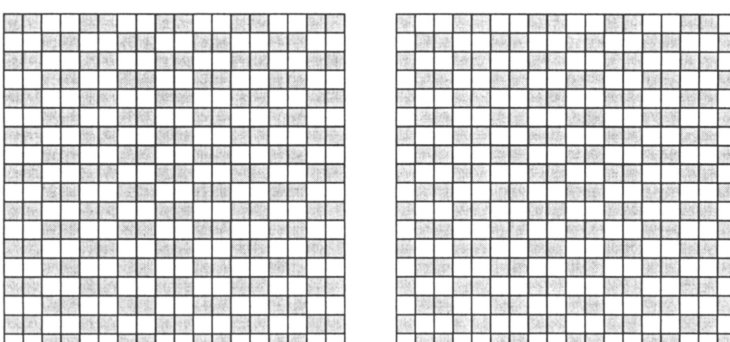
Třetí způsob. Dvojútvary v poloze na obr. 50 můžeme charakterizovat následujícím způsobem: V každém ze čtyř řádků jsou tři čtverce a v každém sloupci je sudý počet čtverců. Jestliže v daném pravoúhelníku obarvíme každý čtvrtý řádek (obr. 51), bude počet obarvených čtverců sudý.

Přitom dvojútvary z obr. 50 (v této poloze) pokryjí každý právě tři obarvené čtverce, zatímco dvojútvary, jež z nich vzniknou otočením o $90°$, jich díky uvedené charakterizaci pokryjí sudý počet. Počet dvojútvarů z obr. 50 v daném pokrytí je tedy sudý. Podobně obarvíme-li v daném pravoúhelníku každý čtvrtý sloupec, zjistíme, že i počet dvojútvarů, jež vzniknou z těch na obr. 50 otočením o $90°$, je sudý.



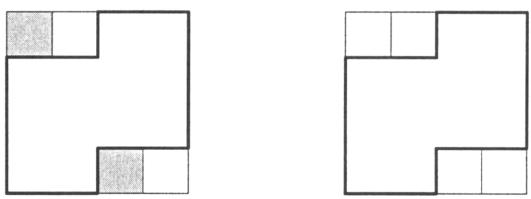
Obr. 51

Jiné řešení. Předpokládejme, že existuje pokrytí pravoúhelníku $m \times n$, kde $m \equiv n \equiv 2 \pmod 4$. Pomocí několika různých obarvení ukážeme, že počet všech osmiúhelníkových dvojútvarů musí být sudý i lichý zároveň, což samozřejmě nelze.



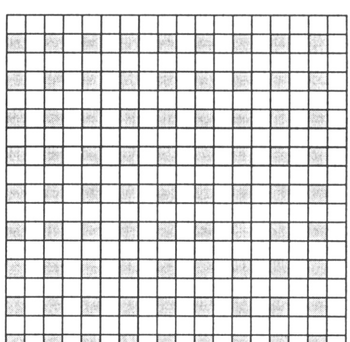
Obr. 52

Uvažujme dvě různá obarvení daného pravoúhelníku (obr. 52), v nichž jsou střídavě obarveny obdélníky 2×1, přičemž druhé obarvení se od prvého liší jen „posunutím“ o jeden sloupec doprava. V každém z nich je stejný počet tmavých i světlých polí (počet řádků je sudý). Zatímco každý z obdélníků 3×4 pokryje čtyři tmavá a čtyři světlá pole, pro osmiúhelníkové dvojútvary to vždy neplatí. Záleží totiž na jejich poloze vůči zvolenému obarvení. Podívejme se na ně jako na čtverce 4×4, z nichž jsme odřízli dva protější rohy 2×1 (orientované stejně jako obdélníky zmíněného obarvení). Oba odříznuté obdélníky zřejmě odkrývají stejně obarvená pole (obr. 53), proto v případě, že mají všechna čtyři pole stejnou barvu, bude se počet tmavých a světlých polí pokrytých takovým dvojútvarem lišit o čtyři. Počet útvarů, které vykazují tuto asymetrii v jednom obarvení, musí tedy být sudý. Totéž platí pro dvojútvary, které vykáží stejnou asymetrii v „posunutém“ obarvení (obě množiny jsou zjevně disjunktní!). Podobně i počet dvojútvarů orientovaných „svisle“, tj. s odříznutými obdélníky 1×2, je sudý (použijeme analogické obarvení, v němž jsou střídavě obarveny „svislé“ obdélníky 1×2).



Obr. 53

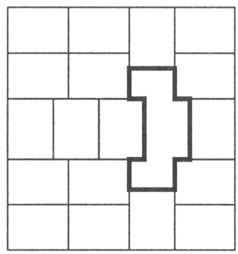
Obarvěme nyní daný pravoúhelník podle obr. 54. Počet tmavých polí je v něm lichý, přitom každý obdélník 3×4 pokryje dvě nebo čtyři tmavá pole, tj. sudý počet, zatímco osmiúhelníkové dvojútvary pokryjí vždy tři



Obr. 54

tmavá pole. Odtud ovšem plyne, že jejich celkový počet musí být lichý. Došli jsme ke sporu.

Poznámka. Tato úloha byla z šestice úloh nejobtížnější. Jedním z důvodů bylo patrně i to, že obvyklý argument s vhodným obarvením polí pravoúhelníku sice funguje, ale jak ukazují předvedená řešení, jeden způsob obarvení často nestačí. Přestože hledaná množina je totožná s množinou všech pravoúhelníků, jež lze pokrýt pouze obdélníky 3×4, není pravda, že by neexistovala pokrytí využívající osmiúhelníkový dvojútvar (obr. 55).



Obr. 55

4. Vzhledem k symetrii stačí ukázat, že za daných předpokladů platí $t_1 < t_2 + t_3$. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \geqq \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}, \qquad t_2 + t_3 \geqq 2\sqrt{t_2 t_3}, \tag{1}$$
$$\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \geqq 2 \quad \text{pro všechna } i,\ j.$$

Úpravou pravé strany dané nerovnosti tak dostáváme

$$\begin{aligned} n^2 + 1 > n + \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right) = \\ = n + t_1\left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + \frac{1}{t_1}(t_2 + t_3) + \sum_{\substack{1 \leqq i < j \leqq n \\ (i,j) \neq (1,2),(1,3)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right) \geqq \\ \geqq n + 2\frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + 2\frac{\sqrt{t_2 t_3}}{t_1} + 2\left[\binom{n}{2} - 2\right] = \\ = 2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4, \end{aligned}$$

kde jsme označili $a = t_1/\sqrt{t_2 t_3}$. Z poslední úpravy vychází nerovnost

$$0 > 2a + \frac{2}{a} - 5 = \frac{1}{a}(2a^2 - 5a + 2) = \frac{1}{a}(2a - 1)(a - 2),$$

odkud plyne $a < 2$. Je tedy $t_1 = a\sqrt{t_2 t_3} < 2\sqrt{t_2 t_3} \leqq t_2 + t_3$ (ještě jednou jsme využili druhou nerovnost v (1)), což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. (Podle *Arne Smeetse* z Belgie, který získal stříbrnou medaili.) Dokážeme tvrzení sporem, a to nejprve pro $n = 3$. Podle známé nerovnosti mezi aritmetickým a harmonickým průměrem

$$\frac{a+b}{2} \geqq \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq \frac{4}{a+b}$$

pro tři kladná čísla $a = t_1$, $b = t_2$, $c = t_3$ platí

$$(a+b+c)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) \geqq (a+b+c)\Big(\frac{4}{a+b} + \frac{1}{c}\Big) = 5 + \frac{4c}{a+b} + \frac{a+b}{c},$$

takže pokud předpokládáme, že $c \geqq a + b$, je podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$(a+b+c)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) \geqq 5 + 5\sqrt[5]{\frac{c^4}{(a+b)^4} \cdot \frac{a+b}{c}} \geqq 5 + 5 = 10. \qquad (2)$$

To odporuje dané nerovnosti (pro $n = 3$ je $n^2 + 1 = 10$), takže kladná čísla a, b a c splňují trojúhelníkovou nerovnost $c < a + b$.

Pro $n \geqq 4$ označme $a = t_1$, $b = t_2$, $c = t_3$, $S = \sum\limits_{i \geqq 4} t_i$, $T = \sum\limits_{i \geqq 4} 1/t_i$ a předpokládejme opět, že $c \geqq a + b$. Součin na pravé straně dané nerovnosti můžeme pak vyjádřit jako

$$P = (a+b+c)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) + S\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) + T(a+b+c) + ST.$$

Podle Cauchyovy nerovnosti je $ST \geqq (n-3)^2$, podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem a podle (2) pak je

$$\begin{aligned} S\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) + T(a+b+c) &\geqq 2\sqrt{ST(a+b+c)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big)} \geqq \\ &\geqq 2(n-3)\sqrt{10} > 6(n-3). \end{aligned}$$

To dohromady dává

$$P \geqq 10 + 2(n-3)\sqrt{10} + (n-3)^2 = n^2 + 1,$$

což opět odporuje dané nerovnosti.

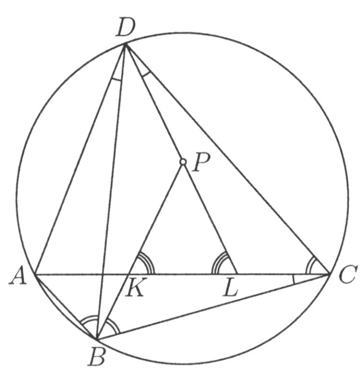
Poznámka. Z předchozího výpočtu je vidět, že místo n^2+1 mohl být na levé straně předpokládané nerovnosti i výraz

$$10 + 2\sqrt{10}(n-3) + (n-3)^2 = \left(n - 3 + \sqrt{10}\right)^2,$$

který je větší než n^2+1 pro každé $n \geqq 4$ (pro $n = 3$ se oba výrazy rovnají).

5. Protože vymezení bodu P je symetrické vůči vrcholům B a D, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že bod P leží v trojúhelníku ACD. Podobně i podmínka rovnosti příslušných úhlů charakterizující bod P je symetrická vůči vrcholům A a C ($|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DBA|$, právě když $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle DBC|$). Můžeme tedy předpokládat, že bod P leží v trojúhelníku BCD.

Předpokládejme nejprve, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a označme K, L průsečíky úhlopříčky AC s polopřímkami PB a DP (obr. 56). Z rovnosti příslušných obvodových úhlů nad tětivami AB a AD plyne, že trojúhelníky DAB, DLC a CKB jsou podobné. Z rovnosti vnějších úhlů při vrcholech L a K posledních dvou uvedených trojúhelníků dostáváme, že trojúhelník PKL je rovnoramenný, takže $|PK| = |PL|$.



Obr. 56

Trojúhelníky ADL, BDC jsou také podobné: zřejmě se shodují v úhlu při společném vrcholu D a v obvodových úhlech nad tětivou CD. Využitím podobností $ADL \sim BDC$ a $DAB \sim CKB$ pak můžeme psát

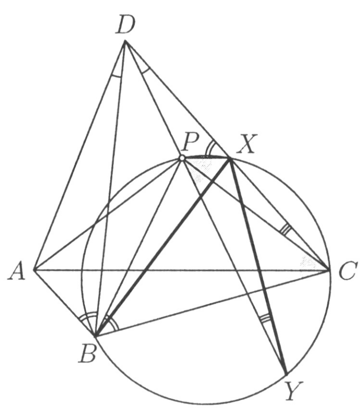
$$\frac{|AL|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|CK|}{|BC|},$$

takže $|AL| = |CK|$. To spolu s rovností $|PK| = |PL|$ dává $|AP| = |CP|$.

Obráceně nechť $|AP| = |CP|$. Sestrojme kružnici opsanou trojúhelníku BCP a označme X, Y další průsečíky této kružnice s polopřímkami DC a DP (obr. 57). Protože $BCXP$ je tětivový, je $|\sphericalangle PXD| = |\sphericalangle PBC|$, takže trojúhelníky PDX a ADB jsou podobné. Z této podobnosti navíc plyne spirální podobnost trojúhelníků $ADP \sim BDX$. Nakonec z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou PX dostáváme podobnost $DPC \sim DXY$. Využitím posledních dvou podobností pak máme

$$\frac{|AP|}{|BX|} = \frac{|DP|}{|DX|} = \frac{|PC|}{|XY|},$$

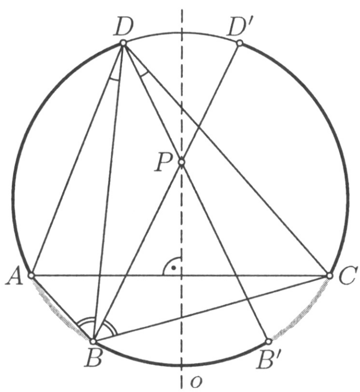
takže $|BX| = |XY|$. V uvažované kružnici jsme našli shodné tětivy se společným krajním bodem X). Tětivě BX přísluší obvodový úhel BCD, a protože ve zvolené konfiguraci je $|\sphericalangle BCD| < |\sphericalangle YCD|$, shoduje se s obvodovým úhlem XPY nad tětivou YX, který je vnějším úhlem při vrcholu P trojúhelníku PDX shodným s vnějším úhlem při vrcholu A trojúhelníku ADB. Platí tedy $|\sphericalangle BCD| = 180° - |\sphericalangle BAD|$ a čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, jak jsme chtěli dokázat.



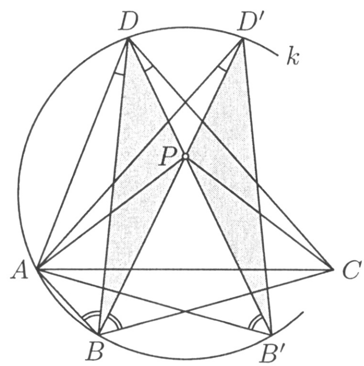
Obr. 57

Jiné řešení. (Podle *Františka Konopeckého.*) Vzhledem k tomu, že úhlopříčka BD není osou ani jednoho z vnitřních úhlů ABC, CDA, shodnosti úhlů určující polohu bodu P znamenají, že bod P nemůže ležet na úhlopříčce BD.

Předpokládejme nejprve, že $ABCD$ je tětivový. Označme B' a D' průsečíky opsané mu kružnice s polopřímkami opačnými k PD, resp. k PB. Shodnost úhlů ABD a PBC (obr. 58) tak znamená shodnost příslušných oblouků AD a CD'. Podobně se shodují i oblouky AB a CB'. To ale znamená, že bod B' je obrazem bodu B a bod D' obrazem bodu D v osové souměrnosti podle osy o úsečky AC. V této osové souměrnosti je tak úsečka BD' obrazem úsečky $B'D$, a jejich průsečík P proto leží na ose úhlopříčky AC. Tudíž $|AP| = |CP|$.



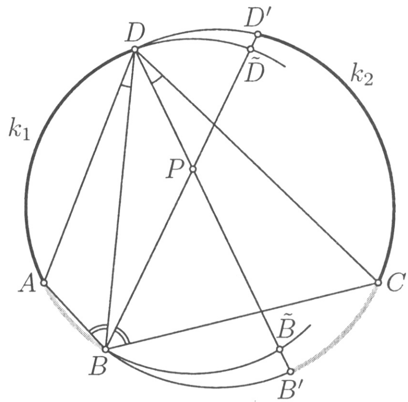
Obr. 58



Obr. 59

Obráceně nechť $|AP| = |CP|$. Uvažujme kružnici k opsanou trojúhelníku ABD a označme B' a D' její průsečíky s polopřímkami opačnými k PD, resp. k PB (obr. 59). Ze shodnosti obvodových úhlů nad tětivou BB' resp. DD' vyplývá, že trojúhelníky BPD a $B'PD'$ jsou podobné podle věty *uu*. Zmíněné shodnosti navíc znamenají, že i trojuhelníky BDC a $B'D'A$ se shodují ve dvojicích úhlů při stranách BD a $B'D'$, takže jsou podobné se stejným poměrem podobnosti jako trojúhelníky BPD a $B'PD'$. A protože v této podobnosti si odpovídají dvě shodné úsečky CP a AP, jedná se o shodnost (snadno nahlédneme, že se jedná o osovou souměrnost). Tato shodnost převádí kružnici k opsanou trojúhelníku ABD na sebe, proto bod C, který je obrazem bodu A, leží rovněž na této kružnici, a čtyřúhelník $ABCD$ je tedy tětivový.

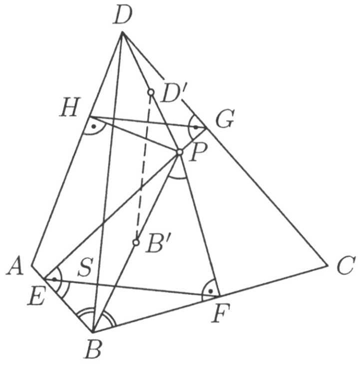
Jiné řešení. Dokážeme obrácenou implikaci trochu jinak než v předchozím řešení. Předpokládejme, že $|AP| = |CP|$ a označme k_1 kružnici opsanou trojúhelníku ABD a k_2 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Označme dále $\tilde{B}$, $\tilde{D}$ průsečíky polopřímek DP a BP s kružnicí k_1 a B', D' s kružnicí k_2 (obr. 60). Z rovnosti úhlů $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DBA|$ plyne, že



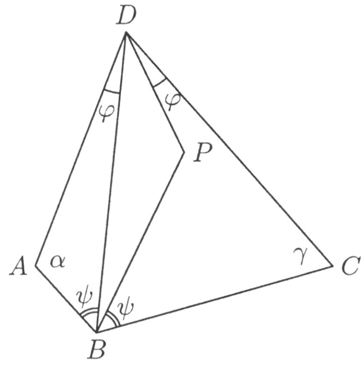
Obr. 60

příslušné oblouky DA kružnice k_1 a $D'C$ kružnice k_2 mají stejnou délku v obloukové míře, a podobně díky rovnosti $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle BDA|$ mají stejnou délku i oblouky AB kružnice k_1 a $B'C$ kružnice k_2. Existuje tedy nepřímá podobnost f, jež zobrazuje kružnici k_1 na k_2, přičemž bodům D, A, B v této podobnosti postupně odpovídají body D', C a B' a dále bodům $\tilde{B}$, $\tilde{D}$ pak body B a D (i odpovídající oblouky $B\tilde{B}$, $B'B$ a $D\tilde{D}$, DD' mají očividně stejnou obloukovou míru). Protože bod P je průsečíkem přímek $B\tilde{D}$ a $\tilde{B}D$, zobrazí se podobností f na průsečík přímek $B'D$ a BD', což je opět bod P. A protože $|AP| = |CP| = |f(A)f(P)|$, je poměr podobnosti f roven 1, takže je také $|PB'| = |f(P)f(B)| = |PB|$ a podobně i $|PB| = |P\tilde{B}|$. Body B' a $\tilde{B}$ tak nutně splývají a kružnice k_1, k_2 jsou totožné.

Jiné řešení. Označme po řadě E, F, G, H kolmé průměty bodu P na jednotlivé strany AB, BC, CD a DA daného čtyřúhelníku. Čtyřúhelník $EBFP$ je zřejmě tětivový, takže $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle BPF|$. Označíme-li S průsečík příčky EF s úhlopříčkou BD (obr. 61), vidíme, že trojúhelníky EBS, PBF jsou podobné, neboť dle předpokladu $|\sphericalangle EBS| = |\sphericalangle FBP|$. To znamená, že $|\sphericalangle BSE| = |\sphericalangle BFP| = 90°$, neboli příčka EF je kolmá na úhlopříčku BD. Analogicky zjistíme, že i příčka GH je kolmá na BD.



Obr. 61



Obr. 62

Označíme-li B' střed úsečky PB a D' střed úsečky PD, bude $B'D'$ střední příčkou trojúhelníku BPD, takže úsečka $B'D'$ je stejně jako úsečka BD kolmá na obě příčky EF a GH. Body B' a D' jsou ovšem zároveň středy příslušných Thaletových kružnic nad průměry PB a PD, takže $B'D'$ je osou obou příček EF i GH, $EFGH$ je tudíž rovnoramenný lichoběžník se základnami EF, GH. Z dalších dvou tětivových čtyřúhelníků $EAHP$ a $FCGP$ tak dostáváme následující rovnosti:

$$|AP| \cdot \sin|\sphericalangle BAD| = |EH| = |FG| = |CP| \cdot \sin|\sphericalangle BCD|.$$

Rovnost $|AP| = |CP|$ je tudíž ekvivalentní rovnosti $\sin|\sphericalangle BAD| = \sin|\sphericalangle BCD|$. Vzhledem k podmínkám úlohy nemůže bod P ležet na úhlopříčce BD. Označíme-li pro jednoduchost α a γ úhly při vrcholech A, C a φ, ψ oba úhly vystupující v definici bodu P (obr. 62), dostáváme pro velikost úhlu BPD ve čtyřúhelníku $BCDP$

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BPD| &= |\sphericalangle CPB| + |\sphericalangle CPD| = 360^\circ - \gamma - (\varphi + \psi) = \\ &= 180^\circ - \gamma + \alpha.\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že za daných předpokladů nemůže být $\alpha = \gamma$, takže rovnost $|AP| = |CP|$ je ekvivalentní rovnosti $\alpha + \gamma = 180^\circ$, což je ekvivalentní tomu, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.

6. Pruhovaných čísel je mnoho, obecně je však těžko dokážeme popsat tak, aby bylo vidět, čím jsou dělitelná. Zaměřme se proto na poměrně úzkou skupinu pruhovaných čísel obsahujících jen nuly a jedničky, o nichž dokážeme zjistit víc. Přesněji řečeno, budeme se snažit pro dané číslo n

vytvořit pruhované číslo tvaru $s_k = 1010\ldots101$, kde k je počet jedniček v jeho desítkovém zápisu, které bude násobkem n. Mezi pruhovanými čísly $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ najdeme díky Dirichletovu principu určitě dvě různá, která dávají při dělení číslem n stejný zbytek, takže jejich rozdíl je násobkem n. Přitom pro $k > l$ je

$$s_k - s_l = \underbrace{1010\ldots101}_{k \text{ jedniček}} - \underbrace{1010\ldots101}_{l \text{ jedniček}} = \underbrace{1010\ldots101}_{k-l \text{ jedniček}}\underbrace{00\ldots00}_{2l \text{ nul}} = s_{k-l} \cdot 10^{2l}.$$

Pro každé n umíme tedy najít k a l tak, že $n \mid s_{k-l} \cdot 10^{2l}$. Pokud je číslo n s číslem 10 nesoudělné, tak dokonce $n \mid s_{k-l}$, tudíž n má pruhovaný násobek.

Vidíme, že problém je s čísly n, která jsou sudá nebo dělitelná pěti. Pro ně musíme pruhované násobky hledat v jiném tvaru.

Pokusme se je nejprve najít pro čísla n, jež jsou mocninou čísla 5, tj. pro čísla $n = 5^\alpha$. Pro malé hodnoty α snadno nacházíme, že čísla

$$5,\ 25 = 5^2,\ 125 = 5^3,\ 8\,125 = 13 \cdot 5^4,\ 78\,125 = 25 \cdot 5^5 \tag{1}$$

jsou pruhované násobky mocnin 5^1, 5^2, 5^3, 5^4 a 5^5. Pro větší α vytvoříme pruhovaný násobek čísla 5^α indukcí. Předpokládejme, že máme pruhovaný násobek A_k čísla 5^k, který má k číslic, přičemž první zleva může být i nula, což nijak nevadí, naopak je to pro náš postup výhodné, když nemusíme tuto „zbytečnou“ číslici brát do úvahy při rozhodování o pruhovanosti daného čísla, a vytvořme pruhovaný násobek čísla 5^{k+1} tak, že na začátek A_k připíšeme nějakou vhodnou číslici. Je-li tedy

$$A_k = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1} = 5^k \cdot d, \quad d \in \mathbb{N},\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\},$$

takový pruhovaný násobek, připojením číslice a_{k+1} na jeho začátek dostaneme

$$A_{k+1} = \overline{a_{k+1} A_k} = a_{k+1} \cdot 10^k + A_k = 10^k a_{k+1} + 5^k d = 5^k (2^k a_{k+1} + d).$$

Aby A_{k+1} bylo pruhované a zároveň násobek 5^{k+1}, stačí a_{k+1} zvolit tak, aby mělo opačnou paritu než a_k a aby $2^k a_{k+1} + d$ bylo dělitelné pěti. To zřejmě jde vždy, protože pro volbu a_{k+1} máme 5 různých možností (podle parity první číslice čísla A_k buď číslice 1, 3, 5, 7, 9, anebo 0, 2, 4, 6, 8) a pro každou z nich dává číslice a_{k+1}, a tedy i číslo $2^k a_{k+1} + d$ jiný zbytek při dělení pěti (čísla 2^k a 5 jsou nesoudělná). Jeden z těch zbytků tedy musí být nulový a v tom případě je $2^k a_{k+1} + d$ pěti dělitelné. Ukázali jsme, že všechny mocniny pěti mají pruhované násobky. Přitom z uvedeného postupu vyplývá, že pro dané $n = 5^\alpha$ umíme pruhovaný násobek vytvořit tak, aby měl sudý počet číslic (včetně případné nuly na začátku) a končil číslicí 5.

Věnujme se teď mocninám čísla dvě. Opět ukážeme, že pro každé $n = 2^\beta$ existuje jeho pruhovaný násobek. Postup bude obdobný jako při mocninách pěti, budeme však přidávat až dvě číslice a na vytvářená čísla budeme klást přísnější požadavky. Přesněji, dokážeme, že pro každé přirozené k existuje $(2k-1)$-ciferné pruhované číslo B_k, které je dělitelné číslem 2^{2k-1}, ale není dělitelné číslem 2^{2k} a jehož všechny sudé číslice jsou dvojky. Pro první krok indukce máme pruhovaná čísla

$$B_1 = 2, \quad B_2 = 232 = 2^3 \cdot 29, \quad B_3 = 27\,232 = 2^5 \cdot 851,$$
$$B_4 = 2\,127\,232 = 2^7 \cdot 16\,619.$$

Předpokládejme tedy, že máme pruhované číslo

$$B_k = \overline{b_{2k-1} b_{2k-2} \dots b_1} = 2^{2k-1} \cdot d,$$
$$d \in \mathbb{N} \text{ liché }, b_{2i} \in \{1, 3, 5, 7\} \text{ a } b_{2i-1} = 2 \text{ pro } 1 \leqq i \leqq k$$

(protože B_k je pruhované a sudé, je i číslice b_{2k-1} sudá). Chceme najít (dvojmístné) číslo $b = \overline{2b_{2k}}$ ($b_{2k} \in \{1, 3, 5, 7\}$) tak, aby

$$B_{k+1} = \overline{bB_k} = b \cdot 10^{2k-1} + B_k = 10^{2k-1} b + 2^{2k-1} d = 2^{2k-1}(5^{2k-1} b + d)$$

bylo dělitelné číslem 2^{2k+1}, ale nebylo dělitelné číslem 2^{2k+2}. Potřebujeme tedy, aby $5^{2k-1}b + d$ bylo dělitelné čtyřmi, ale nebylo dělitelné osmi. Podle předpokladu je d liché, dává tedy při dělení osmi jeden ze zbytků 1, 3, 5 nebo 7. Za b proto stačí zvolit jedno z čísel 21, 23, 25 anebo 27 tak, aby $5^{2k-1}b$ dávalo při dělení osmi takový zbytek, který po přičtení d dá zbytek 4 (tj. dává-li d zbytek 1, volíme b tak, aby $5^{2k-1}b$ dávalo zbytek 3, dává-li 3, chceme zbytek 1, pro zbytek 5 zbytek 7 a pro zbytek 7 zbytek 5). Protože 5^{2k-1} je nesoudělné s 8 a čísla 21, 23, 25 a 27 dávají při dělení osmi různé liché zbytky, dostaneme pro jednu z hodnot $b \in \{21, 23, 25, 27\}$ při dělení čísla $5^{2k-1}b$ osmi potřebný zbytek. Našli jsme tedy pruhované násobky i pro mocniny dvou. Přitom když před B_k připíšeme libovolnou lichou číslici, dostaneme pruhované číslo, které je rovněž násobkem 2^{2k-1}, protože B_k má $2k-1$ číslic (přičítáme $b \cdot 10^{2k-1}$). Umíme tedy ke každému $n = 2^\beta$ najít pruhované číslo, které má sudý počet číslic.

Takto vyzbrojeni můžeme přejít k obecnému případu, kdy $n = 5^\alpha \cdot \cdot 2^\beta \cdot m$, přičemž m není dělitelné dvěma ani pěti. Pro $\alpha = \beta = 0$ jsme už úlohu vyřešili (číslo n má pruhovaný násobek z nul a jedniček).

Uvažujme případ, kdy $\beta = 0$. Číslo 5^α má pruhovaný násobek se sudým počtem číslic, označme ho M. Zřejmě i číslo

$$S_k = \underbrace{\overline{MM\dots M}}_{k \text{ čísel } M}$$

je pruhovaným násobkem 5^α. Stejnou úvahou jako na začátku najdeme k a l tak, že $m \mid S_{k-l}$. Pak je S_{k-l} pruhovaným násobkem n.

Úplně stejně najdeme pruhovaný násobek n i v případě, kdy $\alpha = 0$.

Je-li $\beta = 1$ a $\alpha \geqq 1$, stačí k číslu S_{k-l}, které jsme našli pro $n = 5^\alpha \cdot m$, připsat zprava nulu. Dostaneme pruhované číslo (M, a tedy i S_{k-l} končilo číslicí 5), které bude násobkem dvou i čísla $5^\alpha \cdot m$, tj. bude násobkem $5^\alpha \cdot 2^1 \cdot m$.

Zůstal případ, kdy $\beta \geqq 2$ a $\alpha \geqq 1$. V takovém případě je ale $n = 5^\alpha \cdot \cdot 2^\beta \cdot m$ násobkem čísla 20, jehož každý násobek končí některým z dvojčíslí 00, 20, 40, 60, 80, takže není nikdy pruhovaný.

Odpověď. Hledanými čísly jsou všechna čísla, která nejsou násobkem čísla 20.

Jiné řešení. (Podle *Tiankai Liu* (USA), který získal zlatou medaili.) Protože každý násobek 20 končí dvěma sudými číslicemi, nemohou mezi hledaná čísla patřit násobky 20. Ukážeme, že každé jiné přirozené číslo má pruhovaný násobek. Protože dělitel takového čísla má stejnou vlastnost, můžeme dále předpokládat, že n je sudé.

Nejprve ukážeme, že pro čísla n tvaru $n = 2^\alpha$ nebo $n = 2 \cdot 5^\alpha$ ($\alpha \geqq 1$) existuje pruhovaný násobek $X(n)$, který má n číslic. Položme (pro n sudé)

$$M = \frac{10^{n+1} - 10}{99} = \underbrace{\overline{101010\dots10}}_{n \text{ číslic}}.$$

To je zřejmě pruhované číslo a pruhované bude i číslo

$$M + \sum_{i=0}^{k} e_i \cdot 10^i,$$

kde e_i jsou sudé číslice a $k \leqq n - 1$. Navíc poměrně snadno ověříme, že podle toho, zda bylo $n = 2^\alpha$ nebo $2 \cdot 5^\alpha$, dokážeme vybrat posloupnost číslic $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1} \in \{0,2,4,6,8\}$ tak, že pro každé $k \leqq n-1$ je výše uvedené číslo dělitelné číslem 2^{k+2}, resp. $2 \cdot 5^{k+1}$.

Krátce naznačíme, jak lze při výběru vhodných číslic e_i postupovat např. pro $n = 2 \cdot 5^\alpha$ (zajímá nás samozřejmě jen dělitelnost číslem 5^{k+1}, protože se jedná vesměs o čísla sudá). Protože čísla 0, 2, 4, 6, 8 tvoří úplnou soustavu zbytků modulo 5, snadno určíme e_0 tak, aby bylo $M + e_0 \equiv 0 \pmod 5$; to znamená, že modulo 5^2 dává $M + e_0$ některý ze zbytků 0, 5, 10, 15, 20. Z čísel 0, 2, 4, 6, 8, jež dávají modulo 5 všechny možné zbytky 0, 1, 2, 3 a 4, tedy dokážeme vybrat e_1 tak, že číslo $10e_1$ bude mít modulo 5^2 zbytek opačný, tj. $M + e_0 + 10e_1 \equiv 0 \pmod{5^2}$. A tak pokračujeme dále. Podobně postupujeme i pro $n = 2^\alpha$, kde samozřejmě vystačíme s volbou $e_i \in \{0, 2\}$.

Speciálně tedy umíme pro každé uvažované n najít číslice $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1} \in \{0,2,4,6,8\}$ tak, že číslo

$$X(n) = M + \sum_{i=0}^{n-1} e_i \cdot 10^i$$

bude pruhované a n-místné.

Je-li n obecně sudé číslo, které není dělitelné dvaceti, můžeme je zapsat ve tvaru $n'm$, kde $n' = 2^\alpha$ nebo $n' = 2 \cdot 5^\alpha$, přičemž m je nesoudělné s 10. Vezměme $N \geqq n'$ takové, že $10^N \equiv 1 \pmod m$ (takové N existuje, protože $10^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, kde φ je tzv. Eulerova funkce, takže pro dané m za N stačí vzít dostatečně velký násobek čísla $\varphi(m)$). Nechť

$$M = \frac{10^{2mN+1} - 10}{99} \cdot 10^{n'} + X(n') = \overline{\underbrace{101010\ldots10}_{2mN \text{ číslic}} X(n')}.$$

Protože existuje $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, pro něž $M \equiv -2k \pmod m$, je číslo[6]

$$X(n) = M + \sum_{i=1}^{k} 2 \cdot 10^{Ni}$$

nejen pruhované, ale i dělitelné m a samozřejmě i číslem n', neboť jak $n' = 2^\alpha$, tak i $n' = 2 \cdot 5^\alpha$ dělí 10^α, takže dělí i $10^{n'}$ a 10^N. Takto zvolené $X(n)$ je tedy hledaným pruhovaným násobkem čísla n.

---

[6] Méně zkušeného čtenáře upozorňujeme, že při prázdné množině sčítacích indexů považujeme příslušnou sumu za nulu; taková situace v následující formuli nastane pro $k = 0$, kdy skutečně nepotřebujeme nic přidávat.