Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

ZWARDOŃ, 20.–22. ČERVNA 2005

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již páté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 46. MMO v Méridě.

Soutěž se uskutečnila ve Zwardoni v polské části Beskyd, takže to nebylo příliš daleko ani pro naše, ani pro slovenské reprezentanty. Všechna tři družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 19. června. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Michał Pilipczuk	POL	7 2 7 7 6	36
2.	František Simančík	SVK	6 1 2 7 7	30
3.	Michal Burger	SVK	7 1 2 7 5	29
4.–5.	Pavel Kocourek	CZE	0 7 7 2 5	28
	Tomasz Kulczyński	POL	7 2 0 7 5	28
6.	Tomasz Warszawski	POL	6 1 2 4 7	27
7.–8.	František Konopecký	CZE	0 7 0 7 3	24
	Marek Pechal	CZE	0 1 5 7 4	24
9.	Ondrej Budáč	SVK	0 2 0 7 7	23
10.	Jaromír Kuben	CZE	0 7 2 0 7	22
11.–12.	Jozef Bodnár	SVK	3 1 2 7 5	20
	Wojciech Śmietanka	POL	6 1 7 0 0	20
13.–14.	Nadbor Drozd	POL	0 1 0 7 4	19
	Jakub Závodný	SVK	0 2 2 7 1	19
15.	Jakub Opršal	CZE	0 1 2 7 0	17
16.	Peter Černo	SVK	0 2 2 0 0	11
17.	Piotr Achinger	POL	0 1 2 6 0	10
18.	Jaroslav Hančl	CZE	0 0 0 3 0	4

Hodnocení vyřešených úloh koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaromír Šimša*, *Jaroslav Švrček* a *Karel Horák* za Českou republiku, *Peter Novotný* a *Ján Mazák* za Slovensko a *Waldemar Pompe* a *Adam Osękowski* za Polsko.

Polští organizátoři připravili kromě obvyklé soutěže ještě soutěž družstev, tzv. *Matematický souboj*, který proběhl ve středu 22. června po vyhlášení výsledků soutěže jednotlivců. Nebojovali přitom proti sobě jednotlivá národní družstva, ale všech 18 účastníků se rozdělilo do dvou skupin, jež stály proti sobě. V každé skupině byli studenti ze všech tří zemí. Cílem bylo vyřešit co nejvíce z následujících 11 úloh a v rámci skupiny si vzájemně vysvětlit řešení tak, aby je libovolný zástupce skupiny (určený soupeřem) mohl co nejlépe prezentovat dle předem stanovených pravidel.

Kvůli souboji se střetnutí o jeden den protáhlo, a tak naši účastníci odcestovali až ve čtvrtek 23. června ráno. V dalším roce se společné přípravné střetnutí uskuteční na Slovensku.

Mecz matematyczny

1. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že všechna prvočísla, která dělí číslo n^2+1, jsou menší než n.

2. Rozhodněte, zda existují přirozená čísla $x, y, z_1, z_2, \ldots, z_{2005}$ taková, že pro $k = 1, 2, 3$ platí

$$x^k + y^k = z_1^k + z_2^k + \ldots + z_{2005}^k.$$

3. Nechť p a $q = p+2$ jsou prvočísla. Dokažte, že největší společný dělitel čísel $p^q - p$ a $q^p - q$ je větší než $2p^3$.

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je rozdíl $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ dělitelný číslem 547.

5. Označme P, Q, R, S, T, U po řadě středy úhlopříček AC, BD, CE, DF, EA, FB konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$. Dokažte, že obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ je čtyřikrát větší než obsah šestiúhelníku $PQRSTU$.

6. V rovině je dán konvexní šestiúhelník. Každá ze tří úseček spojujících středy jeho protilehlých stran dělí daný šestiúhelník na dva pětiúhelníky o stejném obsahu. Dokažte, tyto tři úsečky mají společný bod.

7. Je dána kružnice ω se středem O a poloměrem 1. Uvažujme všechny čtverce $ABCD$, jejichž vrcholy A a B leží na kružnici ω. Jakou největší velikost může mít úsečka OC?

8. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}} + \sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}} \leqq 4.$$

9. Určete všechna přirozená čísla $n \geqq 2$ s následující vlastností: Pro všechna celá čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, která nejsou dělitelná číslem n, existují indexy $1 \leqq i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k \leqq n-1$ takové, že číslo

$$a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + \ldots + a_{i_k} - 1$$

je dělitelné n.

10. Matematická společnost má posoudit správnost důkazu Velké věty Fermatovy. Po jeho prostudování členové společnosti hlasují. Každý její člen učiní seriózní rozhodnutí se stejnou pravděpodobností $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Rozhodnutí všech členů jsou nezávislá. Pokud většina členu společnosti rozhodne, že důkaz je správný, společnost považuje důkaz za správný. V případě, že počet členů společnosti je sudý a právě polovina z nich dala svůj hlas ve prospěch správnosti důkazu Velké věty Fermatovy, rozhodne o správnosti důkazu los pomocí mince.

V závislosti na p stanovte, která ze společností učiní s větší pravděpodobností správné rozhodnutí o bezchybnosti důkazu — společnost, která má 2 005 členů, nebo společnost, která má 2 006 členů?

11. Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c, d, e platí nerovnost

$$\frac{a}{e+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+e} + \frac{e}{d+e+a} < 2.$$

Texty soutěžních úloh

1. Nechť n je dané přirozené číslo. Určete všechny n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nezáporných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_n^n = n,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Dokažte, že střed O kružnice opsané, střed I kružnice vepsané a průsečík P úhlopříček libovolného dvojstředového čtyřúhelníku leží v přímce.

3. Určete všechna přirozená čísla $n \geqq 3$, pro něž lze mnohočlen

$$P(x) = x^n - 3x^{n-1} + 2x^{n-2} + 6$$

vyjádřit jako součin dvou mnohočlenů, z nichž každý je aspoň prvního stupně a oba mají celočíselné koeficienty.

4. Devíti osobám (A, B, C, D, E, F, G, H a I) rozdáme n *označených* míčků. Kolika způsoby je možno míčky rozdat za podmínky, že A dostane stejný počet míčků jako osoby B, C, D, E dohromady?

5. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Určete množinu všech jeho vnitřních bodů P, pro něž platí

$$S_{PAB} \cdot S_{PCD} = S_{PBC} \cdot S_{PDA},$$

kde symbol S_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ.

6. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které vyhovují rovnici

$$y(x + y) = x^3 - 7x^2 + 11x - 3.$$

Řešení soutěžních úloh

1. Předpokládejme, že čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ splňují dané rovnice. Potom

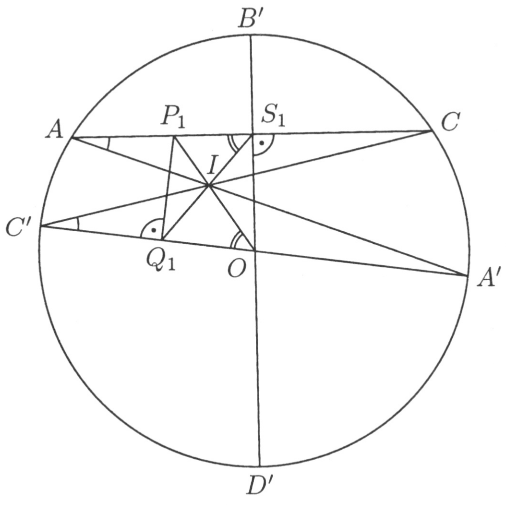
$$\begin{aligned}0 &= x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_n^n - n - \\ &\quad - (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n - \tfrac{1}{2}n(n+1)) = \\ &= (x_2^2 - 2x_2 + 2 - 1) + (x_3^3 - 3x_3 + 3 - 1) + \ldots + (x_n^n - nx_n + n - 1).\end{aligned}$$

Přitom výrazy v závorkách jsou nezáporné. Pro $k \geqq 2$ a $x \geqq 0$ je totiž podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

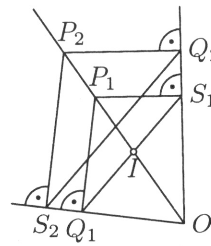
$$x^k + k - 1 = x^k + 1 + 1 + \ldots + 1 \geqq k \cdot \sqrt[k]{x^k} = kx$$

s rovností, právě když $x = 1$. Dostáváme tak $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$ a z první rovnice $x_1 = 1$. Snadno ověříme, že uvedená n-tice je (jediným) řešením.

2. (Podle *Michala Burgera*, Slovensko.) Označme A', B', C', D' po řadě další průsečíky polopřímek AI, BI, CI, DI s kružnicí k opsanou čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 49). Protože přímky AI, BI, CI, DI jsou osy odpovídajících úhlů čtyřúhelníku $ABCD$, tvoří úsečky $A'C'$ a $B'D'$ průměry kružnice k a jejich průsečíkem je střed O. Zřejmě jsou trojúhelníky ICA a $IA'C'$ podobné. Navíc tato podobnost zobrazuje střed S_1 úsečky AC do středu O úsečky $A'C'$ (obr. 49).



Obr. 49



Obr. 50

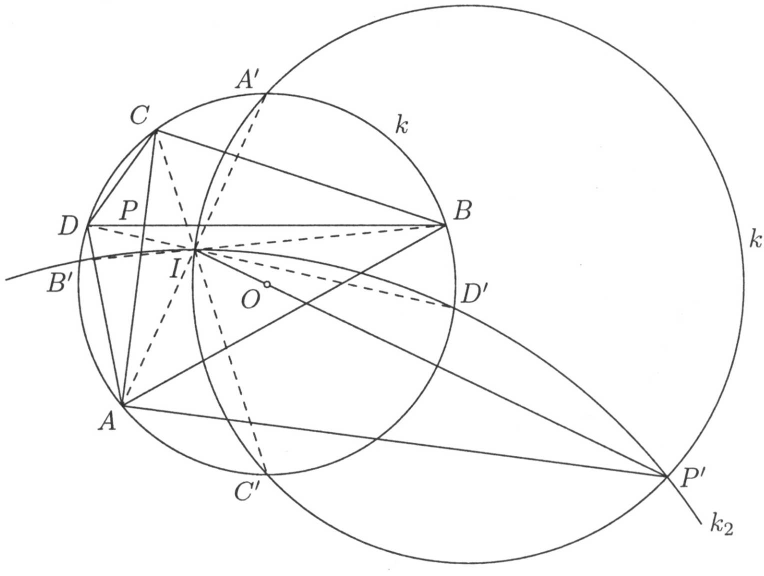
Označme P_1 průsečík přímek OI a AC a Q_1 průsečík přímek S_1I a $A'C'$. Z podobnosti trojúhelníků $IS_1A \sim IOC'$ plyne rovnost úhlů IS_1A a IOC', takže čtyřúhelník $Q_1OS_1P_1$ je tětivový. Protože průměr $B'D'$ kružnice k je kolmý na tětivu AC, je také P_1Q_1 kolmé na $A'C'$, jinými slovy S_1 a Q_1 jsou kolmé průměty bodu P_1 na průměry $B'D'$ a $A'C'$ kružnice k.

Označme analogicky S_2 střed úsečky BD, P_2 průsečík přímek OI a BD a Q_2 průsečík přímek S_2I a $B'D'$. Úplně stejně zjistíme, že Q_2 a S_2 jsou kolmé průměty bodu P_2 na průměry $B'D'$ a $A'C'$ kružnice k. Body P_1 i P_2 leží na přímce OI, ze zřejmé podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $OS_1P_1 \sim OQ_2P_2$ a $OQ_1P_1 \sim OS_2P_2$ (obr. 50) plyne, že $Q_1S_1 \parallel S_2Q_2$. Bod I ovšem leží na obou rovnoběžných přímkách! Uvedené trojúhelníky jsou tudíž shodné a $P_1 = P_2$ a je to právě průsečík P přímek AC, BD. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. (Podle *Františka Simančíka*, Slovensko.) Stejně jako v předešlém řešení označme A', B', C', D' po řadě další průsečíky polopřímek AI, BI, CI, DI s kružnicí k opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Z mocnosti bodu I ke kružnici k máme

$$|IA| \cdot |IA'| = |IB| \cdot |IB'| = |IC| \cdot |IC'| = |ID| \cdot |ID'|.$$

Existuje tedy kruhová inverze se středem I, která po složení se středovou souměrností podle téhož středu I zobrazí body A, B, C, D po řadě na body A', B', C', D'. Označme P' obraz bodu P v tomto složeném zobrazení $\varkappa$. Protože přímky PI a $P'I$ jsou totožné, stačí ukázat, že body O, I a P' leží v přímce. Zobrazení $\varkappa$ zřejmě zobrazí přímku AC na kružnici k_1 procházející body A', C', I a přímku BD na kružnici k_2 procházející body B', D', I (obr. 51). Bod P' je tudíž druhým průsečíkem kružnic k_1, k_2 (různým od bodu I).



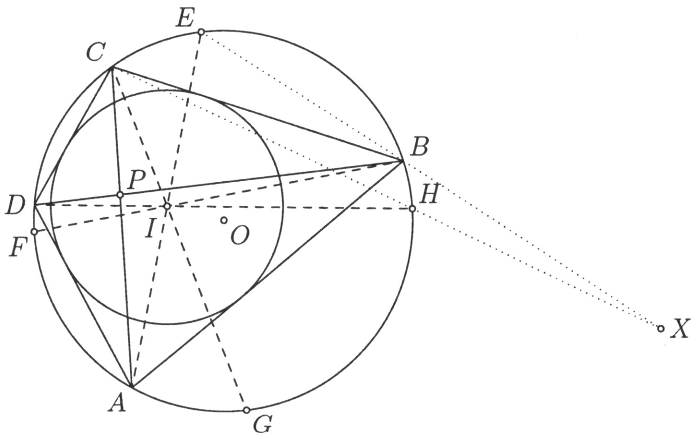
Obr. 51

Přímka $P'I$ je chordálou kružnic k_1, k_2. Stačí tedy ukázat, že bod O má k oběma kružnicím k_1, k_2 stejnou mocnost. Ovšem už v prvním řešení jsme ukázali, že $A'C'$ a $B'D'$ jsou průměry kružnice k, takže její střed O leží na na chordále kružnic k, k_1 i na chordále kružnic k, k_2. Jinými slovy bod O má stejnou mocnost ke všem třem kružnicím k, k_1 a k_2. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Označme E, F, G, H po řadě další průsečíky polopřímek AI, BI, CI, DI s kružnicí k opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Protože přímky AI, BI, CI, DI jsou osy odpovídajících úhlů čtyřúhelníku $ABCD$, tvoří úsečky EG a FH průměry kružnice k, takže se protínají v bodě O.

Nyní využijeme *Pascalovu větu*, která říká, že pokud leží vrcholy daného šestiúhelníku (šestiúhelníkem zde rozumíme libovolnou uzavřenou lomenou čáru se šesti vrcholy) na kružnici a dvojice přímek, na nichž leží protější strany šestiúhelníku (to jsou strany, jež spolu ani nesousedí, ani nemají společnou sousední stranu), se protínají, pak tyto průsečíky leží v přímce.

Označme X průsečík přímek CH a BE (obr. 52). Z Pascalovy věty pro šestiúhelník $ACHDBE$ plyne, že body P, X a I leží v přímce. Podobně z Pascalovy věty pro šestiúhelník $GCHFBE$ plyne, že body I, X a O leží v přímce. Leží tedy v přímce i body O, I a P, jak jsme chtěli dokázat.



Obr. 52

3. Snadno ověříme, že pro $n = 3$ platí

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = (x + 1)(x^2 - 4x + 6).$$

Kdyby pro $n = 4$ bylo

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

porovnáním koeficientů bychom dostali

$$a + c = -3, \qquad ac + b + d = 2, \qquad bd = 6.$$

Z první rovnosti vyplývá, že a a c mají různou paritu. Proto z druhé rovnosti plyne, že b a d mají stejnou paritu. To je ve sporu s třetí rovností.

Předpokládejme dále, že $n \geqq 5$ a že existuje rozklad

$$P(x) = A(x)B(x), \tag{1}$$

kde

$$\begin{aligned} A(x) &= a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \\ B(x) &= b_{n-k}x^{n-k} + b_{n-k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

jsou mnohočleny s celočíselnými koeficienty a $a_k = b_{n-k} = \pm 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $k \leqq \lfloor n/2 \rfloor < n-2$ (protože $n \geqq 5$). Porovnáním koeficientů na obou stranách (1) získáme rovnosti

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 6, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ &\vdots \\ a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Nyní dokážeme indukcí, že a_0 dělí $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Předpokládejme, že toto tvrzení platí pro $a_1, a_2, \ldots, a_l$. Protože

$$\begin{aligned} 0 &= a_0(a_0 b_{l+1} + a_1 b_l + \ldots + a_l b_1 + a_{l+1} b_0) = \\ &= a_0^2 b_{l+1} + a_0 a_1 b_l + \ldots + a_0 a_l b_1 + 6a_{l+1}, \end{aligned}$$

je

$$6a_{l+1} = -(a_0^2 b_{l+1} + a_0 a_1 b_l + \ldots + a_0 a_l b_1).$$

Všechny sčítance na pravé straně jsou dělitelné členem a_0^2, proto i levá strana je jím dělitelná a nutně $a_0 \mid a_{l+1}$. Protože však $a_k = \pm 1$, dostáváme $a_0 = \pm 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_0 = 1$; potom $b_0 = 6$.

Stejné argumenty nyní zopakujeme i pro koeficienty mnohočlenu B. Dostaneme, že $b_0 = 6$ dělí $b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$ (pro $l > n-k$ případně položíme $b_l = 0$). Dostaneme tak spor ($b_{n-k} = \pm 1$) s výjimkou případu, kdy $n - k > n - 3$. Zůstali tak dva případy.

Případ $k = 2$. Porovnáním koeficientů při mocnině x^{n-2} v (1) máme

$$a_0 b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + a_2 b_{n-4} = 2.$$

Už víme, že na levé straně jsou kromě prvního všechny členy dělitelné šesti, tj. jsou sudé, zatímco první člen je roven ± 1. Tím dostáváme spor.

Případ $k = 1$. Úloha se tak zjednodušuje na nalezení celočíselných kořenů mnohočlenu P; snadno však nahlédneme, že pro n sudé takové kořeny neexistují, zatímco pro n liché je vždy $P(-1) = 0$.

Podmínky úlohy tedy splňují právě jen lichá čísla n.

Jiné řešení. (Podle *Pavla Kocourka.*) Pro n liché je zřejmé, že $P(-1) = 0$, mnohočlen P se tedy dá vyjádřit jako součin dvou mnohočlenů. Zároveň z vyjádření

$$P(x) = x^{n-2}(x^2 - 3x + 2) + 6 = x^{n-2}(x-1)(x-2) + 6$$

vidíme, že pro n sudé nabývá mnohočlen P vně intervalu $(1, 2)$ jen kladných hodnot, takže nemůže mít žádné celočíselné kořeny.

Předpokládejme tedy, že pro n sudé lze mnohočlen P rozložit na součin dvou mnohočlenů $P = AB$, kde

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k, \\ B(x) &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-k-1} x^{k-1} + b_{n-k} x^{n-k} \end{aligned}$$

jsou mnohočleny s celočíselnými koeficienty a $2 \leqq k \leqq n-2$. Zřejmě musí platit $a_0 b_0 = 6$ a $a_k b_{n-k} = 1$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že a_0 je sudé a b_0 liché. Pro $j \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ jsou koeficienty mnohočlenu P u x^j sudé. Dostáváme tak postupně:

$$\begin{aligned} a_1 b_0 + a_0 b_1 \quad &\Rightarrow \quad a_1 \text{ je sudé,} \\ a_2 b_0 + (a_1 b_1 + a_0 b_2) \quad &\Rightarrow \quad a_2 \text{ je sudé,} \\ &\vdots \\ a_k b_0 + (a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k) \quad &\Rightarrow \quad a_k \text{ je sudé,} \end{aligned}$$

takže koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_k$ mnohočlenu A jsou vesměs sudé. Koeficient u x^{n-1} mnohočlenu P je lichý, je tudíž liché i číslo

$$a_{n-1} b_0 + (a_{n-2} b_1 + \ldots + a_0 b_{n-1}),$$

to ovšem znamená, že stupeň mnohočlenu A je aspoň $n-1$, takže B musí být lineární mnohočlen. Jak už víme, takový rozklad pro sudé n neexistuje.

Podmínky úlohy tedy splňují právě jen lichá čísla n.

4. Uvažujme mnohočlen

$$\begin{aligned}(x+2)^{2n} &= (x^2+4x+4)^n = \\ &= (x^2+x+x+x+x+1+1+1+1) \\ &\ (x^2+x+x+x+x+1+1+1+1)\dots \\ &\ (x^2+x+x+x+x+1+1+1+1),\end{aligned}$$

po jehož roznásobení dostaneme 9^n sčítanců. Ukážeme, že je vzájemně jednoznačná korespondence mezi koeficientem u x^n a počtem způsobů rozdělení míčků.

Předpokládejme, že máme požadované rozdělení. Jestliže k-tý míček dostal A, vybereme x^2 z k-té závorky. Dostal-li ho B, C, D nebo E, vybereme z k-té závorky první, druhou, třetí nebo čtvrtou jedničku. Podobně pro F, G, H, I vybereme z k-té závorky první, druhé, třetí nebo čtvrté x. Vynásobíme-li nyní vybrané činitele, vidíme, že výsledek se rovná x^n, právě když A dostal stejný počet míčků jako B, C, D a E dohromady.

Počet rozdělení, který nás zajímá, je tedy roven koeficientu u x^n v mnohočlenu $(x+2)^{2n}$, což je

$$\binom{2n}{n}\cdot 2^n.$$

Jiné řešení. Jestliže osoba A dostane k míčků, můžeme je vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby, ze zbylých $n-k$ míčků můžeme $\binom{n-k}{k}$ způsoby vybrat k míčků pro osoby B, C, D a E, přičemž máme 4^k možností, jak mezi ně míčky rozdělit. Nakonec máme 4^{n-2k} možností, jak rozdat zbylé míčky osobám F, G, H, I. Protože všechny uvedené možnosti jsou navzájem nezávislé, dostáváme pro dané k

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}4^k4^{n-2k}$$

možností, jak míčky rozdat tak, že A dostane právě k míčků. Protože musí být $2k \leq n$, bude celkový počet možností roven součtu

$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}4^k4^{n-2k}. \tag{1}$$

Spočtěme koeficient u členu x^n mnohočlenu

$$P(x) = \big(4 + (4x + x^2)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} 4^k (4x + x^2)^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} 4^k \sum_{j=0}^{n-k} x^{2j} (4x)^{n-k-j}.$$

Tento koeficient dostaneme pro $2j + (n-k-j) = n$, tj. pro $j = k \leqq n-k$, takže koeficient u x^n v mnohočlenu P je právě součet (1), který nás zajímá. Je však zároveň

$$P(x) = (x^2 + 4x + 4)^n = (x+2)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j 2^{2n-j},$$

koeficient u x^n v mnohočlenu P je tedy $\binom{2n}{n} 2^n$. To je hledaný počet rozdělení.

Jiné řešení. Jak jsme zjistili v předchozím řešení, je hledaný počet rozdělení roven součtu (1), který můžeme vzhledem k rovnosti $4^k 4^{n-2k} = 2^n 2^{n-2k}$ upravit na tvar

$$S = 2^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}.$$

Suma v předchozí rovnosti je ovšem počet možností, jak rozdat n míčků *čtyřem* osobám A, B, C, D tak, aby jich A i B dostali stejně (stačí téměř doslovně zopakovat úvahy vedoucí ke vzorci (1)). Zbývá tedy vyřešit poněkud jednodušší úlohu. To provedeme následující kombinatorickou úvahou:

Uvažme dvě řady n polí (očíslovaných 1 až n), každá dvojice polí nad sebou reprezentuje jednu z rozdělovaných kuliček. Z těchto $2n$ polí vybereme n, která nějak označíme, a tomuto výběru jednoznačně přiřadíme rozdělení kuliček čtyřem osobám následujícím způsobem: A dostane kuličku j, jsou-li vybrána obě pole s číslem j, B dostane kuličku s číslem j, není-li vybráno žádné z polí toho čísla, C dostane příslušnou kuličku, je-li vybráno právě jen horní pole toho čísla, a konečně D dostane příslušnou kuličku, je-li vybráno právě jen dolní pole.

Protože celkový počet označených i neoznačených polí příslušných kuličkám rozdaným B a C je stejný, je stejný i počet označených a neoznačených polí, podle nichž rozdáváme kuličky osobám A a B. Každé kuličce (dvěma označeným polím), kterou dostane A, tak odpovídá kulička (dvojice neoznačených polí), kterou dostane B. Počet kuliček rozdělených osobám A a B je tedy stejný.

Je zřejmé, že každému rozdělení kuliček obráceně odpovídá nějaký výběr n polí. Přitom ke každému výběru k polí v horní řadě, který můžeme provést $\binom{n}{k}$ způsoby, máme $\binom{n}{n-k}$ možností, jak vybrat zbývajících $n-k$ polí v druhé řadě. To dává dohromady

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

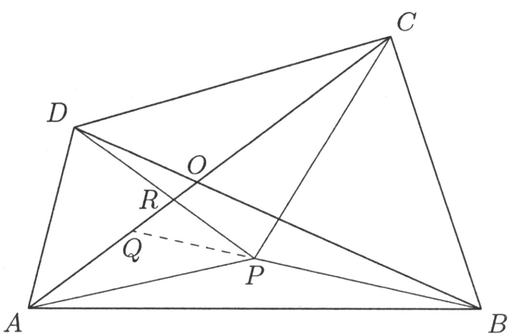
možností, takže hledaný počet S je $\binom{2n}{n}2^n$.

5. Pokud P leží na některé z úhlopříček, řekněme na AC, tak

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{|AP|}{|PC|} = \frac{S_{PDA}}{S_{PCD}},$$

požadovaná rovnost tedy platí. Dokážeme, že pro body P ležící uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$ mimo úhlopříčky daná rovnost neplatí.

Označme O průsečík úhlopříček a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že P leží uvnitř trojúhelníku ABO (obr. 53). Označme ještě Q



Obr. 53

průsečík přímek BP a AC a R průsečík přímek DP a AC. Snadno pak odvodíme rovnosti

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{|AQ|}{|QC|} \quad \text{a} \quad \frac{S_{PDA}}{S_{PCD}} = \frac{|AR|}{|RC|}.$$

Protože $Q \neq R$, zkoumaná rovnost nemůže platit.

Odpověď. Hledanou množinou bodů P jsou vnitřní body úhlopříček AC a BD.

6. Vynásobením uvažované rovnice čtyřmi a jednoduchou úpravou dostaneme ekvivalentní rovnici

$$\begin{aligned}(2y+x)^2 &= 4x^3 - 27x^2 + 44x - 12 = \qquad (1)\\ &= (x-2)(4x^2 - 19x + 6) = \\ &= (x-2)\big((x-2)(4x-11) - 16\big).\end{aligned}$$

Výraz na pravé straně musí být čtverec. Proto $x - 2 = ks^2$ pro nějaké $k \in \{-2, -1, 1, 2\}$ a $s \in \mathbb{N}$ (pokud je totiž číslo $x - 2$ dělitelné právě jen lichou mocninou prvočísla p, pak musí p dělit i $(x-2)(4x-11) - 16$, takže $p \mid 16$ a $p = 2$).

Rozebereme tři případy.

1. Nechť $k = \pm 2$. Z (1) plyne, že $4x^2 - 19x + 6 = \pm 2u^2$ pro nějaké celé číslo u, odkud úpravou dostaneme

$$(8x - 19)^2 - 265 = \pm 32u^2.$$

Tuto rovnost ovšem nesplňují žádná dvě celá čísla x, u, protože levá strana může dát při dělení pěti zbytek 0, 1 nebo 4, zatímco pravá strana zbytek 0, 2 nebo 3. Jedinou možností tak je zbytek 0, v takovém případě by však pravá strana byla dělitelná číslem 25, ale levá ne.

2. Nechť $k = 1$. Potom $4x^2 - 19x + 6 = u^2$ pro nějaké celé číslo u, odkud po vynásobení šestnácti a po úpravě dostaneme

$$265 = (8x - 19)^2 - 16u^2 = (8x - 19 - 4u)(8x - 19 + 4u).$$

Snadno ověříme, že $x = 6$ je jediná možnost, pro niž dostaneme vyhovující řešení původní rovnice (stačí zvážit všechny možné rozklady čísla $265 = 1 \cdot 265 = 5 \cdot 53 = \ldots$ a uvážit skutečnost, že $x - 2 = s^2$). Po dosazení do (1) tak získáme dvojice $(6, 3)$ a $(6, -9)$.

3. Nechť $k = -1$. Podobně jako v předchozím případě máme $4x^2 - 19x + 6 = -u^2$, odkud

$$265 = (8x - 19)^2 + (4u)^2,$$

takže $u \leqq 4$. Ověříme všechny možnosti. Pro $u = 0, 1, 2$ nezískáme žádné řešení. Pro $u = 3$ dostaneme $(8x - 19)^2 = 121 = 11^2$, odkud $x = 1$; získáme tak dvojice $(1, 1)$, $(1, -2)$. Nakonec pro $u = 4$ máme $(8x-19)^2 = 9 = 3^2$, tj. $x = 2$, odkud získáme dvojici $(2, -1)$.

Danou rovnost splňují dvojice $(6, 3)$, $(6, -9)$, $(1, 1)$, $(1, -2)$ a $(2, -1)$.