Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Určete všechny hodnoty celočíselného parametru a, pro něž má rovnice

$$(x+a)(x+2a)=3a$$

aspoň jeden celočíselný kořen. *(J. Zhouf)*

B – I – 2

V daném trojúhelníku ABC označme D ten bod polopřímky CA, pro který platí $|CD|=|CB|$. Dále označme po řadě E, F středy úseček AD a BC. Dokažte, že $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$, právě když $|AB|=|BC|$. *(P. Leischner)*

B – I – 3

Rozhodněte, zda nerovnost

$$a(b+1)+b(c+1)+c(d+1)+d(a+1) \geqq \tfrac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pro libovolná kladná čísla a, b, c, d, která vyhovují podmínce
a) $ab=cd=1$; b) $ac=bd=1$. *(J. Šimša)*

B – I – 4

Každou z hvězdiček v zápisech dvanáctimístných čísel

$$A = {*}88\,888\,888\,888, \qquad B = {*}11\,111\,111\,111$$

nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz $|14A-13B|$ měl co nejmenší hodnotu. *(J. Šimša)*

B – I – 5

Kruh o středu S a poloměru r je rozdělen na čtyři části dvěma tětivami, z nichž jedna má délku r a druhá má od středu S vzdálenost $\frac{1}{2}r$. Dokažte, že absolutní hodnota rozdílu obsahů těch dvou částí, které mají společný právě jeden bod, a přitom žádná z nich neobsahuje střed S, je rovna jedné šestině obsahu kruhu. (*P. Leischner*)

B – I – 6

Určete nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Zvolíme-li n různých přirozených čísel menších než 2 006, jsou mezi nimi dvě taková, že podíl součtu a rozdílu jejich druhých mocnin je větší než tři.

(*J. Zhouf*)

B – S – 1

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b a c platí nerovnost

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 8.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. (*J. Šimša*)

B – S – 2

Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé. (*J. Švrček*)

B – S – 3

Najděte všechny dvojice celých čísel a a b, pro něž žádná z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \quad y^2 + by + a = 0$$

nemá dva různé reálné kořeny. (*E. Kováč*)

B – II – 1

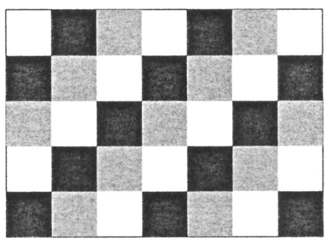
Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí

$$p + q^2 = q + p^3.$$

(*J. Švrček*)

B – II – 2

Obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 2\,008$ a $|BC| = 2\,006$ je rozdělen na $2\,008 \times 2\,006$ jednotkových čtverců a ty jsou střídavě obarveny černou, šedou a bílou barvou podobně jako obdélník na obrázku: čtverce při vrcholech A a B jsou černé, čtverce při vrcholech C a D jsou bílé. Určete obsah té části trojúhelníku ABC, která je šedá.



(*Pavel Novotný*)

B – II – 3

V lichoběžníku $ABCD$, jehož základna AB má dvakrát větší délku než základna CD, označme E střed ramene BC. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází středem úhlopříčky AC, právě když strany AB a BC jsou navzájem kolmé. (*P. Leischner*)

B – II – 4

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$1 \leqq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1-a)(1-b)(1-c) \leqq 9.$$

(*J. Šimša*)

Řešení úloh

B – I – 1

Po roznásobení levé strany a převedení členu $3a$ z pravé strany na levou dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a = 0.$$

Její kořeny (pokud existují) mají podle známého vzorce tvar

$$x_{1,2} = \frac{-3a + \sqrt{a^2 + 12a}}{2}.$$

Hodnota takového výrazu je celé číslo jen tehdy, je-li číslo a^2+12a druhou mocninou nějakého celého čísla b, o němž můžeme předpokládat, že je nezáporné. Rovnost $b = \sqrt{a^2 + 12a}$ upravíme umocněním a doplněním na čtverec do tvaru

$$(a + 6)^2 = b^2 + 36, \quad \text{neboli} \quad (a + 6 + b)(a + 6 - b) = 36.$$

Dostali jsme rozklad čísla 36 na součin dvou celočíselných činitelů, které proto musejí mít stejné znaménko. Protože jejich rozdíl

$$(a + 6 + b) - (a + 6 - b) = 2b$$

je sudé nezáporné číslo (připomínáme, že $b \geqq 0$), mají oba činitelé stejnou paritu (jsou zároveň sudá nebo lichá) a druhý činitel není větší než první činitel. To vše dohromady znamená, že jsou jen čtyři možnosti:

(1) $a+6+b = 18$ a $a+6-b = 2$. Tato soustava rovnic má jediné řešení $a = 4$ a $b = 8$. Zkouška: rovnice $(x + 4)(x + 8) = 12$ má kořeny -10 a -2.

(2) $a+6+b = 6$ a $a+6-b = 6$. V tomto případě $a = 0$ a $b = 0$. Zkouška: rovnice $(x + 0)(x + 0) = 0$ má dvojnásobný kořen 0.

(3) $a+6+b = -2$ a $a+6-b = -18$. V tomto případě $a = -16$ a $b = 8$. Zkouška: rovnice $(x - 16)(x - 32) = -48$ má kořeny 20 a 28.

(4) $a+6+b = -6$ a $a+6-b = -6$. V tomto případě $a = -12$ a $b = 0$. Zkouška: rovnice $(x - 12)(x - 24) = -36$ má dvojnásobný kořen 18.

Odpověď: Hledané hodnoty parametru a jsou čtyři, a to čísla 4, 0, -16 a -12.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení upravíme rovnici do tvaru

$$x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a = 0$$

a pokusíme se mnohočlen na levé straně zapsat ve tvaru součinu dvou lineárních činitelů tvaru $\alpha x + \beta a + \gamma$. I když takový rozklad neexistuje, experimentováním zjistíme, že „téměř vyhovuje" součin

$$(x + 2a + 3)(x + a - 3),$$

který se liší od daného mnohočlenu $x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a$ pouze v konstantním členu; přesvědčete se o tom roznásobením. Zkoumanou rovnici tak lze zapsat ve tvaru

$$(x + 2a + 3)(x + a - 3) = -9.$$

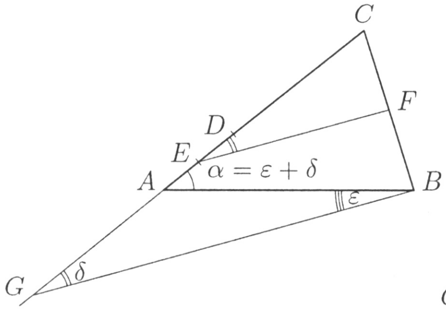
I když na pravé straně není nula, pro řešení v oboru celých čísel je každý podobný rozklad cenný, neboť existuje pouze konečný počet rozkladů příslušného čísla (v našem případě -9) na součin dvou celočíselných činitelů. Vypišme je:

(1) $x + 2a + 3 = 9$ a $x + a - 3 = -1$, neboli $a = 4$ a $x = -2$,
(2) $x + 2a + 3 = 3$ a $x + a - 3 = -3$, neboli $a = 0$ a $x = 0$,
(3) $x + 2a + 3 = 1$ a $x + a - 3 = -9$, neboli $a = 4$ a $x = -10$,
(4) $x + 2a + 3 = -1$ a $x + a - 3 = 9$, neboli $a = -16$ a $x = 28$,
(5) $x + 2a + 3 = -3$ a $x + a - 3 = 3$, neboli $a = -12$ a $x = 18$,
(6) $x + 2a + 3 = -9$ a $x + a - 3 = 1$, neboli $a = -16$ a $x = 20$.

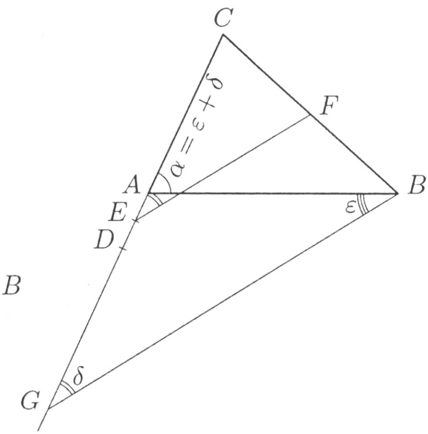
Docházíme tak ke stejné odpovědi jako v prvním řešení: vyhovující hodnoty parametru a jsou čísla 4, 0, -12 a -16.

B – I – 2

Označme G ten bod polopřímky opačné k polopřímce AC, pro který platí $|AG| = |BC| = |CD|$ (obr. 13 pro situaci, kdy $|AC| > |BC|$, a obr. 14 pro situaci, kdy $|AC| < |BC|$ — sami nakreslete a rozmyslete situaci, kdy $|AC| = |BC|$). V trojúhelníku ABG označme ještě $\varepsilon = |\sphericalangle ABG|$ a $\delta = |\sphericalangle BGA|$. Protože $|EA| = |ED|$ a $|AG| = |CD|$, je bod E střed úsečky CG, tudíž úsečka EF je střední příčka trojúhelníku BCG. Platí proto $EF \parallel GB$ a z rovnosti souhlasných úhlů BGA a FEC dostáváme $|\sphericalangle FEC| = \delta$. Protože úhel BAC je vnějším úhlem trojúhelníku ABG, pro jeho velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ platí $\alpha = \varepsilon + \delta$. To znamená, že rovnost



Obr. 13



Obr. 14

$\alpha = 2\delta$ ze zadání úlohy nastane, právě když $\varepsilon + \delta = 2\delta$, neboli $\varepsilon = \delta$. Z trojúhelníku ABG ovšem plyne, že rovnost $\varepsilon = \delta$ je splněna, právě když $|AB| = |AG|$, neboli $|AB| = |BC|$. Tím je ekvivalence rovností $\alpha = 2\delta$ a $|AB| = |BC|$ dokázána.

Jiné řešení. Místo „chytře" zvoleného pomocného bodu G z prvního řešení sestrojíme osu o vnitřního úhlu BAC daného trojúhelníku ABC a její průsečík se stranou BC označíme H (obr. 15 a obr. 16 pro situace $|AC| > |BC|$, resp. $|AC| < |BC|$). Význam osy o pro řešení naší úlohy je zřejmý: podle souhlasných úhlů CEF a CAH usoudíme, že rovnost $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ ze zadání úlohy nastane, právě když budou úsečky AH a EF rovnoběžné, neboli trojúhelníky CAH a CEF podobné. Podle věty *sus* jsou trojúhelníky CAH a CEF podobné, právě když je splněna úměra

$$|AC| : |HC| = |EC| : |FC|. \tag{1}$$

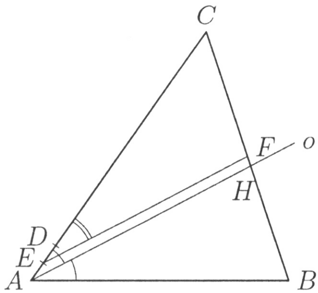
Rovnost $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ je tedy ekvivalentní s podmínkou (1), kterou nyní prozkoumáme.

Délky úseček zastoupených v (1) nejprve vyjádříme pomocí délek

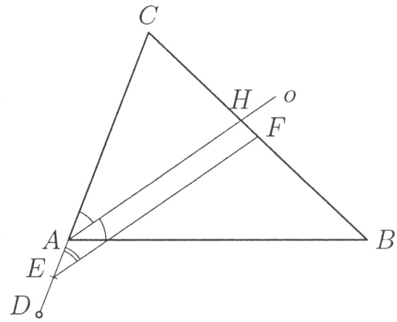
$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|$$

stran výchozího trojúhelníku ABC. Protože bod F je střed úsečky BC a bod E střed úsečky AD, platí $|FC| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a$ a

$$|EC| = \frac{|AC| + |DC|}{2} = \frac{|AC| + |BC|}{2} = \frac{b+a}{2}.$$



Obr. 15



Obr. 16

Zbývá vyjádřit délku úsečky HC. Z rovností

$$|HC| + |HB| = a, \qquad |HC| : |HB| = b : c$$

(první z nich je triviální, druhá vyjadřuje známý fakt o poměru, ve kterém osa vnitřního úhlu dělí protější stranu trojúhelníku) dostaneme po snadném výpočtu vyjádření

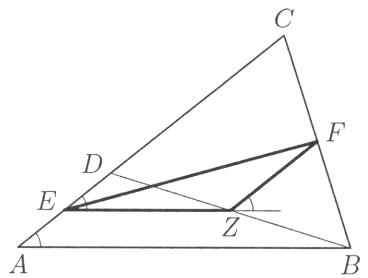
$$|HC| = \frac{ab}{b+c}.$$

Dosaďme nyní všechny určené délky do rovnosti (1) a pak ji dále ekvivalentně upravujme:

$$\begin{aligned} b : \frac{ab}{b+c} &= \frac{a+b}{2} : \frac{a}{2}, \\ \frac{b+c}{a} &= \frac{a+b}{a}, \\ b+c &= a+b, \\ c &= a. \end{aligned}$$

Dokázali jsme potřebné: podmínka (1) platí, právě když $c = a$, neboli $|AB| = |BC|$.

Jiné řešení. Označme Z střed úsečky BD a α velikost úhlu BAC. Úsečka EZ je střední příčka trojúhelníku ADB a úsečka ZF je střední příčka trojúhelníku CDB (obr. 17). Z vlastností středních příček plyne $EZ \parallel AB, ZF \parallel AC, |EZ| = \frac{1}{2}|AB|, |FZ| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|BC|, |\sphericalangle CEZ| = \alpha$ a $|\sphericalangle EZF| = 180° - \alpha$.



Obr. 17

Protože velikost vnějšího úhlu při vrcholu Z trojúhelníku EZF je α, bude mít úhel FEZ velikost $\frac{1}{2}\alpha$, právě když bude trojúhelník FEZ rovnoramenný (se základnou FE), tj. právě když $|EZ| = |ZF|$, neboli právě když $|AB| = |BC|$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

B – I – 3

a) Danou nerovnost budeme ekvivalentně upravovat postupným roznásobováním; jakmile se přitom někde objeví součin ab nebo cd, nahradíme ho číslem 1:

$$\begin{aligned} 2(ab + a + bc + b + cd + c + da + d) &\geqq \\ &\geqq (ab + a + b + 1)(cd + c + d + 1), \\ 2(ad + bc + a + b + c + d + 2) &\geqq \\ &\geqq (a + b + 2)(c + d + 2), \\ 2(ad + bc) + 2(a + b + c + d) + 4 &\geqq \\ &\geqq ac + ad + bc + bd + 2(a + b + c + d) + 4, \\ ad + bc &\geqq ac + bd, \\ (a - b)(c - d) &\leqq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost obecně neplatí, jak ukazuje příklad $a = c = 2$ a $b = d = \frac{1}{2}$ (hodnoty jsou zvoleny tak, aby byly splněn předpoklad $ab = cd = 1$).

b) Danou nerovnost budeme upravovat s podobnou strategií jako v části a). Protože však tentokrát můžeme číslem 1 nahrazovat součiny ac a bd, vynásobíme na pravé straně nerovnosti nejprve první činitel s třetím a druhý činitel se čtvrtým:

$$\begin{aligned}
2(ab + a + bc + b + cd + c + da + d) &\geqq \\
&\geqq (ac + a + c + 1)(bd + b + d + 1), \\
2(ab + bc + cd + ad + a + b + c + d) &\geqq \\
&\geqq (a + c + 2)(b + d + 2), \\
2(ab + bc + cd + ad) + 2(a + b + c + d) &\geqq \\
&\geqq ab + ad + bc + cd + 2(a + b + c + d) + 4, \\
ab + bc + cd + da &\geqq 4, \\
(a + c)(b + d) &\geqq 4.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí pro všechny čtveřice kladných čísel a, b, c, d splňující předpoklad $ac = bd = 1$, protože každý z obou činitelů $a + c$ a $b + d$, jsa součtem kladného čísla a čísla k němu převráceného, je větší nebo roven číslu 2. Tento známý výsledek

$$u > 0 \quad \Longrightarrow \quad u + \frac{1}{u} \geqq 2 \qquad (*)$$

plyne přímo z identické rovnosti

$$u + \frac{1}{u} = \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 + 2$$

a poznatku, že druhá mocnina libovolného reálného čísla je nezáporná. Odhad $(*)$ lze rovněž získat ze známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

libovolných nezáporných čísel a_i, když zvolíme $n = 2$, $a_1 = u$ a $a_2 = 1/u$.

Odpověď: Zkoumaná nerovnost za podmínky a) obecně neplatí, za podmínky b) platí.

Jiné řešení. a) Použijeme „dosazovací strategii“: z dané podmínky $ab = cd = 1$ vypočteme $b = 1/a$, $d = 1/c$ a takto vyjádřená čísla b a d dosadíme do zkoumané nerovnosti. Dostaneme nerovnost s dvěma (již nezávislými) proměnnými a a c; naší úlohou bude zjistit, zda platí pro libovolné hodnoty $a > 0$ a $c > 0$:

$$\begin{aligned}
a\Big(\frac{1}{a}+1\Big)+\frac{1}{a}(c+1)+c\Big(\frac{1}{c}+1\Big)+\frac{1}{c}(a+1) &\geqq \\
\geqq \frac{1}{2}(a+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)(c+1)\Big(\frac{1}{c}+1\Big)&,\\
2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{1}{2}\Big(2+a+\frac{1}{a}\Big)\Big(2+c+\frac{1}{c}\Big)&,\\
2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq 2+a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\Big(ac+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{ac}\Big)&,\\
\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geqq ac+\frac{1}{ac}&,\\
c^2+a^2 \geqq a^2c^2+1&,\\
0 \geqq (a^2-1)(c^2-1)&.
\end{aligned}$$

Vidíme, že poslední nerovnost pro kladná čísla a, c obecně neplatí, stačí zvolit např. hodnoty $a = c = 2$, kterým odpovídají hodnoty $b = d = \frac{1}{2}$.

b) Podobně jako v části a) z dané podmínky $ac = bd = 1$ vypočteme tentokrát $c = 1/a$, $d = 1/b$ a po dosazení za c, d do zkoumané nerovnosti dostaneme nerovnost s nezávislými proměnnými $a > 0$ a $b > 0$:

$$\begin{aligned}
a(b+1)+b\Big(\frac{1}{a}+1\Big)+\frac{1}{a}\Big(\frac{1}{b}+1\Big)+\frac{1}{b}(a+1) &\geqq \\
\geqq \frac{1}{2}(a+1)(b+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)\Big(\frac{1}{b}+1\Big)&,\\
ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geqq \frac{1}{2}\Big(2+a+\frac{1}{a}\Big)\Big(2+b+\frac{1}{b}\Big)&,\\
ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} &\geqq \\
\geqq \frac{1}{2}\Big(4+2a+2b+ab+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}\Big)&,\\
ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geqq 4&.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost ovšem zřejmě platí pro libovolná kladná čísla a a b, neboť je součtem dvou nerovností

$$ab+\frac{1}{ab} \geqq 2 \quad \text{a} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2$$

typu $(*)$ z prvního řešení, a to pro hodnoty $u = ab$, resp. $u = a/b$.

B – I – 4

Hvězdičku v čísle A nahradíme číslicí a, hvězdičku v čísle B číslicí b a vyjádříme výraz $14A - 13B$ algebraicky jako lineární funkci (neznámých) číslic a a b. Protože platí

$$11\,111\,111\,111\,111 = \frac{99\,999\,999\,999\,999}{9} = \frac{10^{11} - 1}{9},$$

mají čísla A a B vyjádření

$$A = a \cdot 10^{11} + \frac{8}{9} \cdot (10^{11} - 1) \quad \text{a} \quad B = b \cdot 10^{11} + \frac{1}{9} \cdot (10^{11} - 1),$$

odkud dostáváme

$$\begin{aligned} 14A - 13B &= (14a - 13b) \cdot 10^{11} + \frac{(14 \cdot 8 - 13)}{9} \cdot (10^{11} - 1) = \\ &= (14a - 13b + 11) \cdot 10^{11} - 11. \end{aligned} \qquad (*)$$

Jistě si uvědomíme, že absolutní hodnota takového výrazu je minimální, právě když je minimální absolutní hodnota výrazu $14a-13b+11$. Precizně to zdůvodníme nerovnostmi až poté, co zjistíme, zda pro některé číslice a, b dokonce neplatí rovnost $14a - 13b + 11 = 0$. Vyjádříme-li z takové rovnice neznámou b,

$$b = \frac{14a + 11}{13} = a + 1 + \frac{a - 2}{13},$$

a všimneme si, že pro libovolnou číslici a platí $-2 \leqq a - 2 \leqq 7$, vidíme, že hodnota b daná posledním vzorcem je celočíselná jedině v případě $a - 2 = 0$, kdy $a = 2$ a $b = 3$. Jedině pro takové číslice a, b platí $14a - 13b + 11 = 0$, takže podle $(*)$ pak máme $|14A - 13B| = 11$. Pro libovolnou jinou dvojici číslic a, b ovšem platí $14a - 13b + 11 \neq 0$, takže tentokrát podle $(*)$ usoudíme, že

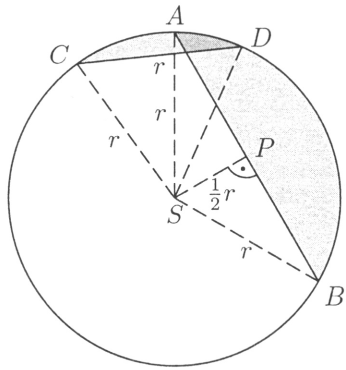
buď $14a - 13b + 11 \geqq 1$, a tedy $14A - 13B \geqq 10^{11} - 11 > 11$,
nebo $14a - 13b + 11 \leqq -1$, a tedy $14A - 13B \leqq -10^{11} - 11 < -11$,

v obou případech tedy $|14A - 13B| > 11$.

Odpověď: Výraz $|14A - 13B|$ má nejmenší možnou hodnotu jedině tehdy, když hvězdičky v číslech A, B nahradíme po řadě číslicemi 2 a 3.

B – I – 5

Označme dané tětivy AB a CD jako na obr. 18, kde je rovněž vyznačen střed P tětivy AB, takže podle zadání platí $|SP| = \frac{1}{2}r$ a $|CD| = r$.



Obr. 18

Zkoumaný rozdíl obsahů dvou světle vybarvených částí kruhu se nezmění, když ke každé z nich připojíme tutéž (třetí) část kruhu, jež má s jeho hraniční kružnicí společný oblouk AC a je na obr. 18 vybarvena tmavě. Tak vzniknou dvě kruhové úseče, jedna nad tětivou AB, druhá nad tětivou CD. Jejich obsahy jsou určeny velikostmi úhlů ASB a CSD. Z rovnostranného trojúhelníku CSD ihned máme $|\sphericalangle CSD| = 60°$, takže obsah S_1 úseče nad tětivou CD je roven

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku APS platí $|AS| : |SP| = 2 : 1$, tudíž $|\sphericalangle ASP| = 60°$, $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle ASP| = 120°$, $|AB| = r\sqrt{3}$ a obsah S_2 úseče nad tětivou AB je roven

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Nyní již snadno určíme rozdíl $S_2 - S_1$:

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi r^2}{6},$$

což je právě šestina obsahu celého kruhu.

B – I – 6

Zjistíme nejdříve, pro která přirozená čísla a, b platí zmíněná nerovnost

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} > 3. \tag{1}$$

Aby byl zlomek na levé straně kladný, musí platit $a^2 > b^2$, neboli $a > b$. Je-li tato nutná podmínka splněna, vynásobíme obě strany zkoumané nerovnosti kladným číslem $a^2 - b^2$ a dalšími úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &> 3(a^2 - b^2), \\ 4b^2 &> 2a^2, \\ b\sqrt{2} &> a. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že dvě přirozená čísla a, b vyhovují podmínce (1), právě když platí nerovnosti $1 < a/b < \sqrt{2}$.

Přirozená čísla od 1 do 2 005 nyní rozdělíme do skupin tak, aby v nich bylo co nejvíce čísel a aby podíl největšího a nejmenšího čísla každé skupiny byl menší než $\sqrt{2}$. Provedeme to tak, že do skupin budeme postupně zařazovat čísla 1,2,... a k nové skupině vždy přejdeme, až to bude nezbytné.[1] Dostaneme tak těchto dvacet skupin:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\}, & A_2 &= \{2\}, \\ A_3 &= \{3, 4\}, & A_4 &= \{5, 6, 7\}, \\ A_5 &= \{8, \dots, 11\}, & A_6 &= \{12, \dots, 16\}, \\ A_7 &= \{17, \dots, 24\}, & A_8 &= \{25, \dots, 35\}, \\ A_9 &= \{36, \dots, 50\}, & A_{10} &= \{51, \dots, 72\}, \\ A_{11} &= \{73, \dots, 103\}, & A_{12} &= \{104, \dots, 147\}, \\ A_{13} &= \{148, \dots, 209\}, & A_{14} &= \{210, \dots, 296\}, \\ A_{15} &= \{297, \dots, 420\}, & A_{16} &= \{421, \dots, 595\}, \\ A_{17} &= \{596, \dots, 842\}, & A_{18} &= \{843, \dots, 1\,192\}, \\ A_{19} &= \{1\,193, \dots, 1\,687\}, & A_{20} &= \{1\,688, \dots, 2\,005\}. \end{aligned}$$

Vysvětlíme například, jak vznikla skupina A_{11}. Číslo 73 jsme již nemohli zařadit do skupiny A_{10}, neboť pro jeho podíl s nejmenším číslem 53 této skupiny platí

$$\frac{73}{51} = 1{,}431\ldots > 1{,}414\ldots = \sqrt{2};$$

[1] K porovnávání podílů a/b s číslem $\sqrt{2}$ výhodně využijeme třeba kalkulačku.

Číslo 103 jsme ještě mohli do skupiny A_{11} zařadit, neboť

$$\frac{103}{73} = 1{,}410\ldots < 1{,}414\ldots = \sqrt{2}.$$

Jaké má sestrojené rozdělení význam pro řešení zadané úlohy? Pro libovolná dvě čísla a, b z téže skupiny A_i nerovnost (1) platí. Skupin A_i je dohromady 20; vybereme-li proto libovolně 21 čísel z množiny $A_1 \cup \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}$, budou některá dvě z nich patřit do téže skupiny A_i,[2] tudíž budou splňovat (1). Proto číslo $n = 21$ má vlastnost ze zadání úlohy. Číslo $n = 20$ ji ovšem nemá: vybereme-li z každé ze skupin A_i její nejmenší prvek, dostaneme dvacet čísel

$$\begin{gathered} 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 12,\ 17,\ 25,\ 36,\ 51, \\ 73,\ 104,\ 148,\ 210,\ 297,\ 421,\ 596,\ 843,\ 1\,193,\ 1\,688, \end{gathered} \tag{2}$$

mezi nimiž nejsou žádná dvě čísla a, b splňující (1), neboť podle naší konstrukce je podíl následujícího čísla k číslu předchozímu vždy větší než $\sqrt{2}$.

Poznamenejme, že pouhé uvedení dvaceti čísel (2) z posledního odstavce nelze považovat za úplné řešení úlohy, i když prohlásíme, že jsme tuto dvacetici vybrali „co nejlépe“, tj. aby měla co nejvíce prvků a aby žádné dva z nich nesplňovaly (1).[3] Nemožnost výběru podobné skupiny 21 čísel je třeba nezpochybnitelně zdůvodnit; k tomu nám posloužil přihrádkový princip uplatněný k sestrojeným skupinám A_i.

Odpověď: Nejmenší přirozené číslo s požadovanou vlastností je $n = = 21$.

B – S – 1

Levou stranu L dokazované nerovnosti nejprve upravíme roznásobením a vzniklé členy sdružíme do dvojic navzájem převrácených výrazů:

$$\begin{aligned} L &= \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \left(ab + 1 + \frac{a}{c} + \frac{1}{bc}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \\ &= \left(abc + \frac{1}{abc}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

[2] Tomuto zřejmému poznatku se říká *přihrádkový* nebo též *Dirichletův* princip. Obecněji zní takto: Je-li $mk + 1$ předmětů umístěno do m skupin, leží v některé z nich aspoň $k + 1$ z těchto předmětů. V našem případě je $m = 20$ a $k = 1$.

[3] K ověření poznatku, že číslo $n = 20$ zkoumanou vlastnost nemá, mohou posloužit i mnohé jiné dvacetice čísel. Například číslo 1 688 v (2) můžeme zaměnit kterýmkoliv jiným číslem ze skupiny A_{20} apod.

V každé z posledních závorek je tedy součet tvaru $u + 1/u$, kde $u > 0$, který má, jak víme, hodnotu aspoň 2, přičemž rovnost číslu 2 nastane jedině pro $u = 1$. Podle tohoto známého tvrzení, které lze dokázat například úpravou

$$\left(u + \frac{1}{u}\right) - 2 = \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 \geqq 0,$$

pro výraz L platí $L \geqq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$, což jsme měli dokázat. Rovnost $L = 8$ ovšem nastane, právě když platí

$$abc + \frac{1}{abc} = a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = 2,$$

tedy jak jsme už vzpomenuli, právě když $abc = a = b = c = 1$, tj. právě když $a = b = c = 1$.

Poznámka. Dodejme, že upravená nerovnost

$$abc + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geqq 8$$

plyne okamžitě z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem osmi čísel

$$abc,\ a,\ b,\ c,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{abc},$$

neboť jejich součin (a tedy i geometrický průměr) je roven číslu 1, takže jejich aritmetický průměr má hodnotu aspoň 1.

Jiné řešení. V dokazované nerovnosti se nejprve zbavíme zlomků, a to tak, že obě její strany vynásobíme kladným číslem abc. Dostaneme tak ekvivalentní nerovnost

$$(ab + 1)(bc + 1)(ac + 1) \geqq 8abc,$$

která má po roznásobení levé strany tvar

$$a^2b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + ac + bc + 1 \geqq 8abc.$$

Poslední nerovnost lze upravit do tvaru

$$(abc - 1)^2 + ab(c - 1)^2 + ac(b - 1)^2 + bc(a - 1)^2 \geqq 0.$$

Tato nerovnost již zřejmě platí, neboť na levé straně stojí součet čtyř nezáporných výrazů, přitom rovnost nastane, právě když má každý ze čtyř těchto výrazů nulovou hodnotu, tedy právě když

$$abc - 1 = c - 1 = b - 1 = a - 1 = 0$$

neboli $a = b = c = 1$.

Další řešení. Danou nerovnost lze dokázat i bez roznásobování její levé strany. Stačí zapsat tři nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem:

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{b}\right) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{c}\right) \geqq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Jejich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 1,$$

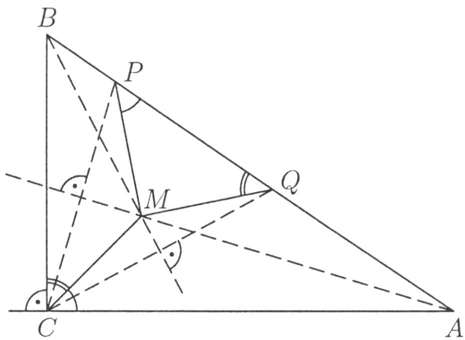
odkud po násobení osmi obdržíme dokazovanou nerovnost. Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost v každé ze tří použitých AG-nerovností, tedy právě když se čísla v každé průměrované dvojici rovnají:

$$a = \frac{1}{b}, \quad b = \frac{1}{c}, \quad c = \frac{1}{a}.$$

Z prvních dvou rovností plyne $a = c$, po dosazení do třetí rovnosti pak vychází $a = c = 1$, tudíž i $b = 1$.

B – S – 2

Podle zadání je trojúhelník APC rovnoramenný, přímka AM prochází jeho hlavním vrcholem A kolmo k základně CP, je tudíž osou vnitřního úhlu CAP (obr. 19). Body C a P jsou proto souměrně sdružené podle přímky AM, takže úhly APM a ACM jsou shodné. (Jinými slovy trojúhelníky APM a ACM jsou shodné podle věty *sus*: odpovídající si strany AC a AP svírají se společnou stranou AM týž úhel díky tomu, že AM je osou úhlu CAP.) Podobně z rovnoramenného trojúhelníku BQC odvodíme, že BM je osou úhlu CBQ, takže i úhly BQM a BCM jsou shodné.



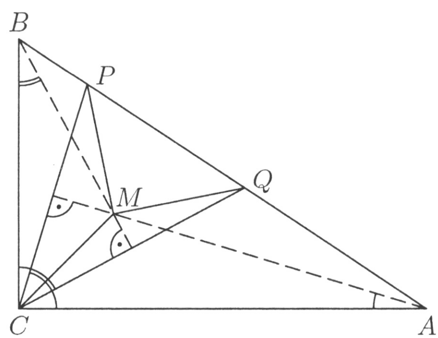
Obr. 19

Rovnosti $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM|$ a $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM|$ znamenají, že pro vnitřní úhly trojúhelníku PQM při vrcholech P, Q platí

$$|\sphericalangle QPM| + |\sphericalangle PQM| = |\sphericalangle APM| + |\sphericalangle BQM| =$$
$$= |\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ,$$

tudíž vnitřní úhel u třetího vrcholu M je pravý.

Jiný postup. Ze souměrnosti bodů P a C podle přímky AM plyne $|PM| = |CM|$, ze souměrnosti bodů Q a C podle BM plyne $|QM| = |CM|$ (obr. 20). Je tudíž $|PM| = |QM| = |CM|$ a bod M je tak středem kružnice opsané trojúhelníku PQC. Přitom označíme-li α a β



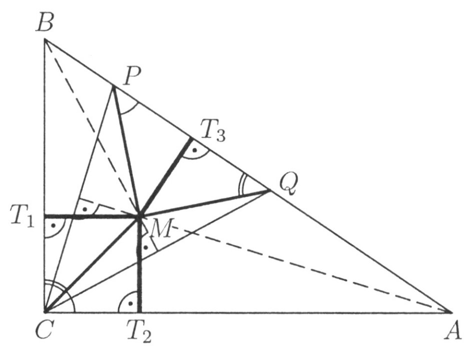
Obr. 20

úhly při vrcholech A a B, je $\alpha + \beta = 90^\circ$ a

$$(90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) + (90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) - |\sphericalangle PCQ| = 90^\circ,$$

takže $|\sphericalangle PCQ| = 45°$. To je velikost obvodového úhlu nad tětivou PQ zmíněné kružnice. Velikost odpovídajícího středového úhlu PMQ je tudíž $90°$.

Jiný postup. Bod M jako průsečík os úhlů CAB a CBA je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, vidíme tedy (obr. 21), že pravoúhlé trojúhelníky $PMT_3 \cong CMT_1$ a $QMT_3 \cong CMT_2$ jsou vesměs shodné. Odtud plyne, že trojúhelník PQM je rovnoramenný pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M.



Obr. 21

Jiný postup. Bod M jako průsečík os úhlů CAB a CBA leží i na ose pravého úhlu ACB. Proto úhly ACM a BCM mají oba velikost $45°$, takže $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM| = 45°$, $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM| = 45°$ a trojúhelník PQM je rovnoramenný pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M.

B – S – 3

Jak víme, kvadratická rovnice *má* dva různé reálné kořeny, právě když je její diskriminant kladný. Proto rovnice ze zadání úlohy tuto vlastnost *nemají*, právě když jsou jejich diskriminanty

$$D_1 = a^2 - 4b, \quad D_2 = b^2 - 4a$$

nekladné, tedy právě když platí

$$a^2 \leqq 4b \quad \text{a} \quad b^2 \leqq 4a. \tag{1}$$

Odtud předně plyne, že obě čísla b i a jsou nezáporná (protože jsou nezáporná obě čísla a^2 a b^2). Nyní na (1) pohlédneme jako na soustavu nerovnic s neznámou b a nezáporným parametrem a a snadno ji v oboru nezáporných čísel vyřešíme:

$$\frac{a^2}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{a}. \tag{2}$$

Nalezený interval je neprázdný, právě když pro nezáporný parametr a platí nerovnost

$$\frac{a^2}{4} \leqq 2\sqrt{a}, \quad \text{neboli} \quad a \leqq 4.$$

Protože čísla a, b jsou podle zadání celá, z odvozených nerovností $0 \leqq a \leqq 4$ plyne, že číslo a leží v množině $\{0,1,2,3,4\}$. Každé takové a jednotlivě do krajních výrazů v (2) dosadíme a vypíšeme, která celá b v příslušném intervalu leží:

$$\begin{aligned}
a = 0&\colon\ 0 \leqq b \leqq 0 && \iff b \in \{0\},\\
a = 1&\colon\ \tfrac{1}{4} \leqq b \leqq 2 && \iff b \in \{1,2\},\\
a = 2&\colon\ 1 \leqq b \leqq 2\sqrt{2} && \iff b \in \{1,2\},\\
a = 3&\colon\ \tfrac{9}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{3} && \iff b \in \{3\},\\
a = 4&\colon\ 4 \leqq b \leqq 4 && \iff b \in \{4\}.
\end{aligned}$$

Odpověď: Vyhovuje právě sedm dvojic (a,b):

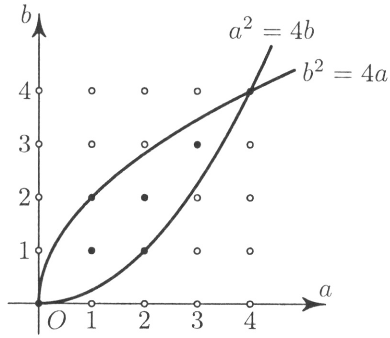
$$(0,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3) \text{ a } (4,4).$$

Poznámka. Z nerovností (1) lze odvodit nejen $0 \leqq a \leqq 4$, ale z důvodu symetrie rovněž $0 \leqq b \leqq 4$. Proto místo námi popsaného řešení úpravou na soustavu (2) stačí jednotlivě otestovat 25 dvojic (a,b), kde $a, b \in \{0,1,2,3,4\}$, zda vyhovují soustavě nerovností (1). Takovou úlohu lze rovněž interpretovat geometricky: v prvním kvadrantu souřadnicového systému Oab hledáme ty body s celočíselnými souřadnicemi, které leží uvnitř nebo na hranici oblasti omezené parabolami o rovnicích $4a = b^2$ a $4b = a^2$ (obr. 22).

B – II – 1

Danou rovnici upravíme na tvar

$$q(q-1) = p(p-1)(p+1);$$



Obr. 22

odtud plyne nerovnost $p < q$ (kdyby totiž bylo $p \geqq q$, potom i $p - 1 \geqq \geqq q - 1 > 0$, a protože $p + 1 > 1$, bylo by $p(p-1)(p+1) > q(q-1)$) a také to, že q dělí součin $p(p-1)(p+1)$. Protože q je prvočíslo, musí platit aspoň jeden ze vztahů $q \mid p$, $q \mid (p-1)$, $q \mid (p+1)$. Vzhledem k podmínkám $p < q$ a $p > 1$ nemůže q dělit ani p, ani $p-1$, a proto $q \mid (p+1)$. Musí tedy platit $q \leqq p+1$, a to spolu s $p < q$ dává $q = p+1$.

Jediná dvě prvočísla lišící se o 1 jsou 2 a 3. Proto $p = 2$ a $q = 3$. Zkouškou ověříme, že skutečně platí $2 + 3^2 = 3 + 2^3$.

Poznámka. Nerovnost $p < q$ se dá dokázat i následující úvahou: Zřejmě $p \neq q$. Prvočísla p a q jsou tedy nesoudělná, a protože $p \mid q(q-1)$, musí platit $p \mid (q-1)$ a odtud $p \leqq q - 1$.

B – II – 2

Šedá část obdélníku $ABCD$ se stranami délek $3n+1$ a $3n-1$, který má jednotkové čtverce při dvou vrcholech obarveny černou barvou a jednotkové čtverce při dalších dvou vrcholech bílou barvou, je souměrná podle středu obdélníku (stačí si uvědomit souměrnou sdruženost šedých čtverců nejbližších souměrně sdruženým vrcholům A a C, resp. B a D, symetrie na celém obdélníku pak plyne z toho, ze šedé čtverce se v každém řádku i sloupci opakují s periodou 3). Proto je šedá část trojúhelníku ABC shodná se šedou částí trojúhelníku CDA, a tedy obsah šedé části trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu šedé části obdélníku $ABCD$.

Obdélník $ABCD$ rozdělme na obdélník se stranami délek $3n$ a $3n-1$ a pás $3n-1$ jednotkových čtverců, v němž jeden koncový čtverec je černý a druhý bílý. V obdélníku $3n \times (3n-1)$ je počet černých, bílých i šedých jednotkových čtverců stejný, takže šedých je $n(3n-1)$. Kdybychom k pásu délky $3n-1$ přidali jeden šedý čtverec, byl by tam rovněž stejný počet n černých, bílých a šedých čtverců; v páse délky $3n-1$ je tedy $n-1$ šedých čtverců. Šedých čtverců v obdélníku $ABCD$ je $n(3n-1)+(n-1) = 3n^2-1$ a šedá část trojúhelníku ABC má obsah $S = \frac{1}{2}(3n^2-1)$; pro obdélník $2\,008 \times 2\,006$ je $n = 669$, takže

$$S = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 669^2 - 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2\,007^2 - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4\,028\,049}{3} - 1\right) = \\ = \frac{4\,028\,046}{6} = 671\,341.$$

Poznámka. Obsah šedé části trojúhelníku ABC můžeme určit i tak, že po diagonálách postupně spočítáme šedé čtverce, jež jsou celé obsaženy v trojúhelníku ABC, a připočteme polovinu počtu čtverců v prostřední šedé diagonále obdélníku $ABCD$, která je souměrná podle středu obdélníku, takže její část ležící v trojúhelníku ABC je shodná s částí ležící v trojúhelníku CDA:

$$S = 3 + 6 + \ldots + 2\,004 + \frac{1}{2} \cdot 2\,006 = 334 \cdot 2\,007 + 1\,003 = 671\,341.$$

B – II – 3

Označme S střed úhlopříčky AC. Úsečka SE je střední příčka trojúhelníku ABC, takže $|SE| = \frac{1}{2}|AB| = |DC|$. Navíc je $SE \parallel AB \parallel DC$. Úsečky SE a DC jsou rovnoběžné a shodné, proto je $SECD$ rovnoběžník.

Kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází bodem S právě tehdy, je-li rovnoběžník $SECD$ tětivový. Čtyřúhelník je tětivový, právě když je součet velikostí jeho protilehlých úhlů $180°$. V rovnoběžníku jsou ale protilehlé úhly shodné, takže je tětivový, právě když to je pravoúhelník, neboli když úhel ECD, a tedy i úhel ABC je pravý.

B – II – 4

Nadále předpokládejme, že $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$. Označme

$$V = a + b + c + 2(ab + ac + bc) + 3(1-a)(1-b)(1-c)$$

a nejprve místo nerovnosti $V \geqq 1$ dokažme silnější nerovnost

$$a + b + c + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geqq 1.$$

Roznásobením a úpravou levé strany dostaneme

$$\begin{aligned}(a + b + c) + (1 - a)(1 - b)(1 - c) &= \\ = 1 + ab + ac + bc - abc &= 1 + ab(1 - c) + ac + bc \geqq 1,\end{aligned}$$

protože v posledním součtu za jedničkou následují vesměs nezáporné sčítance.

K důkazu nerovnosti $V \leqq 9$ stačí vzhledem k tomu, že

$$2(ab + ac + bc) \leqq 6,$$

ověřit nerovnost

$$a + b + c + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq 3.$$

Uděláme to tak, že zřejmé nerovnosti

$$(1 - a)(1 - b) \leqq 1, \quad (1 - a)(1 - c) \leqq 1, \quad (1 - b)(1 - c) \leqq 1$$

vynásobíme po řadě (nezápornými) čísly $1 - c$, $1 - b$, $1 - a$; po sečtení všech tří získaných nerovností obdržíme

$$3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq (1 - a) + (1 - b) + (1 - c),$$

odkud již snadnou úpravou plyne kýžená nerovnost.

Jiné řešení. Zaměňme písmena a, b, c obvyklejšími písmeny x, y, z k označení proměnných (v našem případě z intervalu $\langle 0, 1\rangle$). Daný výraz $V = V(x, y, z)$ je při pevných hodnotách y, z lineární funkcí $Ax + B$ proměnné x s koeficienty

$$\begin{aligned}A &= 1 + 2(y + z) - 3(1 - y)(1 - z),\\ B &= y + z + 2yz + 3(1 - y)(1 - z).\end{aligned}$$

Protože grafem každé lineární funkce na uzavřeném intervalu je úsečka, budou nerovnosti $1 \leqq V(x, y, z) \leqq 9$ platit pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$, právě když budou platit pro obě krajní hodnoty $x = 0$ a $x = 1$, neboli $1 \leqq V(0, y, z) \leqq 9$ a $1 \leqq V(1, y, z) \leqq 9$. Protože pro libovolná $y, z \in \langle 0, 1\rangle$ máme

$$V(0, y, z) = y + z + 2yz + 3(1-y)(1-z) \leqq 1 + 1 + 2 + 3,$$
$$V(1, y, z) = 1 + y + z + 2(y + z + yz) \leqq 1 + 1 + 1 + 2 \cdot 3,$$

jsou nerovnosti $V(0, y, z) \leqq 9$ a $1 \leqq V(1, y, z) \leqq 9$ zřejmé. K důkazu zbylé nerovnosti $V(0, y, z) \geqq 1$ si opět povšimneme, že při pevném z je výraz $V(0, y, z)$ lineární funkcí $Cy + D$ proměnné y. Stačí proto pouze ověřit, že $V(0, 0, z) \geqq 1$ a zároveň $V(0, 1, z) \geqq 1$. To je ale zřejmé, neboť pro $z \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$V(0, 0, z) = 3 - 2z \geqq 1 \quad \text{a} \quad V(0, 1, z) = 1 + 3z \geqq 1.$$

Tím je úloha vyřešena. Dodejme ještě, že ze zmíněné linearity výrazu V v *každé* z proměnných x, y, z vyplývá, že jak největší, tak i nejmenší hodnota V na množině všech trojic (x, y, z) čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ musí být rovna jednomu z osmi čísel

$$V(0,0,0),\ V(0,0,1),\ V(0,1,0),\ V(0,1,1),$$
$$V(1,0,0),\ V(1,0,1),\ V(1,1,0),\ V(1,1,1);$$

s ohledem na symetrii výrazu V stačí vyčíslit pouze hodnoty $V(0,0,0) = 3$, $V(0,0,1) = 1$, $V(0,1,1) = 4$ a $V(1,1,1) = 9$.

Jiné řešení. Představme si krychli $1 \times 1 \times 1$ a tři navzájem kolmé roviny (rovnoběžné se stěnami krychle), které rozdělují hrany vycházející z každého vrcholu krychle na dvojice úseček délek a a $1 - a$, b a $1 - b$, resp. c a $1 - c$. Vidíme, že celou krychli lze pokrýt soustavou čtyř kvádrů o rozměrech

$$a \times 1 \times 1,\quad 1 \times b \times 1,\quad 1 \times 1 \times c,\quad (1-a) \times (1-b) \times (1-c),$$

což vyjádřeno jejich objemy dává geometrický důkaz nerovnosti

$$a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c + (1-a)(1-b)(1-c) \geqq 1,$$

ze které jsme odvodili závěr $V \geqq 1$ v prvním řešení. K druhému závěru $V \leqq 9$ nás tam přivedla nerovnost

$$a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c + 3(1-a)(1-b)(1-c) \leqq 3,$$

která má rovněž jasné „objemové“ zdůvodnění: v součtu na levé straně je každá část objemu celé krychle započítána nejvýše třikrát. Tím je celé geometrické řešení úlohy hotovo.

K předchozímu dodejme, že pokud přidáme k uvedeným čtyřem kvádrům ještě dva exempláře čtvrtého z nich a po dvou exemplářích každého ze tří kvádrů

$$a \times b \times 1, \; a \times 1 \times c, \; 1 \times b \times c,$$

bude hodnota V součtem objemů těchto 12 kvádrů, kterými lze „několikanásobně“ zaplnit celou krychli. Přitom každá z osmi částí krychle (rozdělené zmíněnými třemi rovinami) je součástí devíti, tří, čtyř nebo jednoho z 12 uložených kvádrů. Přesněji to zapíšeme rovností

$$\begin{aligned} V = {} & 9abc + 3(1-a)(1-b)(1-c) + \\ & + 4ab(1-c) + 4ac(1-b) + 4bc(1-a) + \\ & + a(1-b)(1-c) + b(1-a)(1-c) + c(1-a)(1-b). \end{aligned}$$

Vzhledem k počtu použitých částí tak pro objem V nutně platí $1 \leqq V \leqq 9$.