55. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie Z9

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 55. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2005/2006. 47. mezinárodní matematická olympiáda. 18. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2007. pp. 137–140.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405116

Kategorie Z9

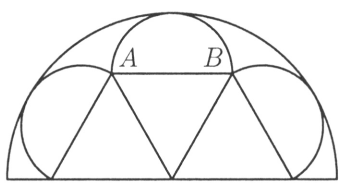
Texty úloh

Z9 – I – 1

Určete počet přirozených čísel od 100 do 999, která mají právě dvě stejné číslice. (*P. Tlustý*)

Z9 – I – 2

Na obr. 44 jsou tři rovnostranné trojúhelníky, tři malé polokružnice dotýkající se jedné velké polokružnice o poloměru 1 dm. Určete délku úsečky AB. (*P. Tlustý*)



Obr. 44

Z9 – I – 3

V soustavě souřadnic jsme znázornili body $A[3,2]$, $B[-1,1]$, $C[-2,4]$ a jejich obrazy A', B', C' ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic. Vypočítejte obsah šestiúhelníku $ABCA'B'C'$. (*S. Bednářová*)

Z9 – I – 4

Starý podnikatel zemřel a zanechal po sobě dva bankovní účty, jeden dluh a závěť. V závěti je psáno, že peníze z prvního účtu si mají rozdělit první a druhý syn v poměru 1 : 2, peníze z druhého účtu první a třetí syn v poměru 1 : 3 a dluh mají zaplatit druhý a třetí syn v poměru 2 : 3. Zjistěte, kolik korun bylo na prvním, kolik na druhém účtu a jaký dluh museli synové zaplatit, víte-li, že v konečném důsledku každý z nich získal 123 456 korun. (*S. Bednářová*)

Z9 – I – 5

Dva rovnostranné papírové trojúhelníky, z nichž menší má obsah $60\,\text{cm}^2$, jsme položili přes sebe tak, že jejich průnikem byl pravoúhlý trojúhelník s obsahem $30\,\text{cm}^2$. Jaký nejmenší obsah mohl mít větší z rovnostranných trojúhelníků? (*S. Bednářová*)

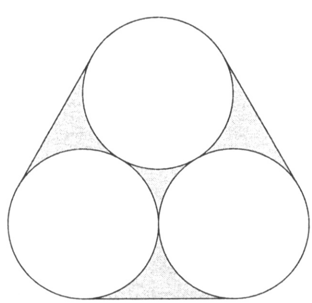
Z9 – I – 6

Prověrka obsahovala 26 otázek, jež byly rozděleny podle obtížnosti do tří skupin. V první byla každá správná odpověď hodnocena třemi body, ve druhé pěti body a ve třetí osmi body. Maximální počet bodů byl 111. Kolik otázek mohlo být v jednotlivých skupinách? (*L. Šimůnek*)

Petr a Honza šli plavat. Vzdálenosti, které uplavali, byly v poměru 4 : 5, Honza uplaval více. Další den šli znovu, tentokrát Petr uplaval o 200 metrů méně a Honza o 100 metrů více než předchozí den a poměr vzdáleností byl 5 : 8. Kolik metrů uplavali Honza a Petr první den? (*B. Šťastná*)

Z9 – II – 1

Určete obsah šedé plochy na obr. 45, pokud víte, že kružnice se navzájem dotýkají a mají poloměr 1 cm a úsečky, které plochu ohraničují, jsou jejich společné tečny. (*P. Tlustý*)



Obr. 45

Z9 – II – 2

Marek si hraje s jednoduchou kalkulačkou. Na papír si napsal jedno číslo. Zadal je do kalkulačky a pak postupně mačkal tlačítka: plus, čtyři, děleno, čtyři, minus, čtyři, krát, čtyři. Výsledek opsal na papír. Poté s tímto číslem postupoval stejně jako s předcházejícím, tedy zase: plus, čtyři, děleno, čtyři, minus, čtyři, krát, čtyři. Výsledek si opět opsal na papír. Celý postup s tímto nově získaným číslem zopakoval a opět výsledek opsal na papír. Poté zjistil, že součet čtyř čísel zapsaných na papíře je 80. Která čísla a v jakém pořadí napsal Marek na papír? (*M. Raabová*)

Z9 – II – 3

V rovnostranném trojúhelníku označte každý bod, jehož vzdálenost od nejbližšího vrcholu je menší než vzdálenost od těžiště. Kolik procent plochy rovnostranného trojúhelníku zaujímají body se zmíněnou vlastností? (*L. Šimůnek*)

Z9 – II – 4

Doplňte do čtverečků přirozená čísla tak, aby: součet všech doplněných čísel byl 44, součet čísel v každém čtyřčtverečkovém čtverci byl stejný, nejmenší doplněné číslo bylo liché, uprostřed čtverce bylo jednociferné číslo.

	7	
8		4
	2	

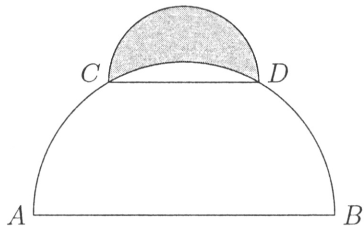
(*S. Bednářová*)

Z9 – III – 1

Určete obsah šedého měsíčku z obr. 46, pokud víte, že průměr AB větší polokružnice má délku 2 cm, průměr CD menší polokružnice má délku 1 cm a platí $AB \parallel CD$. (*P. Tlustý*)

Z9 – III – 2

Kuba našel ve sklepě tři krabice tvaru kvádru se čtvercovou podstavou. První byla dvakrát vyšší než druhá. Druhá byla 1,5krát širší než první.



Obr. 46

Třetí byla třikrát vyšší než první a dvakrát užší než první. V jakém poměru jsou objemy krabic? (*M. Raabová*)

Z9 – III – 3

Při přijímacích zkouškách na univerzitu je každému zájemci o studium přidělován krycí kód složený z pěti číslic. Zkoušky organizoval důkladný, leč pověrčivý docent, který se před přidělováním kódů rozhodl vyřadit ze všech možných kódů (tj. 00000 až 99999) ty, které v sobě obsahovaly číslo 13, tedy číslici 3 bezprostředně následující po číslici 1. Kolik kódů musel docent vyřadit? (*L. Šimůnek*)