55. ročník matematické olympiády na středních školách

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 55. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2005/2006. 47. mezinárodní matematická olympiáda. 18. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2007. pp. 145–157.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405118

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

Žilina, 26.–28. června 2006

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již šesté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovaly šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 47. MMO v Lublani.

Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	Body	Součet
1.	Michał Pilipczuk	POL	7 7 2 7 7 6	36
2.	František Simančík	SVK	7 6 1 2 7 7	30
3.	Michal Burger	SVK	7 7 1 2 7 5	29
4.–5.	*Pavel Kocourek*	CZE	7 0 7 7 2 5	28
	Tomasz Kulczyński	POL	7 7 2 0 7 5	28
6.	Tomasz Warszawski	POL	7 6 1 2 4 7	27
7.–8.	*František Konopecký*	CZE	7 0 7 0 7 3	24
	Marek Pechal	CZE	7 0 1 5 7 4	24
9.	Ondrej Budáč	SVK	7 0 2 0 7 7	23
10.	*Jaromír Kuben*	CZE	6 0 7 2 0 7	22
11.–12.	Jozef Bodnár	SVK	2 3 1 2 7 5	20
	Wojciech Śmietanka	POL	6 6 1 7 0 0	20
13.–14.	Nadbor Drozd	POL	7 0 1 0 7 4	19
	Jakub Závodný	SVK	7 0 2 2 7 1	19
15.	*Jakub Opršal*	CZE	7 0 1 2 7 0	17
16.	Peter Černo	SVK	7 0 2 2 0 0	11
17.	Piotr Achinger	POL	1 0 1 2 6 0	10
18.	*Jaroslav Hančl*	CZE	1 0 0 0 3 0	4

Hodnocení vyřešených úloh koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaroslav Švrček* a *Jaroslav Zhouf* za Českou republiku, *Vojtech Bá-*

lint, *Peter Novotný* a *Ján Mazák* za domácí Slovensko a *Józef Kalinowski* a *Tomasz Szymczyk* za Polsko.

Texty soutěžních úloh

1. Na kružnici o poloměru r leží pět různých bodů A, B, C, D, E v tomto pořadí, přičemž platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokažte, že trojúhelník, jehož vrcholy tvoří průsečíky výšek trojúhelníků ACD, BCD a BCE, je pravoúhlý. (*Tomáš Jurík*)

2. Kolem okrouhlého stolu sedí n dětí. Erika je z nich nejstarší a má n bonbonů. Ostatní děti žádné bonbony nemají. Erika se rozhodla, že bonbony rozdělí, a stanovila následující pravidla. V každém kole zdvihnou ruce všechny děti, jež mají u sebe aspoň dva bonbony. Erika jednoho z přihlášených vybere a ten dá každému svému sousedovi jeden bonbon. (V prvním kole se tedy přihlásí jen Erika a dá svým dvěma sousedům po bonbonu.) Zjistěte, pro které $n \geqq 3$ může dělení po konečném počtu kol skončit tak, že každé dítě bude mít právě jeden bonbon.

(*Peter Novotný*)

3. Součet čtyř reálných čísel se rovná 9, součet jejich druhých mocnin se rovná 21. Dokažte, že daná čísla je možno označit a, b, c a d tak, aby platila nerovnost $ab - cd \geqq 2$. (*Jaromír Šimša*)

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $k \geqq 1$ existuje přirozené číslo n takové, že v zápise čísla 2^n v desítkové soustavě se nachází blok právě k po sobě jdoucích nul, tj.

$$2^n = \dots a\underbrace{00\dots0}_{k \text{ nul}}b\dots,$$

přičemž číslice a, b jsou nenulové. (*Peter Novotný*)

5. Zjistěte, kolik existuje posloupností celých čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ takových, že pro každé přirozené číslo n platí

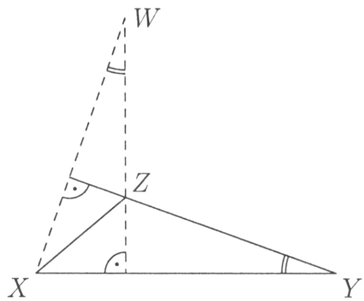
$$a_n \neq -1 \qquad \text{a} \qquad a_{n+2} = \frac{a_n + 2\,006}{a_{n+1} + 1}.$$

(*Peter Novotný*)

6. Zjistěte, zda existuje konvexní pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ takový, že pro každé $i = 1, 2, 3, 4, 5$ jsou přímky A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ různoběžné a protínají se v bodě B_i, přičemž body B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 leží v přímce. (Klademe $A_6 = A_1$, $A_7 = A_2$ a $A_8 = A_3$.) (*Waldemar Pompe*)

Řešení soutěžních úloh

1. V libovolném tupoúhlém trojúhelníku XYZ s tupým úhlem při vrcholu Z a průsečíkem výšek W mají úhly XYZ a XWZ stejnou velikost, oba jsou totiž doplňkem do 90° úhlu YXW (obr. 47). Navíc body Y a W leží v opačných polorovinách určených přímkou XZ.



Obr. 47

Označme průsečíky výšek uvažovaných trojúhelníků postupně P, Q, R. Ukážeme, že úhel PQR je pravý.

Zřejmě všechny tři uvedené trojúhelníky mají při vrcholu C tupý úhel. Body P, Q, R tedy leží ve vnější oblasti dané kružnice (obr. 48). Z rovnosti $|AC| = |BD|$ plyne, že jsou přímky BC a AD rovnoběžné. Protože polopřímka BD leží v konvexním úhlu CBE a přitom

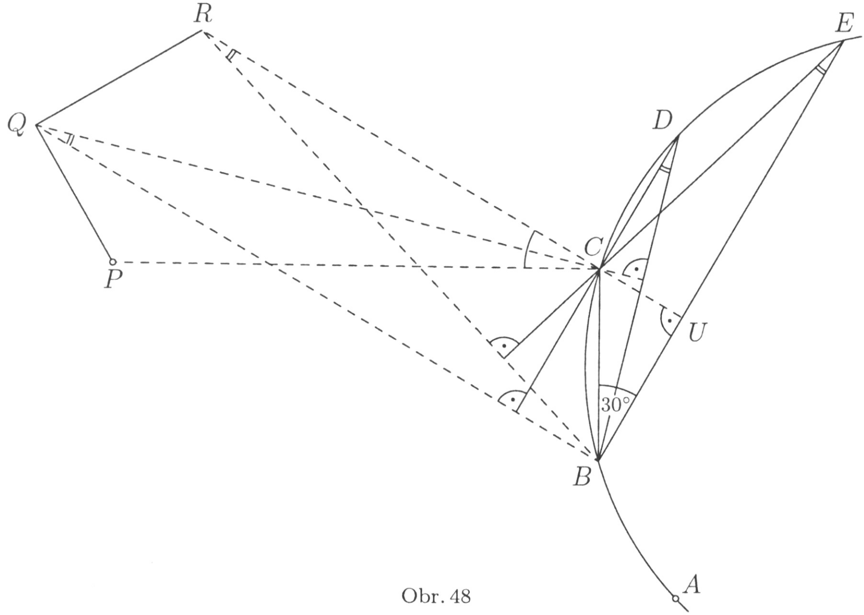
$$CP \perp AD \parallel BC, \quad CQ \perp BD, \quad CR \perp BE,$$

je zřejmé nejen to, že polopřímka CQ leží „mezi" polopřímkami CP a CR, tj. v konvexním úhlu PCR, ale také to, že $|\sphericalangle PCR| = |\sphericalangle CBE| = 30°$, neboť tětivě CE velikosti poloměru přísluší středový úhel 60°.

Podle tvrzení z úvodního odstavce leží body Q a R v téže polorovině určené přímkou BC a platí

$$|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BRC| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BQC|.$$

Přitom úhly BEC a BDC mají stejnou velikost, poněvadž se jedná o obvodové úhly nad společnou tětivou BC. Je tedy také $|\sphericalangle BRC| = |\sphericalangle BQC|$, takže čtyřúhelník $BCRQ$ je tětivový. Pro velikost úhlu CRQ proto platí $|\sphericalangle CRQ| = 180° - |\sphericalangle QBC| = 120°$ (z $|BD| = |CE|$ totiž plyne $CD \parallel BE$, což spolu s $QB \perp CD$ dává $|\sphericalangle QBE| = 90°$, neboli $|\sphericalangle QBC| = 60°$).



Obr. 48

Analogicky zjistíme, že i čtyřúhelník $DCPQ$ je tětivový a platí $|\sphericalangle CPQ| = 180° - |\sphericalangle QDC| = 120°$ (PD je výška na stranu AD, přičemž velikost úhlu ADC nad tětivou AC je 30°). Dopočítáním úhlu PQR ve čtyřúhelníku $PCRQ$ dostáváme $|\sphericalangle PQR| = 360° - 30° - 2 \cdot 120° = 90°$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

2. Nejprve ukážeme, že pro sudé n dělení nikdy nemůže skončit požadovaným způsobem. V každém kole se změní poloha jen dvou bonbonů, přičemž se posunou „opačnými směry". To nás vede ke zkoumání, jak se mění celkový součet vzdáleností bonbonů od daného dítěte, řekněme od Eriky. Označme jednotlivá místa po směru hodinových ručiček čísly od 0 do $n-1$ podle vzdálenosti (v tomto směru) od Eriky. Po každém kole sečtěme vzdálenosti všech bonbonů od Eriky a označme součet S (tj. s každým bonbonem zahrneme do S číslo místa, kde sedí jeho aktuální držitel). Pokud v daném kole vybere Erika dítě na místě s číslem k ($1 \leqq k \leqq n-2$), hodnota S se nezmění — namísto $2k$ bude v součtu $(k-1)+(k+1) = 2k$. Pokud vybere dítě na místě s číslem $n-1$, v S místo $2(n-1) = 2n-2$ bude $(n-2)+0$, hodnota součtu se tedy zmenší o n. A konečně pokud vybere sebe, místo $2 \cdot 0$ bude v součtu $(n-1)+1 = n$, takže se hodnota S o n zvětší. Protože na začátku je $S = 0$ a může se měnit jen o hodnotu $\pm n$, zůstane S po každém kole dělitelné číslem n, tj. S/n bude stále celé číslo. Ovšem pokud by každé dítě mělo právě jeden bonbon, výsledný součet by byl

$$S = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \text{neboli} \quad \frac{S}{n} = \frac{n-1}{2},$$

což pro sudá n není celé číslo. Taková situace tedy nastat nemůže.

Věnujme se teď lichým hodnotám n. Ukážeme, že existuje dělení, které skončí tak, že každé dítě bude mít právě jeden bonbon. Nechť $n = 2k + 1$. Vhodné dělení sestrojíme indukcí; přesněji, dokážeme, že pro každé $i = 0, 1, \ldots, k$ umíme dostat pozici, v níž Erika má $n - 2i$ bonbonů a prvních i dětí sedících nalevo a zároveň i prvních i dětí napravo má po jednom bonbonu. Hodnota $i = 0$ představuje počátek dělení, hodnota $i = 1$ stav po prvním kole (a tedy první indukční krok) a hodnota $i = k$ stav, kdy má každý jeden bonbon. Předpokládejme, že se nám podařilo dostat se do popsané pozice pro nějakou hodnotu $i = m$, přičemž $1 \leqq m < k$ (a prošli jsme přitom všemi pozicemi pro $i < m$). V této situaci postupujme následovně: Nejprve dá Erika po bonbonu dvěma svým sousedům (protože $m < k$, má aspoň tři bonbony a může to udělat). Další kola jsou znázorněna v následujícím schématu. (Čísla znamenají počty bonbonů u Eriky a dětí napravo od ní, situace nalevo je symetrická.)

$$\underline{n-2m}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, 0, \ldots \;\to\; n-2m-2, \underline{2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}, 0, \ldots \;\to$$

$$\to\; n-2m, 0, \underline{2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-2}, 0, \ldots \;\to\; n-2m, 1, 0, \underline{2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-3}, 0, \ldots \;\to$$

$$\to\; n-2m, 1, 1, 0, \underline{2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-4}, 0, \ldots \;\to\; \ldots \;\to$$

$$\to\; n-2m, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-2}, 0, \underline{2}, 0, \ldots \;\to\; n-2m, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}, 0, 1, 0, \ldots$$

Dostali jsme se tak do pozice, kdy Erika má $n - 2m$ bonbonů, prvních $m - 1$ dětí napravo i nalevo má po jednom bonbonu, m-té dítě po obou stranách nemá žádný bonbon a děti vzdálené o $m+1$ míst mají po jednom bonbonu. Abychom dosáhli pozice pro $i = m + 1$, stačí doplnit bonbony právě dětem na místech vzdálených od Eriky o m. Na to však můžeme využít indukční předpoklad. Pokud si totiž odmyslíme bonbony u dětí vzdálených o $m+1$ míst, dostaneme pozici pro $i=m-1$ (jen Erika má o dva bonbony méně, avšak stále má aspoň tři, můžeme tedy učinit tytéž kroky). Odtud se už umíme dostat do situace pro $i=m$. Vrátíme-li zpět odmyšlené bonbony, dostaneme pozici pro $i=m+1$.

Nakonec se nám proto podaří dosáhnout i pozice pro $i=k$, tj. pro lichá n dělení může skončit tak, že každé dítě má právě jeden bonbon.

Poznámky. Pro sudé n, jež není dělitelné čtyřmi, se dá tvrzení dokázat jednodušeji. V takovém případě stačí totiž příslušná místa obsazená dětmi střídavě obarvit bílou a černou. Je zřejmé, že parita počtu bonbonů u všech dětí na bílých místech (kterých je pro takové n lichý počet) se nemění. Na začátku je tato hodnota sudá, zatímco v situaci, kdy by každé dítě mělo právě jeden bonbon, by byla lichá. Proto není možné se do takové situace dostat.

Dá se ukázat, že v případě lichého n dělení dokonce musí vždy (bez ohledu na to, jako děti vybíráme) po konečném počtu kroků skončit tak, že každé dítě má právě jeden bonbon. Je-li $n=2k+1$, počet kol, po nichž to nastane, je vždy $1^2+2^2+\ldots+k^2$.

3. Označme daná čísla p, q, r, s tak, aby $p \geqq q \geqq r \geqq s$.

Uvažujme nejprve případ $p+q \geqq 5$. Potom

$$p^2+q^2+2pq \geqq 25 = 4+(p^2+q^2+r^2+s^2) \geqq 4+p^2+q^2+2rs,$$

odkud máme $pq-rs \geqq 2$. V tomto případě tedy tvrzení platí.

Předpokládejme tedy, že $p+q<5$; potom

$$4 < 9-(p+q) = r+s \leqq p+q < 5. \tag{1}$$

Všimněme si, že

$$\begin{aligned}&(pq+rs)+(pr+qs)+(ps+qr) =\\ &= \frac{(p+q+r+s)^2-(p^2+q^2+r^2+s^2)}{2} = 30.\end{aligned}$$

Navíc

$$pq+rs \geqq pr+qs \geqq ps+qr,$$

protože $(p-s)(q-r) \geqq 0$ a $(p-q)(r-s) \geqq 0$. Odtud dostáváme, že $pq+rs \geqq 10$. Z (1) vyplývá $0 \leqq (p+q)-(r+s) < 1$, takže

$$(p+q)^2-2(p+q)(r+s)+(r+s)^2 < 1.$$

Když tuto nerovnost přičteme ke zřejmé rovnosti

$$(p+q)^2 + 2(p+q)(r+s) + (r+s)^2 = 9^2,$$

dostaneme

$$(p+q)^2 + (r+s)^2 < 41.$$

Proto

$$\begin{aligned}41 = 21 + 2 \cdot 10 \leqq (p^2+q^2+r^2+s^2) + 2(pq+rs) = \\ = (p+q)^2 + (r+s)^2 < 41,\end{aligned}$$

což je spor. Takový případ tedy nastat nemůže.

Jiné řešení. Z rovnosti $a+b+c+d=9$ při uspořádání $a \geqq b \geqq c \geqq d$ nejprve vyplývá, že aritmetické průměry dvojic čísel a, b, resp. c, d mají pro vhodné $\varepsilon_1 \geqq 0$ vyjádření

$$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{4} + \varepsilon_1, \qquad \frac{c+d}{2} = \frac{9}{4} - \varepsilon_1.$$

Odtud zase vyplývá vyjádření čísel a, b, c, d ve tvaru

$$a = \frac{9}{4} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad b = \frac{9}{4} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \qquad c = \frac{9}{4} - \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \quad d = \frac{9}{4} - \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

pro vhodná $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \geqq 0$. Nerovnost $b \geqq c$ znamená, že

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqq -\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \quad \text{neboli} \quad \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq 2\varepsilon_1.$$

Z rovnosti

$$\begin{aligned}21 = (a^2+b^2) + (c^2+d^2) = 2 \cdot \left(\frac{9}{4} + \varepsilon_1\right)^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2 \cdot \left(\frac{9}{4} - \varepsilon_1\right)^2 + 2\varepsilon_3^2 = \\ = 4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 4\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 = 20 + \frac{1}{4} + 2 \cdot (2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)\end{aligned}$$

zjistíme, že nezáporná čísla ε_i splňují vztah

$$2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \frac{3}{8}. \tag{2}$$

Vzhledem k nerovnostem $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq 2\varepsilon_1$ a $\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leqq (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2$ vyplývá z (2) odhad

$$\frac{3}{8} \leqq 2\varepsilon_1^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \leqq 2\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1^2 = 6\varepsilon_1^2,$$

odkud $\varepsilon_1^2 \geqq \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$, neboli $\varepsilon_1 \geqq \frac{1}{4}$. Pro zkoumaný výraz $ab - cd$ platí

$$ab - cd = \left(\frac{9}{4} + \varepsilon_1\right)^2 - \varepsilon_2^2 - \left(\frac{9}{4} - \varepsilon_1\right)^2 + \varepsilon_3^2 = 9\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2.$$

Dosadíme-li za ε_2^2 vyjádření z (2), dostaneme

$$\begin{aligned} ab - cd = 9\varepsilon_1 - \left(\frac{3}{8} - 2\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2\right) + \varepsilon_3^2 = 9\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^2 - \frac{3}{8} + 2\varepsilon_3^2 \geqq \\ \geqq 9 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = 2. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

4. Nejprve ukážeme, že v zápisech mocnin čísla 2 se nalézají libovolně dlouhé bloky nul. Aby v zápise čísla 2^n byl blok *aspoň* k nul, musí to být číslo tvaru $y \cdot 10^{m+k} + z$, kde y, z jsou přirozená a z má nejvýše m číslic, tj. $z < 10^m$. Stačí tedy najít taková n a m, aby bylo $2^n \geqq 10^{m+k}$ a zbytek čísla 2^n po dělení číslem 10^{m+k} byl menší než 10^m. Podle Eulerovy věty pro každé přirozené t platí

$$2^{\varphi(5^t)} \equiv 1 \pmod{5^t}.$$

(Využili jsme, že čísla 2 a 5^t jsou nesoudělná.) Vynásobením této kongruence číslem 2^t dostaneme

$$2^{t+\varphi(5^t)} \equiv 2^t \pmod{10^t}, \quad \text{neboli} \quad 2^{t+\varphi(5^t)} = y \cdot 10^t + 2^t$$

pro nějaké přirozené y. Podle předchozích úvah volme $n = t + \varphi(5^t)$ a $m = t-k$. Přitom t musí mít takovou hodnotu, aby bylo jednak $2^{t+\varphi(5^t)} \geqq 10^t$ neboli $2^{\varphi(5^t)} \geqq 5^t$ (což zřejmě platí pro každé $t \geqq 1$, neboť $\varphi(5^t) = 4 \cdot 5^{t-1}$), jednak $2^t < 10^{t-k}$. Takové t určitě existuje, stačí například vzít $t = 2k$ (neboť $2^{2k} = 4^k < 10^k$). Z uvedeného vyplývá, že v čísle

$$2^{2k+\varphi(5^{2k})} = y \cdot 10^{2k} + 2^{2k}$$

se nachází blok aspoň k nul.

Vezměme tedy pro dané k takovou mocninu dvojky (označme ji 2^n), jež obsahuje blok právě r nul, přičemž $r \geqq k$. Zkoumejme, co se s blokem děje, když bereme další mocniny, tj. když číslo s blokem postupně násobíme dvěma. Vzhledem k tomu, že máme (a, b označují nějaké nenulové číslice)

$$2^n = \underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{00\ldots0}_{r \text{ nul}}\underbrace{b\ldots}_{z} = y \cdot 10^{r+s} + z,$$

dostaneme $2^{n+1} = 2y \cdot 10^{r+s} + 2z$. Přitom číslo $2z$ má zřejmě buď s číslic (stejně jako číslo z), anebo $s+1$ číslic. Z „pravé strany" se tedy blok nul buď nezmenší, anebo se zmenší o jednu. Z „levé strany" se blok může jen prodloužit (pokud je y dělitelné pěti). Celkově se tak délka bloku buď zmenší o jednu, nebo se nezmění, nebo se zvětší. Budeme-li dál násobit dvěma, délka bloku se v každém kroku zmenší nejvýše o jednu. Tedy jediná možnost, kdy blok nikdy nedosáhne délky k, je, že blok bude mít stále délku větší než k. To však není možné. Číslo y má totiž ve svém prvočíselném rozkladu pětku s nějakým exponentem, řekněme α. Když 2^n vynásobíme α-krát dvěma, při dalším násobení se už blok zřejmě „zleva" prodlužovat nebude. A „zprava" se blok minimálně po každém čtvrtém násobení zkrátí (neboť $2^4 > 10$). A tak po dostatečném počtu kroků dostaneme mocninu čísla 2, která obsahuje blok právě k nul.

5. Každá posloupnost splňující podmínky zadání je určena prvními dvěma členy — všechny další vypočítáme z rekurentního vztahu. Hledáme tedy takové dvojice (a_1, a_2), pro něž jsou všechny členy posloupnosti celá čísla. Napišme daný vztah pro několik malých hodnot n. Po odstranění zlomků dostaneme

$$\begin{aligned} a_3(a_2+1) &= a_1 + 2\,006, \\ a_4(a_3+1) &= a_2 + 2\,006, \\ a_5(a_4+1) &= a_3 + 2\,006, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Odečtěme sousední rovnosti, abychom se zbavili čísla 2 006. Po přeuspořádání členů získáme rovnosti

$$\begin{aligned} a_3 - a_1 &= (a_3+1)(a_4-a_2), \\ a_4 - a_2 &= (a_4+1)(a_5-a_3), \\ a_5 - a_3 &= (a_5+1)(a_6-a_4), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

Protože podle zadání jsou všechny závorky $(a_n + 1)$ nenulové, mohou nastat dvě možnosti. Pokud $a_3 - a_1 = 0$, postupným dosazováním do předešlých rovností dostaneme také $a_4 - a_2 = 0$, $a_5 - a_3 = 0$, …, tj.

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots \qquad \text{a} \qquad a_2 = a_4 = a_6 = \ldots \tag{2}$$

Na druhé straně, pokud $a_3 - a_1 \neq 0$, stejným dosazováním odvodíme, že $a_4 - a_2 \neq 0$, $a_5 - a_3 \neq 0$, … Věnujme se nejprve druhé možnosti.

Z rovností (1) máme pro každé $n \geqq 1$ vztah

$$0 < |a_{n+3} - a_{n+1}| = |a_{n+2} - a_n| \cdot \frac{1}{|a_{n+2} + 1|} \leqq |a_{n+2} - a_n|. \qquad (3)$$

Dostáváme tak nerostoucí posloupnost kladných celých čísel

$$|a_3 - a_1| \geqq |a_4 - a_2| \geqq |a_5 - a_3| \geqq \dots$$

Tato posloupnost je zřejmě od určitého členu počínaje konstantní (jinak bychom z ní mohli vybrat nekonečnou klesající posloupnost kladných celých čísel, což není možné). Existuje tedy takový index N a hodnota d, že pro každé $n \geqq N$ je $|a_{n+2} - a_n| = d$. Podle (3) potom $|a_{n+2} + 1| = 1$, tj. pro každé $n \geqq N + 2$ máme $a_n \in \{0, -2\}$. Avšak podle zadání

$$a_{N+4} = \frac{a_{N+2} + 2\,006}{a_{N+3} + 1},$$

neboli a_{N+4} nabývá jedné z hodnot

$$\frac{0 + 2\,006}{0 + 1} = 2\,006, \qquad \frac{0 + 2\,006}{-2 + 1} = -2\,006,$$
$$\frac{-2 + 2\,006}{0 + 1} = 2\,004, \qquad \frac{-2 + 2\,006}{-2 + 1} = -2\,004,$$

což odporuje tomu, že $a_{N+4} \in \{0, -2\}$. V tomto případě žádná posloupnost podmínkám zadání nevyhovuje.

Každá vyhovující posloupnost proto splňuje (2). Dosazením $n = 1$ a $a_3 = a_1$ do dané rovnosti dostaneme

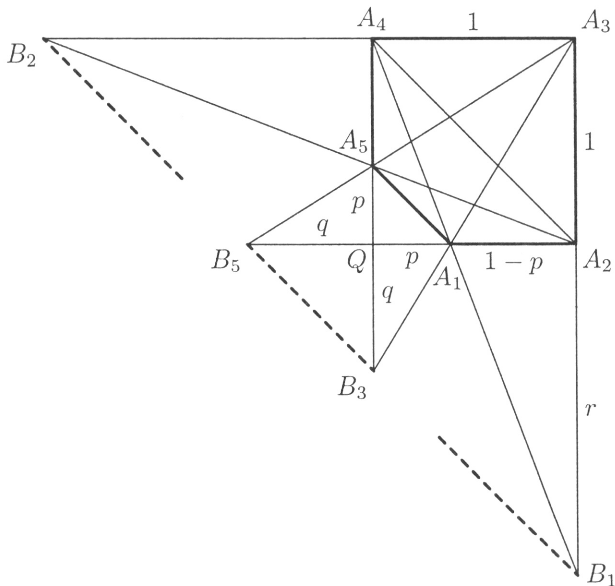
$$a_1 = \frac{a_1 + 2\,006}{a_2 + 1}, \quad \text{neboli} \quad a_1 a_2 = 2\,006 = 2 \cdot 17 \cdot 59.$$

Berouce do úvahy $a_1, a_2 \neq -1$, dostáváme

$$a_1 \in \{1, \pm 2, \pm 17, \pm 34, \pm 59, \pm 118, \pm 1\,003, 2\,006\} \quad \text{a} \quad a_2 = \frac{2\,006}{a_1}.$$

Snadno ověříme, že každá takováto posloupnost $a_1, a_2, a_1, a_2, a_1, \dots$ podmínky zadání splňuje. Hledaných posloupností je tudíž 14.

6. Zkusme pětiúhelník s popsanými vlastnostmi najít. Překážkou je, že pětiúhelníky souměrné podle nějaké osy (pro něž by snad mohlo být jednodušší ukázat, že popsané body leží v přímce) mají vždy aspoň jednu dvojici přímek A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rovnoběžnou. Začněme tedy s jednodušší úlohou — hledejme pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ takový, že jen čtyři z bodů B_i budou ležet v přímce. Takový si už můžeme dovolit hledat mezi osově souměrnými pětiúhelníky. Abychom situaci ještě zjednodušili, předpokládejme, že body A_2, A_3, A_4 jsou vrcholy čtverce $QA_2A_3A_4$ o straně délky 1 a body A_1, A_5 leží postupně na stranách QA_2 a QA_4 ve vzdálenosti p od vrcholu Q (obr. 49). Ze souměrnosti (pětiúhelník je sou-



Obr. 49

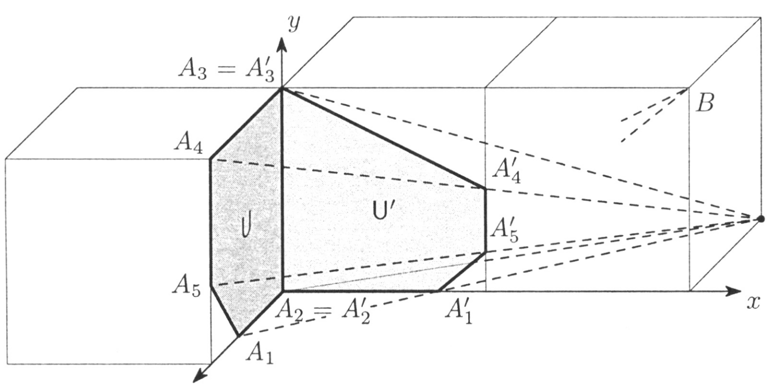
měrný podle osy QA_3) je zřejmé, že přímky B_1B_2, B_3B_5 jsou rovnoběžné. Snadno vypozorujeme, že v případě, kdy p nabývá malé hodnoty, tj. když body A_1, A_5 jsou blízko bodu Q, nachází se přímka B_3B_5 mnohem blíž bodu Q než přímka B_1B_2. Naopak pro hodnoty p blízké 1 jsou body A_1, A_5 blízko bodů A_2, A_4 a blíž bodu Q je přímka B_1B_2 (dokonce pro $p = \frac{3}{4}$ bod Q obsahuje a pro $p > \frac{3}{4}$ budou obě přímky ležet na opačných stranách od bodu Q) než přímka B_3B_5. Dá se proto očekávat, že pro nějakou hodnotu $p \in (0,1)$ jsou obě přímky totožné a body B_1, B_2, B_3, B_5 tak leží na jedné přímce. Nalezněme takové p.

Označme $|B_5Q| = |B_3Q| = q$ a $|B_1A_2| = r$. Z podobnosti trojúhelníků B_5QA_5 a $B_5A_2A_3$ máme $q : p = (q+1) : 1$ neboli $q = \dfrac{p}{1-p}$. Z podobnosti trojúhelníků $B_1A_2A_1$ a $B_1A_3A_4$ máme $r : (1-p) = (r+1) : 1$ neboli $r = \dfrac{1-p}{p}$. Konečně k tomu, aby bod B_1 ležel na přímce B_3B_5, stačí, aby byly podobné trojúhelníky B_5QB_3 a $B_5A_2B_1$, tj. aby trojúhelník $B_5A_2B_1$ byl také rovnoramenný, neboli $q+1 = r$. Po dosazení předchozích vztahů a jednoduché úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$p^2 - 3p + 1 = 0.$$

Ta má v intervalu $(0,1)$ jediné řešení $p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. Pro nalezené p tedy body B_1, B_3, B_5, B_2 leží na jedné přímce. Navíc přímky A_1A_5 a A_2A_4 (které by se, kdyby nebyly rovnoběžné, protínaly v bodě B_4) jsou s ní rovnoběžné. V jistém smyslu se tedy tyto tři přímky protínají „v nekonečnu“ v „bodě“ B_4 a všechny body B_i tak „leží“ na jedné přímce.

Abychom vyhověli podmínkám zadání, stačí najít vhodné zobrazení, které „bod z nekonečna“ zobrazí na konkrétní bod (a zachová všechny ostatní potřebné vlastnosti, tj. zobrazí přímky na přímky). Takovým zobrazením je středové promítání (obr. 50). Uvažujme kartézskou soustavu



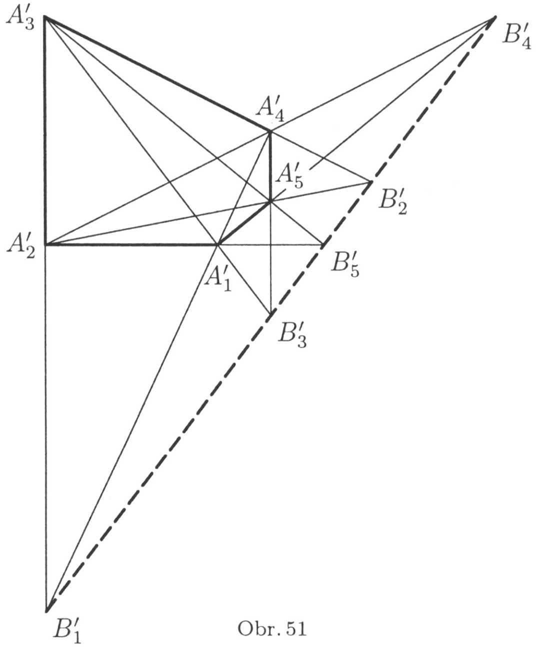
Obr. 50

souřadnic v prostoru. Pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5 = \mathsf{U}$ vložme do roviny Oyz s bodem $A_2 = O$ v počátku a s body A_1, A_3 postupně na kladných poloosách z, y. Zvolme jako střed promítání například bod $P[2, 0, -1]$. Každá přímka PA_i protne rovinu Oxy v bodě, který označíme A'_i. Dostaneme tak pětiúhelník $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5 = \mathsf{U}'$. Přímo z vlastností použitého zobrazení vyplývá, že U' splňuje podmínky zadání. Každá přímka rovnoběžná s úhlopříčkou A_2A_4 se totiž promítne do přímky jdoucí bodem $B[2,1,0]$, který je proto i průsečíkem přímek $A_1'A_5'$ a $A_2'A_4'$.

O tom se můžeme přesvědčit i výpočtem. Snadno totiž zjistíme, že v rovině Oxy mají jednotlivé body souřadnice

$$A_1' = \left[3-\sqrt{5}, 0\right], \quad A_2' = [0,0], \quad A_3' = [1,0],$$
$$A_4' = \left[1, \tfrac{1}{2}\right], \quad A_5' = \left[1, \tfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right]$$

a následně ověřit, že příslušné body B_1', B_2', B_3', B_4', B_5' leží v přímce (obr. 51).



Obr. 51

Poznámka. Úloha se dá řešit i bez konstruování pětiúhelníku, v němž odpovídající čtyři z bodů B_i leží v přímce. Za promítaný útvar U stačí vzít pravidelný pětiúhelník. Ten má totiž všechny dvojice přímek A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rovnoběžné; po vhodném promítnutí budou tedy průsečíky B_i' ležet v množině, která v daném promítání nemá vzor. Takovou množinou je však přímka.