55. ročník matematické olympiády na středních školách

47. mezinárodní matematická olympiáda

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 55. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2005/2006. 47. mezinárodní matematická olympiáda. 18. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2007. pp. 158–173.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/405119`

47. mezinárodní matematická olympiáda

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

47. mezinárodní matematická olympiáda se uskutečnila 6.–18. července 2006 ve slovinském hlavním městě Ljubljani. Slovinsko, které má zhruba 2 miliony obyvatel, se tak stalo dosud nejmenší zemí, v níž se tato významná celosvětová soutěž nejlepších středoškolských matematiků uskutečnila. Letos se soutěže zúčastnilo celkem 498 soutěžících z 90 zemí světa.

České reprezentační družstvo pro 47. MMO bylo již tradičně sestaveno na základě výsledků III. (ústředního) kola 55. ročníku české MO v kategorii A a dále na základě výsledků výběrového soustředění, které se uskutečnilo v polovině dubna v Kostelci nad Černými lesy. Dlužno zmínit, že výběr českého družstva pro letošní MMO byl podstatným způsobem ovlivněn skutečností, že se termíny MMO a MFO překrývaly. Tři z vítězů ústředního kola MO v kategorii A dali přednost atraktivnímu prostředí jihoasijského Singapuru, kde se MFO konala, a navíc absolutní vítěz III. kola překročil povolenou věkovou hranici pro účast na MMO. Na výběrové soustředění před 47. MMO byli proto kromě zbývajících šesti vítězů 55. ročníku MO v kategorii A přizváni také dva nejlepší úspěšní řešitelé III. kola.

Právo reprezentovat Českou republiku na 47. MMO ve Slovinsku si nakonec vybojovala následující šestice našich středoškoláků: *Jaroslav Hančl* z Gymnázia M. Koperníka v Bílovci, *Zbyněk Konečný*, *Jakub Opršal*, *Vojtěch Říha* a *Jan Uhlík* z Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše a *Pavel Šalom* z Gymnázia v Rožnově pod Radhoštěm. Vedoucím české delegace a zástupcem v jury MMO byl RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Přírodovědecké fakuly UP v Olomouci. Jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím českého družstva byl RNDr. *Jaroslav Zhouf*, Ph.D., z Pedagogické fakulty UK v Praze.

ÚK MO a vedení českého družstva si na tomto místě dovolují upřímně poděkovat přerovské akciové společnosti *Precheza* za nezištnou pomoc při vybavení celého reprezentačního týmu jednotným oblečením.

Oficiální zahájení soutěže se uskutečnilo 11. července v kongresovém sále hotelu Union v Ljubljani (v předvečer prvního soutěžního dne). Následující dva dny byly soutěžícím předloženy dvě trojice úloh, které z došlých návrhů vybrala mezinárodní jury na svém jednání ve slovinském přímořském letovisku *Portorož* před zahájením soutěže. Na řešení každé trojice úloh měli žáci jako obvykle 4,5 hodiny čistého času a za každou úlohu měli možnost získat maximálně 7 bodů. Po koordinaci žákovských řešení, která proběhla následující dva dny ihned po soutěži, stanovila mezinárodní jury bodové hranice pro zisk medailí: 15–18 bodů pro bronzové medaile, 19–27 bodů pro stříbrné medaile a 28–42 bodů pro zlaté medaile. Maximálního bodového zisku (42 body) dosáhli přitom pouze tři soutěžící: *Zhiyu Liu* (Čína), *Jurij Borejko* (Moldavsko) a *Alexander Magazinov* (Rusko).

Výsledky našich jsou uvedeny v následující tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
161.–188.	Zbyněk Konečný	7	1	0	7	1	0	16	III.
161.–188.	Pavel Šalom	7	1	0	7	1	0	16	III.
189.–253.	Jaroslav Hančl	7	1	0	7	0	0	15	III.
319.–334.	Vojtěch Říha	7	1	0	3	0	0	11	HM
335.–363.	Jakub Opršal	7	1	0	2	0	0	10	HM
364.–387.	Jan Uhlík	7	0	1	1	0	0	9	HM
	Celkem	42	5	1	27	2	0	77	

Pro srovnání uveďme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří si vedli nesrovnatelně lépe (zejména stojí za pozornost vynikající výsledek Ondreje Budáče):

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
16.–20.	Ondrej Budáč	7	7	1	7	7	1	30	I.
98.–108.	Samuel Hapák	6	7	0	7	1	0	21	II.
109.–116.	Jaroslav Knebl	7	5	1	7	0	0	20	II.
150.–160.	Ján Mikuláš	6	1	0	7	3	0	17	III.
189.–253.	István Estélyi	7	1	0	7	0	0	15	III.
189.–253.	Michal Takács	7	1	0	6	1	0	15	III.
	Celkem	44	22	2	41	12	1	118	

Naše družstvo dosáhlo v letošním roce jen průměrného výsledku. Tři naši soutěžící však v silné konkurenci získali bronzové medaile — *Zbyněk Konečný* a *Pavel Šalom* (oba 16 bodů) a *Jaroslav Hančl* (15 bodů).

Zbývající tři naši reprezentati přivezli domů čestná uznání za bezchybné vyřešení jedné (u všech tří našich soutěžících první) soutěžní úlohy. Umístění českého družstva v neoficiálním pořadí zemí však nelze považovat za lichotivé. Celkový zisk 77 bodů nás po loňském vynikajícím výsledku, kdy české družstvo skončilo mezi nejlepšími dvaceti zeměmi, odsunul až do středu tabulky:

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	6	0	0	214	Mongolsko	0	0	2	80
Rusko	3	3	0	174	Španělsko	0	1	2	80
Korea	4	2	0	170	Portugalsko	0	0	3	78
Německo	4	0	2	157	Ázerbájdžán	0	1	1	77
USA	2	4	0	154	*Česká republika*	0	0	3	77
Rumunsko	3	1	2	152	Albánie	0	1	1	76
Japonsko	2	3	1	146	Kolumbie	0	0	2	76
Írán	3	3	0	145	Belgie	0	0	1	75
Moldavsko	2	1	3	140	Lotyšsko	0	0	3	75
Tchaj-wan	1	5	0	136	Srí Lanka (5)	0	0	3	71
Polsko	1	2	3	133	Řecko	0	0	2	69
Itálie	2	2	0	132	Uzbekistán	0	0	2	68
Vietnam	2	2	2	131	Nový Zéland	0	0	2	66
Hongkong	1	3	2	129	Island	0	0	1	63
Kanada	0	5	1	123	Macao	0	0	2	63
Thajsko	1	3	2	123	Turkmenistán (5)	0	1	1	59
Maďarsko	0	5	1	122	JAR	0	0	0	57
Slovensko	1	2	3	118	Makedonie	0	0	1	57
Turecko	0	4	1	117	Nizozemsko	0	0	0	57
Velká Británie	0	4	1	117	Maroko	0	0	0	55
Bulharsko	0	4	1	116	Norsko	0	0	1	52
Ukrajina	1	2	2	114	Irsko	0	0	0	49
Bělorusko	0	3	2	111	Paraguay (4)	0	1	0	47
Mexiko	1	2	1	110	Dánsko	0	0	0	45
Argentina	0	2	2	109	Ekvádor	0	0	1	40
Izrael	0	3	1	109	Malajsie	0	0	1	40
Austrálie	0	3	2	108	Tádžikistán	0	0	0	35
Singapur	0	2	3	100	Trinidad a Tobago	0	0	0	34
Francie	1	0	3	99	Venezuela (4)	0	0	0	34
Brazílie	0	0	6	96	Panama (4)	0	0	0	33
Kazachstán	0	1	4	95	Pákistán (5)	0	0	0	32
Švýcarsko	1	1	0	95	Kirgizie	0	0	0	31
Gruzie	0	1	3	94	Salvádor (3)	0	0	0	27
Litva	0	1	2	94	Bangladéš (4)	0	0	0	22
Indie	0	0	5	92	Kypr	0	0	0	19
Arménie	0	1	1	90	Chorvatsko (2)	0	0	0	13
Slovinsko	0	1	3	90	Lucembursko (2)	0	0	0	12
Srbsko a Černá Hora	0	0	5	88	Uruguay (2)	0	0	0	12
Finsko	0	0	4	86	Nigérie	0	0	0	11
Kostarika	0	1	2	86	Portoriko	0	0	0	11
Peru	0	1	1	85	Bolívie (2)	0	0	0	5
Bosna a Hercegovina	0	1	2	84	Kuvajt (4)	0	0	0	5
Rakousko	0	0	3	83	Saudská Arábie (4)	0	0	0	3
Švédsko	0	0	3	82	Lichtenštejnsko (1)	0	0	0	2
Estonsko	0	0	2	80	Mozambik (3)	0	0	0	0

Pro účastníky 47. MMO připravili organizátoři hodnotný doprovodný program. V rámci jednodenního výletu navštívili soutěžící slovinská přímořská letoviska *Portorož* a *Piran*. Během zpáteční cesty do Ljubljaně si prohlédli světoznámé aragonitové jeskyně *Postojna*, které jsou veřejnosti přístupné od roku 1818, a blízký *Podjamský hrad*. Na závěr pobytu ve Slovinsku absolvovali všichni účastníci 47. MMO společný jednodenní výlet k *Bledskému jezeru* a do oblasti *Julských Alp*. Dopolední program byl spojen s prohlídkou *Bledského hradu*, který se tyčí přímo nad jezerem, a krátkou procházkou kolem tohoto jezera. Odpoledne pak strávili všichni účastníci MMO ve známém alpském středisku *Kranjska Gora* a jeho okolí. Během cesty bylo mj. možno spatřit také vrcholky dvou nejvyšších hor Julských Alp, kterými jsou *Triglav* a *Škrlatica*.

Slavnostní vyhlášení výsledků 47. MMO se konalo 17. července v Paláci kultury v Ljubljani (Cankarjev dom) za účasti Dr. *Janeze Potočnika*, evropského komisaře pro vědu a výzkum. Závěrečného ceremoniálu se zúčastnili také přední představitelé společenského života ve Slovinsku v čele s Dr. *Milanem Zverem*, ministrem školství a sportu Slovinska.

Hostitelskými zeměmi příštích olympiád budou Vietnam a Španělsko.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a P jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokažte, že $|AP| \geqq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$. (*Korea*)

2. Nechť P je pravidelný 2 006úhelník. Jeho úhlopříčka je *lichá*, jestliže její koncové body dělí hranici mnohoúhelníku P na dvě části, z nichž každá je tvořena lichým počtem jeho stran. Každá strana mnohoúhelníku P je rovněž *lichá*.

Předpokládejme, že mnohoúhelník P je rozdělen na trojúhelníky 2 003 úhlopříčkami, z nichž žádné dvě se uvnitř P neprotínají. Určete, jaký je největší možný počet rovnoramenných trojúhelníků, které mají v uvažovaném rozdělení mnohoúhelníku P dvě liché strany. (*Srbsko*)

3. Určete nejmenší reálné číslo M takové, že nerovnost

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leqq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

platí pro všechna reálná čísla a, b, c. (*Irsko*)

4. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

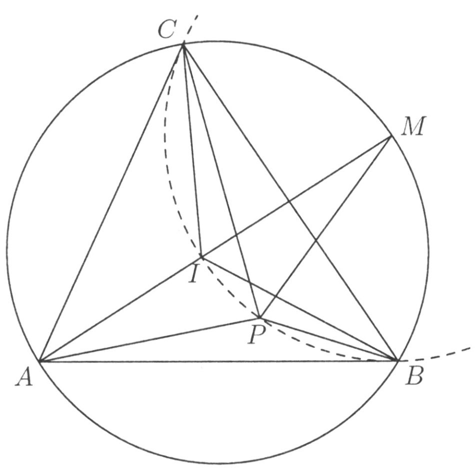
(*USA*)

5. Nechť P je mnohočlen stupně $n > 1$ s celočíselnými koficienty a k nechť je přirozené číslo. Uvažujme mnohočlen $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kde P je v zápise použito k-krát. Dokažte, že existuje nejvýše n celých čísel t, pro něž platí $Q(t) = t$. (*Rumunsko*)

6. Každé straně a konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je a. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P není menší než dvojnásobek obsahu mnohoúhelníku P. (*Srbsko*)

Řešení soutěžních úloh

1. Označme velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C uvažovaného trojúhelníku po řadě α, β, γ. Protože součet velikostí všech čtyř úhlů v dané rovnosti je $\beta + \gamma$, musí platit $|\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, takže $|\sphericalangle BPC| = 180° - \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. Jak se snadno přesvědčíme, stejnou velikost má i úhel BIC (obr. 52). Protože P a I jsou vnitřní body trojúhelníku ABC (leží v polorovině BCA), leží body B, C, I a P na téže kružnici. Středem této kružnice je střed M toho oblouku BC kruž-



Obr. 52

nice opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje vrchol A (to je známé tvrzení, které snadno ověříme dopočítáním úhlů v [rovnoramenném] trojúhelníku CIM). Přitom bodem M prochází i polopřímka AI, neboť je to osa vnitřního úhlu při vrcholu A.

Tím je nerovnost $|AP| \geqq |AI|$ v podstatě dokázána, protože bod I má ze všech bodů kružnice opsané trojúhelníku IBC od bodu A nejkratší vzdálenost. Bezprostředně to plyne z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku APM:

$$|AP| + |PM| \geqq |AM| = |AI| + |IM| = |AI| + |PM|.$$

Je tedy $|AP| \geqq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když je P bodem úsečky AM, tj. právě když $P = I$.

2. (Podle *Ondreje Budáče*, Slovensko.) Označme rovnoramenný trojúhelník jako *lichý*, pokud má (právě) dvě strany liché. (Je jasné, že takový rovnoramenný trojúhelník má lichá ramena a „sudou" základnu.)

Rozeberme nejprve speciální případ. Místo všech 2 006 vrcholů mnohoúhelníku P budeme uvažovat jen takovou část jeho hranice s n vrcholy ($n \geqq 2$), že krajní body příslušného oblouku opsané kružnice svírají se středem mnohoúhelníku P úhel nejvýše $180°$ (tj. $n \leqq 1\,004$). Těchto n vrcholů tvoří mnohoúhelník X. Označme $f(n)$ maximální možný počet lichých trojúhelníků, které mohou vzniknout popsaným rozdělením X neprotínajícími se úhlopříčkami na trojúhelníky. Snadno ověříme, že $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 1$, $f(5) = 2$, ... Dokážeme matematickou indukcí, že

$$f(n) \leqq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

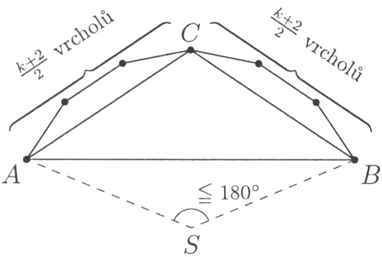
První indukční krok jsme už učinili. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $n \leqq k$, a uvažujme oblouk obsahující $n = k+1$ vrcholů. Krajní body tohoto oblouku označme A a B. Předpokládejme, že mnohoúhelník X je rozdělen úhlopříčkami na trojúhelníky s maximálním možným počtem lichých trojúhelníků. Úsečka AB je stranou nějakého trojúhelníku ABC v tomto rozdělení.

Je-li trojúhelník ABC lichý, je AB vzhledem k podmínce $n \leqq 1\,004$ nutně jeho základna a BC, CA jeho lichá ramena, takže oblouk AB se skládá ze dvou stejných oblouků lichých délek (obr. 53). Proto $k \equiv 2$

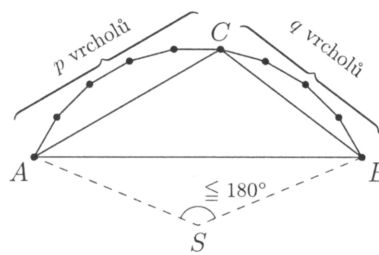
(mod 4). Z indukčního předpokladu tak dostáváme

$$f(k+1) \leqq 1 + 2f\Big(\frac{k+2}{2}\Big) \leqq 1 + 2\Big\lfloor\frac{\frac{1}{2}(k+2)-1}{2}\Big\rfloor = \\ = 1 + 2\Big\lfloor\frac{k}{4}\Big\rfloor = 1 + 2\cdot\frac{k-2}{4} = \frac{k}{2} = \Big\lfloor\frac{(k+1)-1}{2}\Big\rfloor,$$

tvrzení tedy platí i pro $n = k+1$.



Obr. 53



Obr. 54

Pokud trojúhelník ABC není lichý, máme oblouky AC, CB s počty vrcholů p, q, přičemž $p+q = k+2$, $p, q \geqq 2$ (obr. 54). Je tudíž

$$f(k+1) \leqq f(p) + f(q) = f(p) + f(k+2-p) \leqq \\ \leqq \Big\lfloor\frac{p-1}{2}\Big\rfloor + \Big\lfloor\frac{k+2-p-1}{2}\Big\rfloor \leqq \\ \leqq \Big\lfloor\frac{p-1}{2} + \frac{k+2-p-1}{2}\Big\rfloor = \Big\lfloor\frac{(k+1)-1}{2}\Big\rfloor$$

(využili jsme známou nerovnost

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqq \lfloor x+y\rfloor, \tag{1}$$

která platí pro libovolná kladná čísla x, y). I v tomto případě jsme tedy tvrzení pro $n = k+1$ dokázali. Tím je důkaz indukcí ukončen.

Vraťme se teď k původní úloze. V rozdělení mnohoúhelníku P na trojúhelníky určitě existuje trojúhelník ABC, který obsahuje (uvnitř či na hranici) jeho střed S. Oblouky AB, BC, CA obsahují p, q, r vrcholů, přičemž $p, q, r \leqq 1\,004$ a $p+q+r = 2\,006+3 = 2\,009$. V případě, že ABC není lichý, existuje v rozdělení nejvýše

$$f(p) + f(q) + f(r) \leqq \Big\lfloor\frac{p-1}{2}\Big\rfloor + \Big\lfloor\frac{q-1}{2}\Big\rfloor + \Big\lfloor\frac{r-1}{2}\Big\rfloor \leqq \\ \leqq \Big\lfloor\frac{p-1+q-1+r-1}{2}\Big\rfloor = 1\,003$$

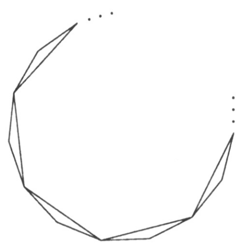
lichých trojúhelníků (opět využíváme nerovnost (1)).

Je-li naopak ABC lichý, jsou právě dvě z čísel p, q, r sudá, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou to p a q. Potom je v rozdělení nejvýše

$$1 + f(p) + f(q) + f(r) \leqq 1 + \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor =$$
$$\leqq 1 + \frac{p-2+q-2+r-1}{2} = 1\,003$$

lichých trojúhelníků.

Ukázali jsme tedy, že maximální možný počet lichých trojúhelníků je 1 003. Tato hodnota sa dá dosáhnout, jak ukazuje obr. 55 (po obvodě pravidelného 2 006úhelníku „odřežeme“ 1 003 rovnoramenných trojúhelníčků s rameny tvořenými sousedními stranami mnohoúhelníku a zbytek rozdělíme libovolně).



Obr. 55

Jiné řešení. Podobně jako v předchozím řešení rovnoramenný trojúhelník s dvěma lichými stranami v rozdělení mnohoúhelníku P jeho úhlopříčkami nazveme *lichý.*

Nechť ABC je lichý trojúhelník s lichými stranami AB a BC. To znamená, že se jak mezi vrcholy A a B, tak i mezi vrcholy B a C nachází lichý počet stran mnohoúhelníku P. Řekneme, že tyto strany *patří* lichému trojúhelníku ABC.

Aspoň jedna strana v každé z těchto dvou skupin nepatří žádnému jinému lichému trojúhelníku, jehož vrcholy leží mezi vrcholy A a B, resp. B a C. Každý takový lichý trojúhelník má totiž dvě shodné strany, takže dohromady existuje sudý počet stran, které mu patří. Vyloučíme-li všechny strany patřící lichým trojúhelníkům v této části, musí zůstat aspoň jedna strana, která nepatří žádnému z nich. Přiřaďme tyto dvě strany (jednu v každé z obou skupin) trojúhelníku ABC.

Každému lichému trojúhelníku jsme takto přiřadili dvojici stran, přičemž žádné dva trojúhelníky nemají přiřazenu stejnou stranu. Protože takových dvojic můžeme vytvořit nejvýše 1 003, je to zároveň maximální možný počet lichých trojúhelníků. Tento počet můžeme dosáhnout, jak jsme už ukázali v prvním řešeni.

3. Uvažujme kubický mnohočlen

$$P(t) = tb(t^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ct(c^2 - t^2).$$

Snadno nahlédneme, že $P(b) = P(c) = P(-b - c) = 0$, proto platí

$$P(t) = (b - c)(t - b)(t - c)(t + b + c),$$

neboť koeficient při t^3 je $b - c$. Levou stranu dokazované nerovnosti lze tedy upravit na tvar

$$\begin{aligned}|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| = |P(a)| &= \\ = |(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)|&.\end{aligned}$$

Daná úloha je tak převedena na problém nalézt nejmenší reálné číslo M, pro něž platí nerovnost

$$|(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)| \leqq M(a^2 + b^2 + c^2)^2. \tag{1}$$

Obě strany vztahu (1) jsou symetrické výrazy v proměnných a, b, c. Bez újmy na obecnosti lze proto předpokládat, že $a \leqq b \leqq c$. Na základě tohoto předpokladu a užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostáváme

$$|(a - b)(b - c)| = (b - a)(c - b) \leqq \left(\frac{(b - a) + (c - b)}{2}\right)^2 = \frac{(c - a)^2}{4}, \tag{2}$$

kde rovnost nastane, právě když $b - a = c - b$, tj. když $2b = a + c$. Dále platí

$$\frac{(c - a)^2}{4} = \left(\frac{(b - a) + (c - b)}{2}\right)^2 \leqq \frac{(b - a)^2 + (c - b)^2}{2}.$$

Odtud snadnou úpravou dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$3(c - a)^2 \leqq 2[(b - a)^2 + (c - b)^2 + (c - a)^2], \tag{3}$$

v níž také nastane rovnost, kdykoliv $2b = a + c$. Ze vztahů (2) a (3) pak plyne

$$\begin{aligned}
&|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leqq \\
&\leqq \frac{1}{4}\left|(c-a)^2(a-c)(a+b+c)\right| = \frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \leqq \\
&\leqq \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]}{3}\right)^3 \cdot (a+b+c)^2} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3 \cdot (a+b+c)^2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem konečně dostaneme nerovnost požadovaného tvaru:

$$\begin{aligned}
&|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leqq \\
&\leqq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right)^2 = \\
&= \frac{9\sqrt{2}}{32}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Nerovnost (1) tedy platí pro $M = \frac{9}{32}\sqrt{2}$, přičemž rovnost nastane, právě když $2b = a + c$ a současně

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2.$$

Dosazením $b = \frac{1}{2}(a + c)$ do poslední rovnosti dostaneme

$$2(c-a)^2 = 9(a+c)^2.$$

Rovnost ve (4) tudíž nastane, právě když současně platí

$$2b = a + c \qquad \text{a} \qquad (c-a)^2 = 18b^2.$$

Volbou $b = 1$ dostaneme $a = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ a $c = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Je tedy $M = \frac{9}{32}\sqrt{2}$ skutečně nejmenší reálné číslo, pro něž je daná nerovnost splněna. Rovnost pak nastává pro trojice $(a, b, c) = \left(t, t - \frac{3}{2}t\sqrt{2}, t + \frac{3}{2}t\sqrt{2}\right)$ a jejich permutace, přičemž t je libovolné reálné číslo.

4. Pokud (x, y) je dvojice celých čísel, která vyhovuje dané rovnici, je jejím řešením také dvojice $(x, -y)$. Stačí se tedy omezit na $y \geqq 0$. Protože levá strana je větší než 1, stačí uvažovat jen $y \geqq 2$. Dále pro celočíselné hodnoty x rozlišíme tři případy.

Je-li x záporné celé číslo, platí

$$1 < 1 + 2^x + 2^{2x+1} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

avšak pro žádné přirozené číslo y neplatí $1 < y^2 < 2$. Neexistuje tedy žádné řešení dané rovnice, pro něž je x záporné celé číslo.

Je-li $x = 0$, má daná rovnice právě dvě řešení v oboru celých čísel. Jsou jimi dvojice $(0, 2)$ a $(0, -2)$.

Je-li x přirozené číslo, upravíme danou rovnici na tvar

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y - 1)(y + 1). \tag{1}$$

Odtud plyne, že y je liché číslo. Zřejmě právě jedno z dvou po sobě jdoucích sudých čísel $y - 1$, $y + 1$ je dělitelné čtyřmi. Součin obou čísel na pravé straně (1) je tedy dělitelný aspoň osmi, a proto je $x \geqq 3$. Z rovnosti (1) plyne, že buď číslo $y - 1$ je dělitelné 2^{x-1}, avšak není dělitelné 2^x, nebo číslo $y + 1$ je dělitelné 2^{x-1}, ale není už dělitelné 2^x. Platí tedy $y = 2^{x-1}m + \varepsilon$, kde m je nezáporné liché číslo a $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Dosazením za y do (1) dostaneme

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (2^{x-1}m + \varepsilon)^2 - 1 = 2^{2x-2}m^2 + 2^x m\varepsilon.$$

Odtud plyne

$$1 + 2^{x+1} = 2^{x-2}m^2 + m\varepsilon,$$

neboli

$$1 - m\varepsilon = 2^{x-2}(m^2 - 8). \tag{2}$$

Pro $\varepsilon = 1$ musí být $m^2 - 8 \leqq 0$. Tuto nerovnost splňuje jediné nezáporné liché číslo $m = 1$, po dosazení do (2) však vyjde $0 = -7 \cdot 2^{x-2}$ a tomu nevyhovuje žádné x.

Pro $\varepsilon = -1$ máme $1 + m = 2^{x-2}(m^2 - 8) \geqq 2(m^2 - 8)$ (neboť $x \geqq 3$). Odtud po snadné úpravě dostaneme kvadratickou nerovnici

$$2m^2 - m - 17 \leqq 0.$$

Této nerovnici vyhovují právě dvě nezáporná lichá čísla, a to $m = 1$ a $m = 3$. Pro první z nich však v (2) dostaneme různá znaménka. Pro $m = 3$ vyjdou $x = 4$ a $y = 23$, která jsou řešením dané rovnice.

Daná rovnice má tedy celkem 4 řešení. Jsou jimi následující dvojice celých čísel: $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(4, 23)$ a $(4, -23)$.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení vyloučíme možnost, že by x bylo záporné, a najdeme dvě řešení $(0, 2)$, $(0, -2)$ pro $x \leqq 2$. Protože levá strana uvažované rovnice je pro $x \geqq 3$ lichá, položme $y = 2k + 1$, kde k je přirozené. Po jednoduché úpravě dostáváme

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = 4k(k + 1).$$

To znamená, že $k/2^{x-2}$ nebo $(k + 1)/2^{x-2}$ musí být celé kladné číslo.

Jestliže je tedy $k = 2^{x-2}a$ pro vhodné přirozené a, dostaneme po dosazení do původní rovnice a po úpravě rovnici $a - 1 + 2^{x-2}(a^2 - 8) = 0$. Ta zřejmě nemá řešení pro žádné přirozené a.

Podobně pro $k = 2^{x-2}a - 1$ vyjde rovnice $a + 1 = 2^{x-2}(a^2 - 8)$, která může mít řešení jedině pro $a \leqq 3$ (pro $a \geqq 4$ je $a^2 - 8 \geqq 4a - 8 > a + 1$). Možnosti $a = 1$ a $a = 2$ snadno vyloučíme a pro $a = 3$ najdeme řešení $x = 4$. Dostáváme tak další dvě řešení původní rovnice: $(4, 23)$ a $(4, -23)$.

Jiné řešení. Jak snadno zjistíme, pro $x \leqq 2$ má daná rovnice jediná dvě řešení $(0, 2)$, $(0, -2)$. Předpokládejme tedy, že $x \geqq 3$.

Z dané rovnice zřejmě plyne

$$2^{2x+1} = \left(\sqrt{2} \cdot 2^x\right)^2 < y^2 < \left(1 + \sqrt{2} \cdot 2^x\right)^2,$$

takže $y = \left\lfloor \sqrt{2} \cdot 2^x \right\rfloor + 1$. Protože největší společný dělitel čísel $y - 1$, $y + 1$ je 2, vidíme z již dříve odvozeného vztahu (1), že právě jedno z čísel $y - 1$, $y + 1$ je dělitelné mocninou 2^{x-1}. To znamená, že v dvojkové soustavě má číslo $y - 1$ zápis končící $x - 1$ nulami nebo $x - 2$ jednotkami a nulou (je $y - 1 = y + 1 - (10)_2$). Protože $\sqrt{2}$ má v dvojkové soustavě rozvoj $1{,}01101\ldots$ a násobení mocninou 2^x jen posouvá „dvojkovou“ čárku o x míst doprava, vidíme, že celá část čísla $\sqrt{2} \cdot 2^x$ může mít požadovaný zápis jen pro $x \leqq 4$.

5. Pro libovolná celá čísla a, b a libovolný mnohočlen P s celočíselnými koeficienty platí $a - b \mid P(a) - P(b)$. Jsou-li u, v celá čísla, pro něž platí $Q(u) = u$ a $Q(v) = v$ (tzv. *pevné body* mnohočlenu Q), a použijeme-li pro ně výše uvedený vztah k-krát, dostaneme

$$u - v \mid P(u) - P(v) \mid P(P(u)) - P(P(v)) \mid \ldots \mid Q(u) - Q(v) = u - v.$$

Pro libovolné dva celočíselné pevné body u, v mnohočlenu Q proto platí

$$|u - v| = |P(u) - P(v)|. \tag{1}$$

Jsou-li t, u, v tři navzájem různé celočíselné pevné body mnohočlenu Q, přičemž $t > u > v$, platí právě jedna z postupných nerovností

$$P(t) > P(u) > P(v) \quad \text{nebo} \quad P(t) < P(u) < P(v). \tag{2}$$

Každé jiné uspořádání hodnot $P(t)$, $P(u)$ a $P(v)$ vede totiž s ohledem na (1) ke sporu.

Připusťme, že mnohočlen Q má $n + 1$ celočíselných pevných bodů $t_0, t_1, \ldots, t_n$, pro něž platí $t_0 > t_1 > \ldots > t_n$. Podle (2) je pak nutně buď

$$P(t_0) > P(t_1) > \ldots > P(t_n), \quad \text{nebo} \quad P(t_0) < P(t_1) < \ldots < P(t_n).$$

Podle (1) platí pro $i = 1, 2, \ldots, n$ rovnost $|t_0 - t_i| = |P(t_0) - P(t_i)|$, což v prvním případě vede k rovnosti $t_0 - t_i = P(t_0) - P(t_i)$. Uvažme nyní mnohočlen

$$R(x) = P(x) - P(t_0) + t_0 - x,$$

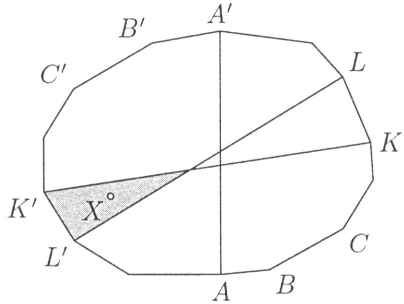
který je stejně jako P stupně n, přitom však má $n + 1$ reálných kořenů $t_0, t_1, \ldots, t_n$. To je spor. Zcela analogickým způsobem dojdeme ke sporu i v druhém případě.

Mnohočlen Q má tedy nejvýše n celočíselných pevných bodů. Tím je důkaz hotov.

6. Nejdřív dokážeme, že v libovolném konvexním $2n$-úhelníku s obsahem S existuje strana AB a vrchol V tak, že obsah trojúhelníku ABV je aspoň S/n.

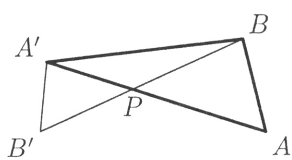
Úhlopříčky, jež rozdělují $2n$-úhelník na dvě části se stejným počtem stran, budeme nazývat *hlavní.* Pro libovolnou stranu $a = AB$ uvažovaného $2n$-úhelníku označme A', B' příslušné „protější" vrcholy obou hlavních úhlopříček AA', BB' a P jejich průsečík. Sjednocení všech $2n$ takových trojúhelníků ABP, $A'B'P$, jež dostaneme pro jednotlivé strany, pokrývá celý $2n$-úhelník.

Je-li totiž X libovolný vnitřní bod $2n$-úhelníku, který neleží na žádné hlavní úhlopříčce (body ležící na hranici a na hlavních úhlopříčkách popsaným sjednocením zřejmě pokryté jsou), uvažujme posloupnost (orientovaných) hlavních úhlopříček $AA', BB', CC', \ldots$, přičemž $B, C, \ldots$ jsou po sobě jdoucí vrcholy ležící v opačné polorovině určené přímkou AA' než bod X. Bez újmy na obecnosti nechť bod X leží „nalevo" od AA'. Pak se v této posloupnosti na místě s pořadovým číslem $n + 1$ nachází úhlopříčka $A'A$, která má bod X „napravo". Proto v posloupnosti $A, B, C, \ldots, A'$ existují po sobě jdoucí vrcholy K a L takové, že X leží „nalevo" od KK', ale „napravo" od LL'. To však znamená, že X leží v trojúhelníku příslušném straně $K'L'$ (obr. 56). Trojúhelníky příslušné jednotlivým stranám tedy skutečně pokrývají celý $2n$-úhelník. Součet jejich obsahů je proto aspoň S.



Obr. 56

Z předešlého vyplývá, že existují dvě protilehlé strany $a = AB$, $a' = A'B'$ (přičemž AA', BB' jsou hlavní úhlopříčky protínající se v bodě P) takové, že součet obsahů jim příslušných trojúhelníků $S(ABP) + S(A'B'P)$ je aspoň S/n. Bez újmy na obecnosti nechť $|PB| \geqq |PB'|$. Potom (obr. 57)



Obr. 57

$$\begin{aligned} S(ABA') &= S(ABP) + S(PBA') \geqq \\ &\geqq S(ABP) + S(PB'A') = S(ABP) + S(A'B'P) \geqq S/n. \end{aligned}$$

Tím je úvodní tvrzení dokázáno.

Uvažujme nyní libovolný konvexní mnohoúhelník P s obsahem S, který má m stran $a_1, \ldots, a_m$, a pro každé i $(1 \leqq i \leqq m)$ označme S_i obsah největšího trojúhelníku, který má stranu a_i a je celý obsažen v P. Předpokládejme naopak, že tvrzení ze zadání neplatí, tj. že

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i}{S} < 2.$$

Potom existují racionální čísla $q_1, \ldots, q_m$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = 2 \qquad \text{a} \qquad q_i > \frac{S_i}{S} \quad \text{pro každé } i;$$

stačí například pro $i < m$ vzít za q_i libovolné racionální číslo z intervalu

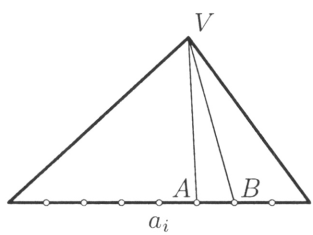
$$\frac{S_i}{S} < q_i < \frac{S_i}{S} + \frac{1}{m-1}\Bigl(2 - \sum \frac{S_i}{S}\Bigr)$$

a položit $q_m = 2 - (q_1 + \ldots + q_{m-1})$.

Zapišme zlomky $q_1, \ldots, q_m$ ve tvaru $q_i = k_i/n$, kde n je jejich společný jmenovatel. Máme tedy $\sum k_i = 2n$. Rozdělme každou stranu a_i mnohoúhelníku P na k_i shodných úseků, vytvoříme tak konvexní $2n$-úhelník s obsahem S (některé jeho vnitřní úhly mohou mít velikost $180°$). Podle tvrzení, které jsme dokázali na začátku, existuje v tomto novém mnohoúhelníku strana AB a vrchol V, pro něž $S(ABV) \geqq S/n$. Je-li AB částí strany a_i mnohoúhelníku P (obr. 58), pak pro obsah trojúhelníku T se stranou a_i a vrcholem V dostáváme

$$S(\mathsf{T}) = k_i \cdot S(ABV) \geqq k_i \cdot S/n = q_i \cdot S > S_i,$$

což odporuje volbě hodnot S_i. Tím je úloha vyřešena.



Obr. 58

Jiné řešení. Ke každému vrcholu A daného mnohoúhelníku existuje na jeho hranici bod A' tak, že úsečka AA' rozděluje mnohoúhelník na dva mnohoúhelníky stejného obsahu. Přidáme-li všechny tyto body k vrcholům mnohoúhelníku P, dostaneme mnohoúhelník P' se stejným obsahem, jehož některé vnitřní úhly mohou být $180°$. Na tvrzení úlohy to nemá vliv (stačí si uvědomit, že pokud je ABV nějaký trojúhelník s maximálním obsahem příslušný straně AB původního mnohoúhelníku P, pak i každý trojúhelník s danými dvěma vrcholy na straně AB bude mít maximální obsah, když jeho třetím vrcholem bude právě vrchol V).

Jsou-li nyní A, B dva sousední vrcholy mnohoúhelníku P' a A', B' příslušné „protější" vrcholy, pro něž úsečky AA' a BB' rozdělují mnohoúhelník P na dva mnohoúhelníky stejného obsahu, a P jejich průsečík, mají trojúhelníky ABP a $A'B'P$ stejný obsah. Platí tedy

$$|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|.$$

To ovšem znamená, že je $|PA| \leqq |PA'|$ nebo $|PB| \leqq |PB'|$. V prvním případě $S(ABA') = S(APB) + S(PA'B) \geqq 2S(ABP)$, v druhém $S(ABB') = S(APB) + S(APB') \geqq 2S(ABP)$. V každém případě je tedy maximální obsah trojúhelníku příslušného straně AB roven nejméně dvojnásobku obsahu trojúhelníku ABP. Stejně jako v prvním řešení není těžké ukázat, že všechny takové trojúhelníky ABP pokrývají celý mnohoúhelník $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka. Součet přiřazených obsahů může být *právě* dvojnásobkem obsahu mnohoúhelníku P. Platí to pro všechny středově souměrné mnohoúhelníky. (V takovém případě má střed S mnohoúhelníku tu vlastnost, že maximální obsah přiřazený podle zadání úlohy každé straně AB mnohoúhelníku je vždy dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABS.)