59. ročník matematické olympiády na středních školách

4. středoevropská matematická olympiáda

4. středoevropská matematická olympiáda

Čtvrtá středoevropská matematická olympiáda (Middle European Mathematical Olympiad, zkráceně MEMO) se uskutečnila od 9. do 15. září 2010 v obci Strečno na Slovensku za účasti šedesáti studentů z deseti zemí středoevropského regionu, jmenovitě z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska. Soutěž je určena studentům středních škol, kteří se v daném kalendářním roce neúčastnili mezinárodní matematické olympiády (MMO) a díky svému věku ještě stále mají šanci zúčastnit se MMO v roce příštím. Výjimku tvoří slovinští účastníci, kteří vzhledem k relativně malému počtu obyvatel své země nejsou předchozí účastí na MMO vázáni.

České družstvo tvořili *Michael Bílý* z Gymnázia Klatovy, *Martin Bucháček* z Gymnázia Luďka Pika v Plzni, *Filip Hlásek* z Gymnázia Plzeň na Mikulášském náměstí, *Martin Töpfer* z Gymnázia Nad Štolou v Praze, *Radek Marciňa* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Jakub Solovský* z Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci a *Lukáš Zavřel* z Gymnázia Praha 9 na Chodovické. Vedoucím družstva byl dr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Všechny týmy byly ubytovány ve školicím středisku Slovenských železnic, kde se odehrávala i část vlastní soutěže. Olympiáda probíhala podle již zavedeného modelu. První den po příjezdu vybírala jury složená z vedoucích národních delegací příklady pro soutěž, zatímco soutěžící navštívili hrad Strečno. Druhý den byla na pořadu soutěž jednotlivců, která proběhla v přednáškové místnosti zmíněného střediska, kde měli studenti pět hodin času na řešení čtyř úloh. Týmová soutěž pak proběhla další den, tedy v neděli v prostorách Žilinské univerzity. V týmové soutěži má každé národní družstvo k dispozici jednu místnost, kde společně řeší po dobu pěti hodin osm úloh. Již v sobotu večer započala koordinace oprav úloh (úlohy jsou opraveny jednak vedoucími národních týmů a nezávisle i týmem opravovatelů zajištěným organizátory; při koordinaci se výsledky oprav porovnají a případné neshody se vyřeší) a pokračovala i během neděle. V pondělí dopoledne se jury domluvila na rozdělení medailí, které se řídí podobnými pravidly jako na mezinárodní matematické olympiádě. Odpoledne pak následovala společná plavba s řešiteli na pltích po řece Váhu. V úterý byl program olympiády završen výletem do krásné přírody Malé Fatry a slavnostním zakončením, kterého se zúčastnila mimo jiné významné hosty i rektorka Žilinské univerzity Tatiana Čorejová.

Výsledky českého družstva byly následující: Jakub Solovský a Filip Hlásek získali bronzové medaile (Jakubovi chyběl pouze jeden bod ke stříbrné medaili), Martin Bucháček, Martin Töpfer a Lukáš Zavřel pak získali čestná uznání za jeden bezchybně vyřešený příklad. V týmové soutěži snad lze za úspěch považovat to, že jsme porazili slovenské družstvo.

		Body za úlohu				**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4		
52.–54.	Michael Bílý	2	1	0	3	6	
40.–49.	Martin Bucháček	0	0	0	8	8	H.M.
29.–30.	Filip Hlásek	4	0	0	8	12	bronz
16.–22.	Jakub Solovský	0	0	8	8	16	bronz
40.–49.	Martin Töpfer	0	0	0	8	8	H.M.
40.–49.	Lukáš Zavřel	0	0	0	8	8	H.M.
	Celkem	6	1	8	43	58	

Detailní výsledky českých studentů včetně bodových zisků za jednotlivé úlohy lze vyčíst z předchozí tabulky, přehled výsledků všech zemí v soutěži jednotlivců je v druhé tabulce. Země jsou v ní seřazeny podle součtu bodů celého družstva podobně jako při neoficiálním pořadí zemí na MMO (číslo v závorce označuje menší počet účastníků).

	I	II	III	HM	body
Maďarsko	2	3	1	–	112
Německo	–	3	3	–	90
Polsko	–	2	3	–	83
Chorvatsko	–	–	4	–	77
Slovensko	–	–	3	2	70

	I	II	III	HM	body
Slovinsko	1	1	1	1	70
Litva	–	1	1	2	63
Rakousko	–	1	1	3	59
Česká republika	–	–	2	3	58
Švýcarsko (5)	–	–	–	1	19

Nejlépe se tak dařilo družstvům Maďarska, Polska a Německa — Maďarsko vyhrálo jak soutěž družstev, tak soutěž jednotlivců, v níž získalo dvě zlaté medaile. Družstva Polska a Německa zůstala tentokrát bez zlatých medailí. Celkové výsledky soutěže družstev jsou uvedeny v následující tabulce.

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	7	8	Body
1.	Maďarsko	8	0	8	4	8	8	8	8	52
2.	Polsko	1	2	8	8	8	0	8	8	43
3.	Německo	7	2	1	3	8	8	8	3	40
4.	Rakousko	2	8	1	3	8	6	8	1	37
5.	Chorvatsko	6	0	8	3	8	0	8	2	35
6.	Litva	1	2	0	3	8	8	8	0	36
7.	Slovinsko	6	0	7	2	8	0	3	1	27
8.	*Česká republika*	1	2	3	3	8	0	8	1	26
9.	Slovensko	2	0	3	4	8	0	5	0	22
10.	Švýcarsko	0	0	1	2	0	1	0	0	4

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Soutěž jednotlivců

1. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

(*Česká republika*)

2. Na tabuli jsou napsáni všichni kladní dělitelé kladného celého čísla N. Dva hráči A a B hrají hru, při které se střídají v tazích. V prvním tahu hráč A smaže číslo N. Bylo-li naposled smazáno číslo d, v následujícím tahu je nutno smazat buď dělitele, nebo násobek čísla d. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Určete všechna čísla N, pro která hráč A může vyhrát nezávisle na tazích hráče B. (*Polsko*)

3. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a bod E na jeho úhlopříčce AC takový, že $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Nechť M je středem kružnice k opsané trojúhelníku BDE. Kružnice k protíná přímku AC v bodech E a F. Dokažte, že přímky FM, AD a BC procházejí týmž bodem.

(*Švýcarsko*)

4. Nalezněte všechna kladná celá čísla n, která vyhovují následujícím dvěma podmínkám:

(i) číslo n má alespoň čtyři různé kladné dělitele,
(ii) pro libovolné dva dělitele a, b čísla n takové, že $1 < a < b < n$, dělí jejich rozdíl $b - a$ číslo n. (*Slovinsko*)

Soutěž družstev

5. Jsou dány tři rostoucí posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

kladných celých čísel. Každé kladné celé číslo je členem právě jedné z těchto tří posloupností. Dále pro každé kladné celé číslo n platí:
(i) $c_{a_n} = b_n + 1$,
(ii) $a_{n+1} > b_n$,
(iii) číslo $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je dělitelné dvěma.
Určete čísla a_{2010}, b_{2010} a c_{2010}. (*Litva*)

6. Pro každé celé číslo $n \geqq 2$ určete největší reálnou konstantu C_n takovou, že pro všechna kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geqq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 + C_n(a_1 - a_n)^2.$$

(*Švýcarsko*)

7. V každém vrcholu pravidelného n-úhelníku stojí pevnost. Ve stejný okamžik každá pevnost vystřelí na jednu ze dvou nejbližších pevností a zasáhne ji. *Výsledkem střelby* rozumíme množinu zasažených pevností, přičemž nerozlišujeme, zda pevnost byla zasažena jednou nebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všech možných výsledků střelby. Ukažte, že pro všechna celá čísla $k \geqq 3$ jsou čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesoudělná. (*Česká republika*)

8. Nechť n je kladné celé číslo. Čtverec $ABCD$ je rozdělen na n^2 jednotkových čtverců. Každý z nich je dále rozdělen úhlopříčkou rovnoběžnou s BD na dva trojúhelníky. Některé z vrcholů jednotkových čtverců jsou obarveny červeně tak, že každý z $2n^2$ získaných trojúhelníků má alespoň jeden vrchol červený. Určete nejmenší možný počet červených vrcholů takového obarvení. (*Slovinsko*)

9. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Nechť bod K je souměrně sdružený s bodem D podle středu vepsané kružnice a přímky DE, FK se protínají v bodě S. Dokažte, že přímky AS a BC jsou rovnoběžné. (*Polsko*)

10. Jsou dány body A, B, C, D, E tak, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a čtyřúhelník $ABDE$ je rovnoběžník. Označme S průsečík úhlopříček AC, BD a F průsečík polopřímek AB, DC. Dokažte, že $|\sphericalangle AFS| = |\sphericalangle ECD|$.

(*Chorvatsko*)

11. Nechť n je nezáporné celé číslo. Označme a_n číslo s desítkovým zápisem

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Ukažte, že $\frac{1}{3}a_n$ lze vyjádřit jako součet dvou třetích mocnin kladných celých čísel, ne však jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

(*Švýcarsko*)

12. Je dáno kladné celé číslo n, které není mocninou čísla 2. Dokažte, že existuje kladné celé číslo m s následujícími dvěma vlastnostmi:
(i) číslo m je součinem dvou po sobě jdoucích kladných celých čísel,
(ii) desítkový zápis čísla m je tvořen dvěma shodnými bloky n číslic.

(*Polsko*)

Řešení úloh

1. Dosazením $y = 0$ získáme

$$0 = f(0)(f(x) - x - 2).$$

Snadno lze ověřit, že funkce $f(x) = x + 2$ *není* řešením, proto $f(0) = 0$. Zvolme nyní v zadané rovnici $x = 1$, $y = -1$. Dostaneme

$$0 = f(-1)(f(1) - 3),$$

tedy $f(-1) = 0$ nebo $f(1) = 3$.

Jestliže $f(-1) = 0$, po dosazení $x = 2$, $y = -1$ vyjde $f(-2) = f(1)$. Následně volbou $x = -2$, $y = 1$ dostaneme $f(-2)f(1) = 3f(-2) - f(1)$, odkud vzhledem k rovnosti $f(-2) = f(1)$ plyne $f(1) \in \{0, 2\}$.

Celkem je tedy $f(1) = a \in \{0, 2, 3\}$. Položíme-li v zadané rovnici $y = 1$, dostaneme pro všechna reálná x

$$f(x+1) = (3-a)f(x) + a(x+1). \tag{1}$$

Volbou $y = 1 + 1/x$, kde $x \neq 0$ je libovolné, pak máme

$$f\Big(x + \frac{1}{x} + 1\Big) + f(x)f\Big(\frac{1}{x} + 1\Big) =$$
$$= f(x+1) + \Big(\frac{1}{x} + 2\Big)f(x) + f\Big(\frac{1}{x} + 1\Big)(x+1).$$

S využitím (1) proto platí

$$(3-a)\Big(f\Big(x+\frac{1}{x}\Big)+f(x)f\Big(\frac{1}{x}\Big)-(x+1)f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)=$$
$$=f(x)\Big(5-2a-(a-1)\frac{1}{x}\Big)+2a+ax.$$

Odtud s využitím vyjádření, které dostaneme ze zadané rovnice po dosazení $y=1/x$, po úpravě dostaneme

$$(3-a)\Big(a+f(x)\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big)=f(x)\Big(5-2a-(a-1)\cdot\frac{1}{x}\Big)+2a+ax,$$
$$f(x)\Big(-2+a+\frac{2}{x}\Big)=a^2+ax-a.$$

Postupným dosazováním $a\in\{0,2,3\}$ už snadno odvodíme jednotlivá řešení $f(x)=0$, $f(x)=x^2+x$, $f(x)=3x$.[1] (Zkoušky dosazením do původní rovnice jsou triviální.)

2. Nechť $N=p_1^{a_1}\dots p_k^{a_k}$ je prvočíselný rozklad čísla N. V každém tahu hráč smaže nějakého dělitele čísla N, jehož lze reprezentovat k-ticí $(b_1,\dots,b_k)$, přičemž $b_i\leqq a_i$ (taková k-tice odpovídá číslu $p_1^{b_1}\dots p_k^{b_k}$). Podle pravidel hry po k-tici $(b_1,\dots,b_k)$ může následovat $(c_1,\dots,c_k)$, právě když je buď $c_i\leqq b_i$ pro všechna i, anebo $a_i\geqq c_i\geqq b_i$ pro všechna i (samozřejmě jen v případě, že taková k-tice je ještě na tabuli).

Je-li aspoň jedno z čísel a_i liché — bez újmy na obecnosti nechť je to a_1 —, má vítěznou strategii hráč B. Tehdy totiž stačí, když na každý tah $(b_1,\dots,b_k)$ hráče A odpoví hráč B tahem

$$(a_1-b_1,b_2,\dots,b_k).$$

Ukažme, že je to skutečně jeho vítězná strategie: Všechny k-tice odpovídající číslům, která jsou zpočátku na tabuli, lze totiž roztřídit do dvojic uvedeného typu, a pokud A smaže k-tici z nějaké dvojice, B smaže druhou k-tici z téže dvojice ($a_1-b_1\neq b_1$, protože a_1 je liché).

Jestliže jsou všechna a_i sudá, má naopak vítěznou strategii hráč A. Pokud B setře k-tici $(b_1,\dots,b_k)$, přičemž aspoň jedno z čísel b_i je menší než a_i ($(b_1,\dots,b_k)\neq(a_1,\dots,a_k)$, neboť to byl první tah hráče A),

---

[1] Stejný předpis platí vždy i pro hodnotu x z rovnosti $-2+a+2/x=0$, jak lze ověřit podle rovnosti (1), když v ní zaměníme $x+1$ za x a pro novou hodnotu $x-1$ využijeme již odvozený předpis.

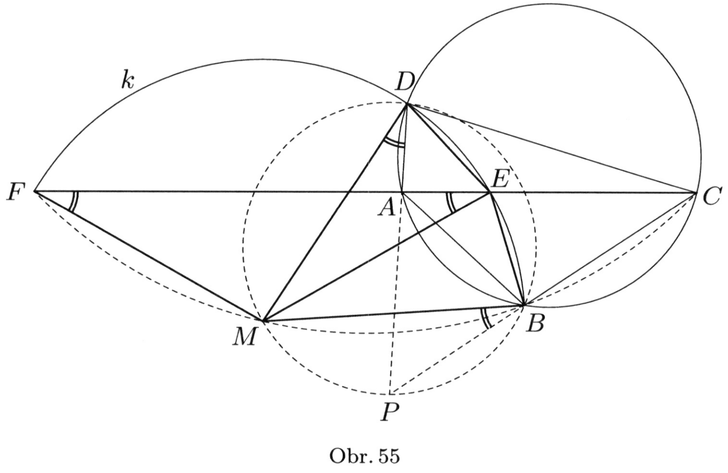
označme j nejmenší index takový, že $b_j < a_j$. Potom strategickou odpovědí hráče A bude k-tice

$$(b_1, \ldots, b_{j-1}, a_j - b_j - 1, b_{j+1}, \ldots, b_k).$$

I v tomto případě lze všechny původní k-tice (kromě prvního tahu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$) roztřídit do dvojic výše popsaného typu, a pokud B smaže nějakou k-tici, A smaže druhou z téže dvojice ($a_j - b_j - 1 \neq b_j$, protože a_j je sudé).

Podmínka, že všechna a_i jsou sudá, je zřejmě splněna právě pro ta N, která jsou druhou mocninou celého čísla. Právě pro ně hráč A tedy může vyhrát bez ohledu na tahy hráče B.

3. Předpokládejme, že bod A leží na úsečce CF (případ, kdy na úsečce AF leží bod C, je analogický). Označme P průsečík přímek BC a AD (obr. 55). Protože $|MB| = |ME|$, $|BC| = |CE|$ a $|ME| = |MF|$, jsou



Obr. 55

trojúhelníky MBC a MEC shodné a trojúhelník EFM rovnoramenný, takže pro velikosti úhlů máme

$$|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MEC| = 180^\circ - |\sphericalangle MEF| = 180^\circ - |\sphericalangle MFC|.$$

Odtud plyne, že body M, B, C, F leží na jedné kružnici. Protože $|ME| = |MD|$ a $|AE| = |AD|$, jsou trojúhelníky MEA, MDA shodné a $|\sphericalangle AEM| = |\sphericalangle ADM|$, tedy $|\sphericalangle MDP = |\sphericalangle MBP|$ a čtyřúhelník $MPBD$

je tětivový. Dohromady s tětivovostí čtyřúhelníků $ABCD$, $FMBC$ tak dostáváme

$$|\sphericalangle PMB| = |\sphericalangle PDB| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = \\ = |\sphericalangle FCB| = 180^\circ - |\sphericalangle FMB|.$$

Proto body F, M, P leží v přímce, a přímky AD, BC a FM se tak protínají v jednom bodě (v bodě P).

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení dokážeme, že čtyřúhelník $FMBC$ je tětivový. Protože body M, A leží na ose úsečky DE, platí $|\sphericalangle MDA| = |\sphericalangle MEA|$. Z rovnosti $|ME| = |MF|$ dále plyne $|\sphericalangle MFA| = |\sphericalangle MEA|$, takže čtyřúhelník $MADF$ je tětivový.

Přímky FM, AD, BC jsou tedy chordálami kružnic opsaných tětivovým čtyřúhelníkům $FMBC$, $BCDA$, $ADFM$, z čehož podle známého tvrzení plyne, že se protínají v jednom bodě (který má ke všem třem kružnicím stejnou mocnost).

4. Prvočísla, druhé mocniny prvočísel a číslo 1 nesplňují první podmínku, z dalších úvah je proto vynecháme.

Nejprve předpokládejme, že n je sudé, tj. $n = 2x$ pro nějaké $x \in \mathbb{N}$. Potom podle druhé podmínky $x - 2$ dělí n. Každý dělitel čísla n menší než $x = \frac{1}{2}n$ je nejvýše roven $\frac{1}{3}n$. Proto $x - 2 \leqq \frac{1}{3}n = \frac{2}{3}x$, odkud $x \leqq 6$. Postupným ověřením všech přípustných hodnot x snadno zjistíme, že vyhovují $n = 6$, $n = 8$ a $n = 12$.

Dále předpokládejme, že n je liché. Nechť $n = px$, přičemž p je nejmenší netriviální dělitel čísla n. Číslo p je zřejmě liché prvočíslo a $p+1 \nmid n$, neboť $p + 1$ je sudé, proto $x \neq p + 1$. Protože $1 < p < x < n$, máme $x - p \mid px$.

Jestliže $p \nmid x$, jsou čísla $x - p$ a x nesoudělná, nutně tedy $x - p \mid p$, odkud $x - p \leqq p$. Avšak $x \neq p + 1$, tedy $x - p \geqq p$ (neboť p je nejmenší netriviální dělitel čísla n). Proto musí platit $x - p = p$, což je ve sporu s tím, že $n = px$ je liché.

Jestliže $p \mid x$, je $x = py$ pro nějaké celé číslo $y > 1$. Z minimálnosti prvočísla p plyne, že $y \geqq p$. Podle druhé podmínky $py - p \mid n = p^2y$ neboli $y - 1 \mid py$. Protože $y - 1$ a y jsou nesoudělná, nutně $y - 1 \mid p$, odkud $y \leqq p + 1$. Kdyby bylo $y = p + 1$, bylo by y sudým dělitelem čísla n, což nejde. Kdyby bylo $y = p$, bylo by to ve sporu s podmínkou $y - 1 \mid p$ (protože $p \geqq 3$). Jiné možnosti vzhledem k nerovnosti $y \geqq p$ nejsou.

Odpověď. Oběma podmínkám vyhovují jen čísla 6, 8 a 12.

5. Protože posloupnost (c_n) je rostoucí, platí zřejmě $c_n \geqq n$, a proto i $c_{a_n} \geqq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Posloupnosti však neobsahují stejné členy, nutně tedy

$$c_{a_n} > a_n \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Posloupnosti budeme „naplňovat“ induktivně. Nejdříve dokážeme, že $a_1 = 1$. Kdyby naopak platilo $a_1 > 1$, muselo by být buď $c_1 = 1$, anebo $b_1 = 1$. Druhá možnost nepřipadá v úvahu, protože podle (i) a (1) máme $b_1 = c_{a_1} - 1 > a_1 - 1$, tedy $b_1 > a_1$ (neboť $b_1 \neq a_1$). Kdyby bylo $c_1 = 1$, bylo by $b_1 \neq 2$ (neboť $b_1 > a_1$), $c_2 \neq 2$ (díky (iii) pro $n = 1$), muselo by tedy být $a_1 = 2$. Potom však $a_2 \neq 3$ (neboť $a_2 > b_1$), $b_1 \neq 3$ (neboť v takovém případě by bylo $c_2 = c_{a_1} = b_1 + 1 = 4$ a neplatilo by (iii) pro $n = 1$) a též $c_2 \neq 3$ (neboť $c_2 = c_{a_1} = b_1 + 1 \neq 3$).

Nyní najdeme v posloupnostech místo pro číslo 2. Kdyby bylo $a_2 = 2$, platilo by podle (ii) $2 = a_2 > b_1$, což není možné. Kdyby bylo $c_1 = 2$, měli bychom podle (i) $2 = c_1 = c_{a_1} = b_1 + 1$, tedy $b_1 = 1$, což také není možné. Zbývá jen možnost $b_2 = 2$. Potom podle (i) dostaneme $c_1 = c_{a_1} = b_1 + 1 = 3$.

n	1	2	3	4	5	...
a_n	1					
b_n	2					
c_n	3					

Díky (iii) je $c_2 \neq 4$. Také $b_2 \neq 4$, neboť jinak by podle (1) a (i) bylo $a_2 < c_{a_2} = b_2 + 1 = 5$ a pro a_2 by už nezůstala žádná hodnota. Je tudíž $a_2 = 4$. Následně podle (ii) máme $a_3 \neq 5$ a také $b_2 \neq 5$, neboť jinak by podle (i) bylo $c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1 = 6$ a pro c_2, c_3 by už nezbyly žádné hodnoty. Proto $c_2 = 5$. Stejnou úvahou dostaneme $a_3 \neq 6$, $b_2 \neq 6$, tedy $c_3 = 6$. Dále $a_3 \neq 7$ (podle (ii)), $c_4 \neq 7$ (neboť jinak by podle (i) bylo $7 = c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1$ neboli $b_2 = 6$), tedy $b_2 = 7$. Je tudíž $c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1 = 8$.

n	1	2	3	4	5	...
a_n	1	4				
b_n	2	7				
c_n	3	5	6	8		

Nyní můžeme znovu zopakovat úvahy z předchozího odstavce: Díky (iii) máme $c_5 \neq 9$. Z (1) a (i) plyne $b_3 \neq 9$ (jinak by bylo

$a_3 < c_{a_3} = b_3 + 1 = 10$ a nezůstala by volná hodnota pro a_3). Proto $a_3 = 9$. Podle (ii) je $a_4 \neq 10$. Z (i) dostaneme $c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1$, proto $b_3 \neq 10$ (jinak by nezůstaly volné hodnoty pro $c_5, \ldots, c_8$). Je tudíž $c_5 = 10$. Podobně

$$a_4 \neq 11,\ b_3 \neq 11 \implies c_6 = 11,$$
$$a_4 \neq 12,\ b_3 \neq 12 \implies c_7 = 12,$$
$$a_4 \neq 13,\ b_3 \neq 13 \implies c_8 = 13.$$

Konečně, $a_4 \neq 14$ (z (ii)), $c_9 \neq 14$ (jinak by podle (i) bylo $14 = c_9 = c_{a_3} = b_3+1$, tedy $b_3 = 13$, což neplatí), tedy $b_3 = 14$ a $c_9 = c_{a_3} = b_3+1 = 15$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	1	4	9							
b_n	2	7	14							
c_n	3	5	6	8	10	11	12	13	15	

Zformulujeme tvrzení, které lze jednoduše dokázat matematickou indukcí. (Formální důkaz, který je triviálním zobecněním předešlých dvou odstavců, vynecháme.) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $i = 1, 2, \ldots, 2k - 2$ platí

$$a_k = k^2, \qquad c_{(k-1)^2+i} = k^2 + i,$$
$$b_k = k^2 + 2k - 1, \qquad c_{k^2} = k^2 + 2k.$$

Na základě toho už snadno dopočítáme požadované hodnoty:

$$a_{2010} = 2\,010^2, \quad b_{2010} = 2\,010^2 + 2 \cdot 2\,010 - 1,$$
$$c_{2010} = c_{44^2+74} = 45^2 + 74 = 2\,099.$$

6. Pro $1 \leqq i < j \leqq n$ označme $x_{ij} = a_i - a_j$. Výrazy

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \qquad \text{a} \qquad \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

budeme zkráceně označovat $\mathcal{K}$ (kvadratický průměr) a $\mathcal{A}$ (aritmetický průměr). Rozdíl jejich čtverců (vyskytující se v zadání) lze po vynásobení číslem n^2 upravit na

$$n^2(\mathcal{K}^2 - \mathcal{A}^2) = n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) - (a_1 + \ldots + a_n)^2 =$$
$$= (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i<j} 2a_i a_j =$$
$$= \sum_{i<j} x_{ij}^2 = x_{1n}^2 + \sum_{i=2}^{n-1}(x_{1i}^2 + x_{in}^2) + \sum_{1<i<j<n} x_{ij}^2.$$

Poslední suma je evidentně nezáporná a pro součet uprostřed platí podle triviální nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq \frac{1}{2}(a+b)^2$ odhad

$$\sum_{i=2}^{n-1}(x_{1i}^2 + x_{in}^2) \geqq \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}(x_{1i} + x_{in})^2 = \frac{n-2}{2} \cdot x_{1n}^2.$$

Dohromady tak máme

$$n^2(\mathcal{K}^2 - \mathcal{A}^2) \geqq x_{1n}^2 + \frac{n-2}{2} \cdot x_{1n}^2 = \frac{n}{2} \cdot (a_1 - a_n)^2,$$

přičemž rovnost zřejmě nastane, právě když $a_2 = \ldots = a_{n-1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$. Největší možná hodnota je tudíž

$$C_n = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n}.$$

7. Každou zasaženou pevnost označme černou barvou, zbylé (nezasažené) pevnosti bílou. Protože každá pevnost zasáhne jednu ze sousedních pevností, je vyloučeno, aby některá pevnost měla dva bílé sousedy. Číslo $P(n)$ je tedy počtem takových obarvení n pevností černou a bílou barvou, že neexistují dvě bílé pevnosti, které by mezi sebou měly právě jednu pevnost. Na druhou stranu pokud takové dvě bílé pevnosti neexistují, snadno najdeme odpovídající způsob střelby, který k takovému obarvení vede: stačí zajistit, že do každé černé pevnosti střelí přinejmenším ta pevnost, která s ní sousedí po směru otáčení hodinových ručiček.

Pospojujeme-li nyní pevnosti ob jednu, dostaneme v případě lichého n „kružnici", na níž žádné dvě *sousední* pevnosti nebudou bílé. V případě sudého n dostaneme takovým spojením „kružnice" dvě (každé z nich bude patřit právě polovina pevností), na nichž také žádné dvě sousední pevnosti nebudou bílé. Označíme-li $K(m)$ počet obarvení m pevností na kružnici černou a bílou barvou tak, že žádné dvě sousední pevnosti nejsou bílé, bude zřejmě platit $P(n) = K(n)$ pro liché n a $P(n) = K(\frac{1}{2}n)^2$ pro sudé n.

Pro hodnoty $K(n)$ odvodíme rekurentní vztah:

Počet vyhovujících obarvení s n-tou pevností černou je totiž roven počtu vyhovujících obarvení $n-1$ pevností (jednoduše vložíme černou pevnost mezi první a $(n-1)$-ní pevnost) zvětšenému o počet obarvení $n-1$ pevností nemajících žádné dvě sousední pevnosti bílé kromě první a $(n-1)$-ní (vložením černé pevnosti mezi tyto dvě bílé pevnosti získáme vyhovující obarvení). Počet možností v druhém případě je vlastně stejný jako počet vyhovujících obarvení $n-2$ pevností s první pevností bílou (stačí spojit ony dvě sousední bílé pevnosti do jedné).

Počet vyhovujících obarvení s n-tou pevností bílou je roven počtu takových obarvení $n-1$ pevností, že žádné dvě sousední nejsou bílé a prvá a $(n-1)$-ní jsou černé (bílou pevnost můžeme vložit jen mezi dvě černé). Tento počet je roven počtu vyhovujících obarvení $n-2$ pevností, v nichž je první černá (opět můžeme dvě sousední černé pevnosti spojit do jedné).

Dohromady tedy

$$\begin{aligned} K(n) &= K(n-1) + K_{\mathrm{b}}(n-2) + K_{\mathrm{c}}(n-2) = \\ &= K(n-1) + K(n-2), \end{aligned}$$

přičemž K_{b} a K_{c} je počet vyhovujících obarvení s první pevností bílou, resp. černou.

Přímo dovedeme spočítat hodnoty $K(2) = 3$, $K(3) = 4$, $K(4) = 7$, tedy

$$K(2) = F(4) - F(0), \quad K(3) = F(5) - F(1), \quad K(4) = F(6) - F(2)$$

a indukcí snadno dokážeme, že $K(n) = F(n+2) - F(n-2)$, přičemž $F(k)$ je k-tý člen Fibonacciho posloupnosti ($F(0) = 0$, $F(1) = F(2) = 1, \ldots$). Navíc $(K(2), K(3)) = 1$ a pro $n \geqq 3$ máme

$$\begin{aligned} (K(n), K(n-1)) &= (K(n) - K(n-1), K(n-1)) = \\ &= (K(n-2), K(n-1)) = \ldots = 1. \end{aligned}$$

Podobně ukážeme, že pro každé sudé $n = 2a$ je číslo $P(n) = K(a)^2$ nesoudělné s oběma čísly $P(n+1) = K(2a+1)$ a $P(n-1) = K(2a-1)$:

$$\begin{aligned} &(K(a), K(2a+1)) = (K(a), F(2)K(2a) + F(1)K(2a-1)) = \\ &\quad = (K(a), F(3)K(2a-1) + F(2)K(2a-2)) = \ldots = \\ &\quad = (K(a), F(a+1)K(a+1) + F(a)K(a)) = (K(a), F(a+1)) = \\ &\quad = (F(a+2) - F(a-2), F(a+1)) = \\ &\quad = (F(a+2) - F(a+1) - F(a-2), F(a+1)) = \\ &\quad = (F(a) - F(a-2), F(a+1)) = (F(a-1), F(a+1)) = \\ &\quad = (F(a-1), F(a)) = 1, \\ &(K(a), K(2a-1)) = (K(a), F(2)K(2a-2) + F(1)K(2a-3)) = \\ &\quad = (K(a), F(3)K(2a-3) + F(2)K(2a-4)) = \ldots = \\ &\quad = (K(a), F(a)K(a) + F(a-1)K(a-1)) = (K(a), F(a-1)) = \\ &\quad = (F(a+2) - F(a-2), F(a-1)) = (F(a+2) - F(a), F(a-1)) = \\ &\quad = (F(a+2) - F(a+1), F(a-1)) = (F(a), F(a-1)) = 1, \end{aligned}$$

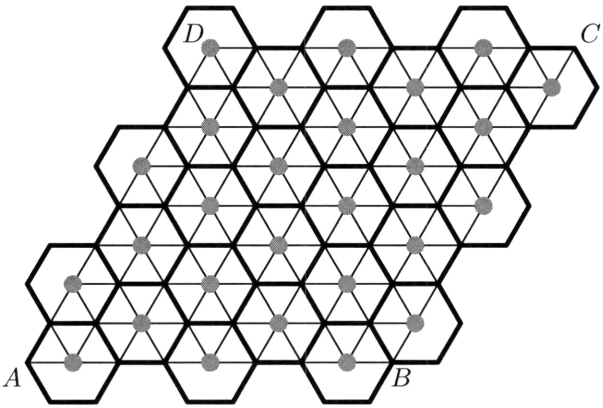
čímž je úloha vyřešena.

8. Nejmenší možný počet červených vrcholů je

$$\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor .$$

Nejdříve ukážeme vyhovující obarvení s tímto počtem. V druhé části dokážeme, že menší počet červených vrcholů není možný.

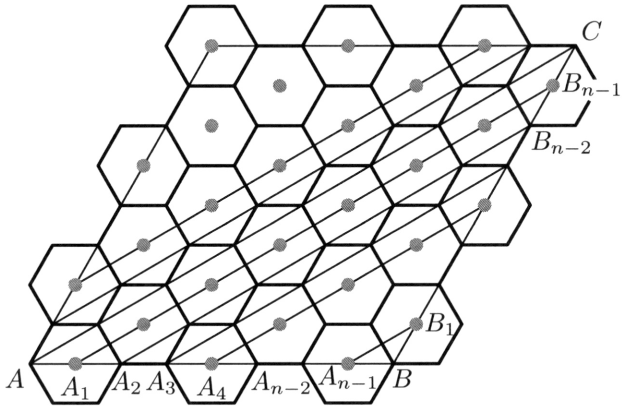
Místo čtverce budeme uvažovat kosočtverec $ABCD$, v němž namísto pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků budou rovnostranné trojúhelníky. Kosočtverec pokryjeme pravidelnými jednotkovými šestiúhelníky tak, aby vrchol A ležel ve vrcholu šestiúhelníku. Střed každého šestiúhelníku obarvíme červenou (na obr. 56 šedou). Zřejmě každý rovnostranný trojúhelník leží v některém šestiúhelníku, a má tedy červený vrchol.



Obr. 56

Označme a_n počet červených vrcholů při tomto obarvení. Stranu AB rozdělme body $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ na n jednotkových úseků. Podobně označme $B_1, \ldots, B_{n-1}$ body na BC, $C_1, \ldots, C_{n-1}$ na CD a $D_1, \ldots, D_{n-1}$ na DA.

Každý z n vrcholů na přímce A_1B_{n-1} je červený (obr. 57). Rovnoběžky A_2B_{n-2}, A_3B_{n-3} nemají žádné červené vrcholy. Rovnoběžka A_4B_{n-4} obsahuje o 3 červené vrcholy méně než A_1B_{n-1}, tj. $n-3$. Podobně leží červené vrcholy na přímkách A_7B_{n-7}, $A_{10}B_{n-10}$, atd. Jejich počet pokaždé klesne o 3. Z druhé strany úhlopříčky AC máme $n-1$ červených vrcholů na C_2D_{n-2}, $n-4$ na C_5D_{n-5} atd.



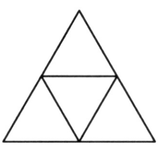
Obr. 57

Celkový počet červených vrcholů je tedy

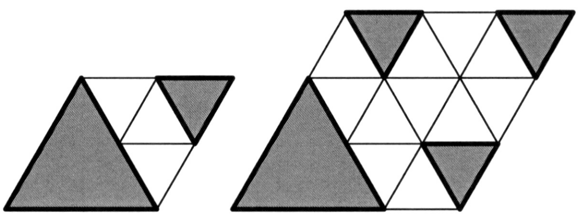
$$a_n = \big(n + (n-3) + (n-6) + \ldots\big) + \big((n-1) + (n-4) + (n-7) + \ldots\big).$$

Je-li $n = 3k+1$, je $a_n = \frac{1}{3}n(n+2)$, takže pro $n = 3k+2$ dostaneme $a_n = \frac{1}{3}(n+1)^2$ a pro $n = 3k+3$ pak $a_n = \frac{1}{3}n(n+2)$. Obecně můžeme tento počet vyjádřit vztahem $a_n = \lfloor \frac{1}{3}(n+1)^2 \rfloor$.

Označme b_n nejmenší možný počet červených vrcholů. Zřejmě $b_1 = 1$. V každém rovnostranném trojúhelníku složeném ze čtyř jednotkových trojúhelníků (obr. 58) musejí být zřejmě obarveny červenou aspoň dva vrcholy. Každý z malých vyznačených trojúhelníků na obr. 59 musí obsahovat aspoň jeden červený vrchol a větší vyznačené trojúhelníky aspoň dva. Proto $b_2 \geqq 2+1 = 3$ a $b_3 \geqq 1+1+1+2 = 5$.



Obr. 58



Obr. 59

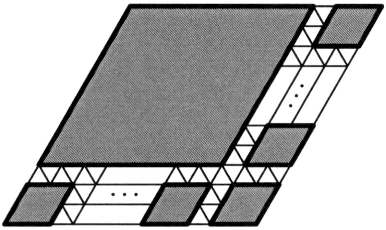
Pro $n \in \{1,2,3\}$ jsme ukázali, že $b_n \geqq a_n$, nutně tedy $b_n = a_n$. Pro zbylé hodnoty n použijeme matematickou indukci, jejíž první krok jsme už učinili. V druhém kroku dokážeme, že pokud $b_{n-3} = a_{n-3}$, pak $b_n = a_n$.

Nechť $n = 3k + 2$. Jak ukazuje obr. 60a, potřebujeme aspoň $b_{n-3} + (2k+1)b_2$ červených vrcholů, tj.

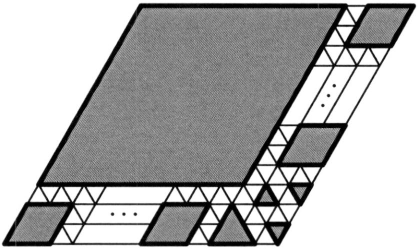
$$b_n \geqq b_{n-3} + (2k+1) \cdot 3 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2n - 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n.$$

Je-li $n = 3k + 3$, dostáváme odhad (obr. 60b)

$$\begin{aligned} b_n &\geqq b_{n-3} + 2kb_2 + 2 + 1 + 1 + 1 = \\ &= \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2(n-3) + 5 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n. \end{aligned}$$



Obr. 60a

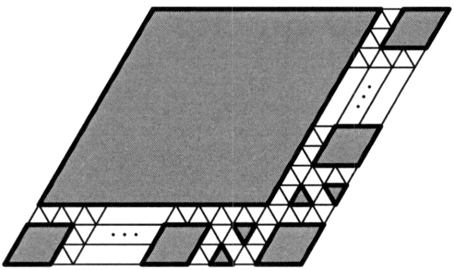


Obr. 60b

Konečně, je-li $n = 3k + 1$, máme podle obr. 60c

$$\begin{aligned} b_n &\geqq b_{n-3} + (2(k-1)+1)b_2 + 1 + 1 + 1 + 1 = \\ &= \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2n - 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n. \end{aligned}$$

Ve všech případech platí $b_n \geqq a_n$, je tudíž $b_n = a_n$.



Obr. 60c

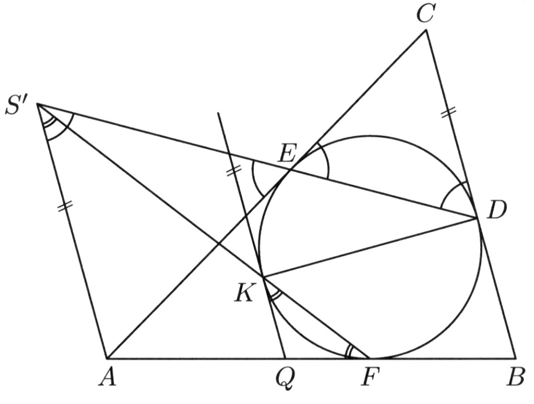
9. Nechť S' je průsečík přímky FK a rovnoběžky se stranou BC vedené bodem A. Naší úlohou je dokázat, že body S', D, E leží na jedné přímce. Průsečík strany AB s tečnou k vepsané kružnici vedenou bodem K označme Q (obr. 61). Zřejmě $KQ \parallel BC$. Proto

$$|\sphericalangle AS'F| = |\sphericalangle QKF| = |\sphericalangle QFK|,$$

odkud $|AS'| = |AF| = |AE|$. Platí též $|DC| = |EC|$ a $BC \parallel AS'$, proto

$$|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle AES'| = |\sphericalangle AS'E|,$$

takže body S', D, E vskutku leží na jedné přímce (příčce rovnoběžek $BC \parallel AS'$).



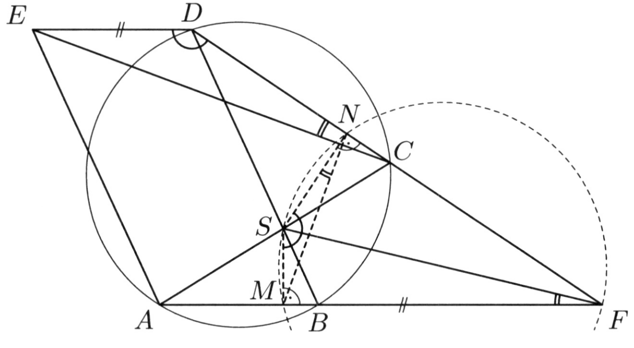
Obr. 61

Jiné řešení. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ a I střed vepsané kružnice. Pro úhly v tětivovém čtyřúhelníku $IFBD$ platí

$$|\sphericalangle IDF| = |\sphericalangle IFD| = \tfrac{1}{2}\beta = |\sphericalangle AFS|.$$

Protože $|\sphericalangle FDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle FIE| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ ($IEAF$ je rovněž tětivový) a $|\sphericalangle FIA| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, jsou trojúhelníky AFI a SFD podobné. Pro poměr podobnosti máme $|AF| : |FS| = |IF| : |DF|$, a tak z rovnosti $|\sphericalangle AFS| = |\sphericalangle IFD|$ plyne podobnost trojúhelníků AFS, IFD, odkud $|AF| = |AS| = |AE|$. Z podobnosti trojúhelníků ASE, CDE pak dostáváme $|\sphericalangle SAE| = 180° - \alpha - \beta$, a tedy $|\sphericalangle BAS| + |\sphericalangle ABC| = 180°$.

10. Označme M a N paty kolmic z bodu S na přímky AB a CD. Čtyřúhelník $SMFN$ je tětivový, protože dva jeho úhly jsou pravé (obr. 62).



Obr. 62

Z obvodových úhlů nad tětivou SM opsané kružnice plyne $|\sphericalangle AFS| = |\sphericalangle MFS| = |\sphericalangle MNS|$. Potřebujeme dokázat, že $|\sphericalangle MNS| = |\sphericalangle ECD|$. K tomu stačí ukázat podobnost trojúhelníků MSN a EDC.

Protože čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, trojúhelníky ABS a DCS jsou podobné. Úsečky SM, SN jsou výškami těchto trojúhelníků, proto $|SM| : |SN| = |AB| : |CD| = |ED| : |CD|$. Pro velikosti úhlů navíc máme

$$|\sphericalangle MSN| = 180^\circ - |\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle EDC|,$$

takže trojúhelníky MSN a EDC jsou vskutku podobné.

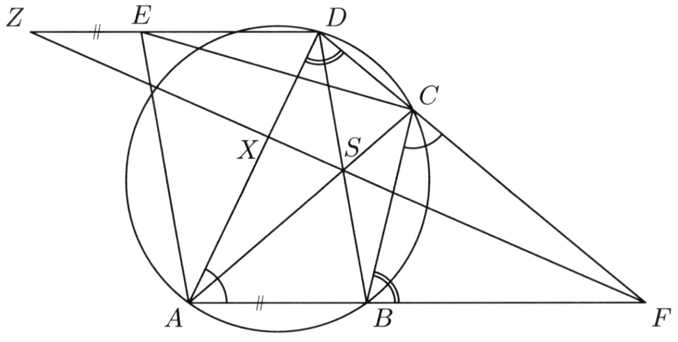
Jiné řešení. Přímka FS protíná přímky AD, DE postupně v bodech, které označíme X a Z (obr. 63). Dále označme $|\sphericalangle BAD| = \alpha$, $|\sphericalangle ADF| = \delta$, $|AB| = a$, $|CD| = c$. Protože $ZD \parallel AF$, stačí dokázat, že trojúhelníky CDE a ZDF jsou podobné. Tyto trojúhelníky mají jeden úhel společný, takže zbývá ukázat, že $|ZD| : |FD| = |CD| : |ED| = c : a$.

Podle sinové věty v trojúhelníku BFC platí $|CF| : |BF| = \sin\delta : \sin\alpha$, neboť

$$|\sphericalangle FBC| = 180^\circ - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA| = \delta,$$
$$|\sphericalangle FCB| = 180^\circ - |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BAD| = \alpha.$$

Z Cèvovy věty pro trojúhelník AFD a bod S plyne

$$1 = \frac{|DX|}{|XA|} \cdot \frac{|AB|}{|BF|} \cdot \frac{|FC|}{|CD|} = \frac{|DX|}{|XA|} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}. \tag{1}$$



Obr. 63

Z podobnosti trojúhelníků AFX, DZX máme $|ZD| = |AF|\cdot|DX|/|AX|$ a ze sinové věty v trojúhelníku AFD dostáváme $|FD| = |AF|\cdot\sin\alpha/\sin\delta$. Pro zkoumaný poměr $|ZD| : |FD|$ tak s využitím (1) platí

$$\frac{|ZD|}{|FD|} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}\cdot\frac{|DX|}{|AX|} = \frac{c}{a}.$$

11. Nejdříve dokážeme, že $\frac{1}{3}a_n$ není pro žádné n součtem dvou čtverců. Druhé mocniny dávají při dělení čtyřmi jen zbytky 0 a 1, takže čísla, která jsou součtem dvou čtverců, mohou po dělení čtyřmi dávat jen zbytky 0, 1 nebo 2. Číslo $\frac{1}{3}a_n$ však dává zbytek 3, neboť a_n dává zbytek 1.[2]

Po chvíli zkoušení najdeme vztah

$$\frac{a_n}{3} = \left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2\cdot 10^{n+1}+1}{3}\right)^3,$$

který po triviální úpravě plyne z vyjádření $a_n = 10^{3n+3} + 2\cdot 10^{2n+2} + 2\cdot 10^{n+1} + 1$. Obě čísla v závorkách jsou přirozená, neboť $10^{n+1} \equiv 1 \pmod 3$, takže $\frac{1}{3}a_n$ se dá vždy vyjádřit jako součet dvou třetích mocnin.

12. Podle Mihailescuovy věty[3] jediným řešením rovnice $x^a - y^b = 1$ v oboru celých čísel větších než 1 jsou čísla $x = b = 3$, $y = a = 2$.

[2] Jinou možností, jak určit zbytek $\frac{1}{3}a_n$ po dělení čtyřmi, je uvědomit si, že toto číslo pro $n \geqq 1$ vždy končí dvojčíslím 67.

[3] Je též známa jako Catalanova hypotéza, dokázána byla v roce 2002.

Proto $10^n + 1$ nemůže být druhou ani vyšší mocninou prvočísla. Podle zadání má n aspoň jednoho lichého dělitele $k \geqq 3$. Jestliže $n = kl$, je

$$10^n + 1 = (10^l)^k + 1 = (10^l + 1)\left((10^l)^{k-1} - (10^l)^{k-2} + \ldots - 10^l + 1\right),$$

takže $10^n + 1$ má netriviálního dělitele $10^l + 1$, a nemůže to tudíž být prvočíslo. Z uvedeného plyne, že existují nesoudělná čísla a, b větší než 1 taková, že $10^n + 1 = ab$.

Naší úlohou je dokázat existenci takových přirozených čísel t a s, že

$$m = (10^n + 1)t = abt = s(s-1),$$

přičemž dekadický zápis čísla t obsahuje právě n číslic.

Nejdříve ukážeme, že existuje přirozené číslo s dělitelné číslem a, pro které $s \equiv 1 \pmod{b}$. Čísla a, $2a$, $\ldots$, $(b-1)a$, ba jsou všechna násobky a a vzhledem k nesoudělnosti čísel a, b dávají při dělení číslem b různé zbytky. Proto právě jedno z nich dává zbytek 1 a můžeme ho vzít jako s. Podobně najdeme s', které je násobkem b a splňuje $s' \equiv 1 \pmod{a}$.

Čísla s, s' jsou kladná a menší než 10^n. Obě čísla $s(s-1)$ a $s'(s'-1)$ jsou dělitelná číslem ab a menší než 10^{2n}. Navíc $s+s' \equiv 1 \pmod{ab}$. Číslo $s+s'$ je větší než 1 a menší než $2\cdot 10^n$. Nutně tedy $s+s' = ab+1 = 10^n+2$, takže aspoň jedno z čísel s, s' je větší než $5\cdot 10^{n-1}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to číslo s. Potom $s(s-1) > 25\cdot 10^{2n-2}$, takže $s(s-1)$ má právě $2n$ číslic a splňuje všechny potřebné podmínky.