Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

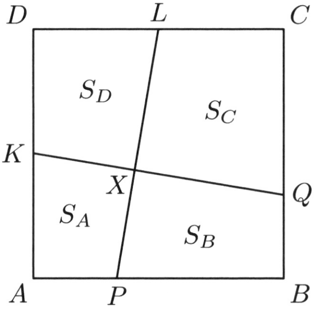
Lucie napsala na tabuli dvě nenulová čísla. Potom mezi ně postupně vkládala znaménka plus, mínus, krát a děleno a všechny čtyři příklady správně vypočítala. Mezi výsledky byly pouze dvě různé hodnoty. Jaká dvě čísla mohla Lucie na tabuli napsat? (*Peter Novotný*)

C – I – 2

Dokažte, že výrazy $23x + y$, $19x + 3y$ jsou dělitelné číslem 50 pro stejné dvojice přirozených čísel x, y. (*Jaroslav Zhouf*)

C – I – 3

Máme čtverec $ABCD$ se stranou délky 1 cm. Body K a L jsou středy stran DA a DC. Bod P leží na straně AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na straně BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL se protínají v bodě X. Obsahy čtyřúhelníků $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupně S_A, S_B, S_C, S_D (obr. 1).



Obr. 1

a) Dokažte, že $S_B = S_D$.
b) Vypočtěte rozdíl $S_C - S_A$.
c) Vysvětlete, proč neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$. (*Peter Novotný*)

C – I – 4

Ve skupině n žáků spolu někteří kamarádí. Víme, že každý má mezi ostatními aspoň čtyři kamarády. Učitelka chce žáky rozdělit do dvou nejvýše čtyřčlenných skupin tak, že každý bude mít ve své skupině alespoň jednoho kamaráda.
a) Ukažte, že v případě $n = 7$ lze žáky požadovaným způsobem rozdělit.
b) Zjistěte, zda lze žáky takto rozdělit i v případě $n = 8$.
(*Tomáš Jurík*)

C – I – 5

Dokažte, že nejmenší společný násobek $[a, b]$ a největší společný dělitel (a, b) libovolných dvou kladných celých čísel a, b splňují nerovnost

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geqq 2ab.$$

Zjistěte, kdy v této nerovnosti nastane rovnost. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed základny AB označme P. Uvažujme rovnoběžku se základnou AB, která protíná úsečky AD, PD, PC, BC postupně v bodech K, L, M, N.
a) Dokažte, že $|KL| = |MN|$.
b) Určete polohu přímky KL tak, aby platilo i $|KL| = |LM|$.
(*Jaroslav Zhouf*)

C – S – 1

Po okruhu běhají dva atleti, každý jinou konstantní rychlostí. Jestliže běží opačnými směry, potkávají se každých 10 minut, jestliže běží stejným směrem, potkávají se každých 40 minut. Za jakou dobu uběhne okruh rychlejší atlet? (*Vojtech Bálint*)

C – S – 2

Je dán čtverec se stranou délky 6 cm. Najděte množinu středů všech příček čtverce, které ho dělí na dva čtyřúhelníky, z nichž jeden má obsah 12 cm^2. (Příčkou čtverce rozumíme úsečku, jejíž krajní body leží na stranách čtverce.) (*Pavel Leischner*)

C – S – 3

Nechť x, y jsou kladná celá čísla taková, že obě čísla $3x+5y$ a $5x+2y$ jsou dělitelná číslem 60. Zdůvodněte, proč číslo 60 dělí také součet $2x + 3y$. (*Jaromír Šimša*)

C – II – 1

Na tabuli jsou napsána právě tři (ne nutně různá) reálná čísla. Víme, že součet libovolných dvou z nich je tam napsán také. Určete všechny trojice takových čísel. (*Ján Mazák*)

C – II – 2

Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která je číslo $n^2 + 6n$ druhou mocninou celého čísla. (*Vojtech Bálint*)

C – II – 3

Lichoběžník $ABCD$ má základny AB a CD po řadě délek 18 cm a 6 cm. Pro bod E strany AB platí $2\,|AE| = |EB|$. Těžiště K, L, M trojúhelníků po řadě ADE, CDE, BCE tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

a) Dokažte, že přímky KM a CM svírají pravý úhel.

b) Vypočtěte délky ramen lichoběžníku $ABCD$. (*Pavel Calábek*)

C – II – 4

Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že čísla $x + y + z - xyz$ a $xy + yz + zx - 3$ nemohou být záporná současně. (*Stanislava Sojáková*)

Řešení úloh

C – I – 1

Označme hledaná čísla a, b. Protože $b \neq 0$, je nutně $a+b \neq a-b$. Každé z čísel $a \cdot b$, $a : b$ je proto rovno buď $a+b$, anebo $a-b$. Stačí tedy rozebrat čtyři případy a v každém z nich vyřešit soustavu rovnic. Ukážeme si trochu důmyslnější postup.

Kdyby platilo

$$a+b=a\cdot b \quad \text{a} \quad a-b=a:b$$

anebo

$$a+b=a:b \quad \text{a} \quad a-b=a\cdot b,$$

vynásobením rovností bychom v obou případech dostali $a^2-b^2=a^2$, což odporuje podmínce $b \neq 0$. Proto jsou čísla $a \cdot b$ a $a : b$ buď obě rovna $a+b$, anebo obě rovna $a-b$. Tak či tak musí platit $a \cdot b = a : b$, odkud po úpravě $a(b^2-1)=0$. Protože $a \neq 0$, nutně $b \in \{1, -1\}$.

Pokud je tedy $b=1$, jsou čtyři výsledky postupně $a+1$, $a-1$, a, a, což jsou pro libovolné a tři různé hodnoty.

Pro $b=-1$ dostáváme výsledky $a-1$, $a+1$, $-a$, $-a$. To budou dvě různá čísla, právě když $a-1=-a$ anebo $a+1=-a$. V prvním případě dostáváme $a=\frac{1}{2}$, ve druhém $a=-\frac{1}{2}$.

Lucie mohla na začátku na tabuli napsat buď čísla $\frac{1}{2}$ a -1, anebo čísla $-\frac{1}{2}$ a -1.

C – I – 2

Předpokládejme, že pro dvojici přirozených čísel x, y platí $50 \mid 23x+y$. Potom pro nějaké přirozené číslo k platí $23x+y=50k$. Z této rovnosti dostaneme $y=50k-23x$, tedy $19x+3y=19x+3(50k-23x)=150k-$ $-50x=50(3k-x)$, takže číslo $19x+3y$ je rovněž násobkem čísla 50.

Podobně to funguje i z druhé strany. Jestliže pro nějakou dvojici přirozených čísel x, y platí $50 \mid 19x+3y$, je $19x+3y=50l$ pro nějaké přirozené číslo l. Z této rovnosti vyjádříme číslo y; dostaneme $y=(50l-19x)/3$ (další postup by byl podobný, i kdybychom vyjádřili x místo y). Po dosazení vyjde

$$23x+y=23x+\frac{50l-19x}{3}=\frac{69x+50l-19x}{3}=\frac{50\cdot(x+l)}{3}.$$

O výsledném zlomku víme, že je to přirozené číslo. Čitatel toho zlomku je dělitelný číslem 50. Ve jmenovateli je jen číslo 3, které je s 50 nesoudělné, proto se číslo 50 nemá s čím ze jmenovatele zkrátit, tudíž číslo $23x + y$ je dělitelné 50.

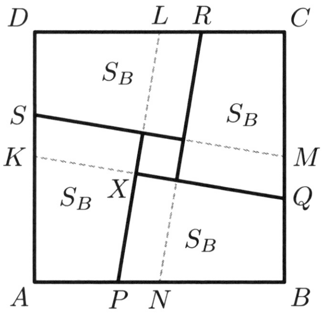
Jiné řešení. Zřejmě $3 \cdot (23x + y) - (19x + 3y) = 50x$, proto jestliže 50 dělí jedno z čísel $23x + y$ a $19x + 3y$, dělí i druhé z nich.

C – I – 3

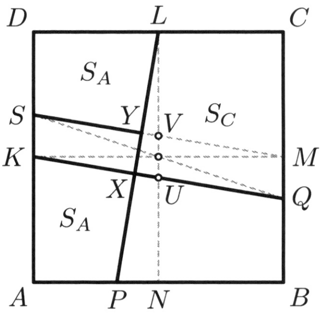
a) Čtyřúhelníky $ABQK$ a $DAPL$ jsou shodné (jeden z nich je obrazem druhého v otočení o 90° se středem ve středu čtverce $ABCD$). Proto mají i stejný obsah, tedy $S_A + S_B = S_A + S_D$. Z toho hned dostáváme $S_B = S_D$.

b) Snadno se nám podaří vypočítat obsah pravoúhlého lichoběžníku $ABQK$, neboť známe délky základen i výšku. Dostaneme $S_A + S_B = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}\,\mathrm{cm}^2$. Podobně výpočtem obsahu lichoběžníku $PBCL$ dostaneme $S_C + S_B = (\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\,\mathrm{cm}^2$. Odečtením první získané rovnosti od druhé dostáváme $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\,\mathrm{cm}^2$.

c) Nerovnost mezi obsahy $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (jejichž přímé výpočty jsou nad síly žáků 1. ročníku) můžeme zdůvodnit následujícím způsobem. Součet těchto dvou obsahů je $1\,\mathrm{cm}^2$, takže se nerovnají, právě když je jeden z nich menší než $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, jak už víme), když ukážeme, že obsah S_B je menší než $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$. Uděláme to tak, že do celého čtverce $ABCD$ umístíme bez překrytí čtyři exempláře dotyčného čtyřúhelníku $PBQX$. Jak, to je patrné z obr. 2, kde M, N značí středy stran BC, AB a R, S body, jež dělí strany CD, DA v poměru 1 : 2.



Obr. 2



Obr. 3

Jiné řešení části c). Tentokrát místo nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$ dokážeme ekvivalentní nerovnost $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Proto se pokusíme „přemístit“ čtyřúhelník $APXK$ tak, aby ležel při čtyřúhelníku $XQCL$ a aby se jejich obsahy daly i geometricky sečíst. Úhly AKQ a DLP jsou shodné a $|AK| = |DL|$, proto můžeme čtyřúhelník $APXK$ přemístit ve čtverci $ABCD$ do jeho „rohu“ D tak, že se ke čtyřúhelníku $XQCL$ „přimkne“ podél strany LX svou stranou LY, kde Y je průsečík úseček SM a PL z původního řešení (obr. 3). Obsah $S_A + S_C$ je pak obsahem šestiúhelníku $DSYXQC$. Proč je větší než $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, lze zdůvodnit například takto:

Úsečka spojující bod L se středem U úsečky KQ protne úsečku SM v jejím středu V. Čtyřúhelník $UQMV$ má obsah rovný polovině obsahu rovnoběžníku $KQMS$, tedy rovný obsahu trojúhelníku KMS. Proto má šestiúhelník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu čtyřúhelníku $KMCD$, tj. polovině obsahu čtverce $ABCD$. Obsah S_A+S_C je ještě větší, a to o obsah čtyřúhelníku $XUVY$. Je tedy vskutku $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

C – I – 4

a) Jediný způsob, jak rozdělit 7 žáků na dvě nejvýše čtyřčlenné skupiny, je mít jednu trojčlennou a jednu čtyřčlennou skupinu. Každý žák ze čtyřčlenné skupiny přitom bude mít ve své skupině kamaráda při jakémkoli rozdělení, protože se nemůže stát, že by všichni jeho kamarádi byli v trojčlenné skupině (jsou aspoň čtyři).

Takže stačí rozdělit žáky tak, aby každý v trojčlenné skupině v ní měl kamaráda. Proto do ní dáme kteréhokoli ze žáků a k němu některé dva jeho kamarády.

b) Vezměme si jakékoli rozdělení 8 žáků na dvě čtyřčlenné skupiny (skupiny s jiným počtem žáků nepřipadají v úvahu). Jestliže toto rozdělení nevyhovuje učitelčině záměru, máme nějakého žáka X, jenž je *zle zařazen* — má všechny své čtyři kamarády A, B, C, D ve druhé skupině. Ukážeme, že umíme vyměnit X a některého ze žáků A, B, C, D tak, že celkový počet zle zařazených žáků v nově vzniklých skupinách se oproti původnímu stavu zmenší.

Po libovolné ze čtyř výměn přicházejících do úvahy přestane být X zle zařazen a všichni tři žáci, kteří se s ním octnou ve skupině, budou dobře zařazeni, neboť jsou to jeho kamarádi. Žáci K, L, M, kteří byli před výměnou ve skupině s X, mohou být po výměně zle zařazeni jen tehdy, pokud byli zle zařazeni i předtím (neboť X není kamarádem ani jednoho z nich). Protože žák K má čtyři kamarády a nekamarádí se s X, musí mít aspoň jednoho kamaráda Y i ve skupině obsahující žáky A, B, C, D. Právě tento žák Y se hodí pro zamýšlenou výměnu s žákem X, neboť po ní i on bude mít ve své nové skupině kamaráda — totiž žáka K.

Ukázali jsme tedy, že výměnou žáků X a Y počet zle zařazených žáků klesne. Dostaneme nějaké nové rozdělení; jestliže v něm je aspoň jeden žák zle zařazen, můžeme zopakovat předchozí postup a opět snížit počet zle zařazených žáků. Po nejvýše osmi krocích dostaneme rozdělení, v němž už nejsou žádní zle zařazení žáci.

Jiné řešení části b). Uvažujme všechna možná rozdělení osmi žáků do dvou čtyřčlenných skupin. Rozdělení, kde někdo nemá ve své skupině žádného kamaráda, budeme nazývat *zlá*, zbylá budou *dobrá*.

Kolik je zlých rozdělení? Jestliže má žák X aspoň pět kamarádů, aspoň jeden z nich musí být v jeho skupině. Jestliže má žák X jen čtyři kamarády a jsou-li všichni ve druhé skupině, máme jen jedno jediné rozdělení s touto vlastností. Celkově tedy k danému žákovi X existuje nejvýše jedno rozdělení, jež je zlé. Za X můžeme vzít jednoho z 8 různých žáků, proto zlých rozdělení je nejvýše 8 (některá možná počítáme víckrát). Přitom všech rozdělení je $\binom{7}{3} = 35$, tedy aspoň 27 z nich je dobrých.

C – I – 5

Nerovnost by bylo lehké dokázat, kdyby některý ze dvou sčítanců na levé straně byl sám aspoň roven pravé straně. Číslo $[a, b]$ je zjevně násobkem čísla a.

Jestliže $[a, b] \geqq 2a$, pak $b[a, b] \geqq 2ab$ a v dané nerovnosti platí dokonce ostrá nerovnost, neboť číslo $a(a, b)$ je kladné.

Jestliže $[a, b] < 2a$, tak nezůstává jiná možnost než $[a, b] = a$. To však nastane, jen když $b \mid a$. V tomto případě $(a, b) = b$ a v dané nerovnosti nastane rovnost.

Jiné řešení. Označme $d = (a, b)$, takže $a = ud$ a $b = vd$ pro nesoudělná přirozená čísla u, v. Odtud hned plyne, že $[a, b] = uvd$. Protože

$$\begin{aligned} a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] &= ud^2 + uv^2 d^2 = u(1 + v^2)d^2, \\ 2ab &= 2uvd^2, \end{aligned}$$

je vzhledem k nerovnosti $ud^2 > 0$ nerovnost ze zadání ekvivalentní s nerovností $1 + v^2 \geqq 2v$, tedy $(v - 1)^2 \geqq 0$, což platí pro každé v. Rovnost nastane, právě když $v = 1$, tedy $b \mid a$.

Jiné řešení. Označme $d = (a, b)$. Je známo, že $[a, b] \cdot (a, b) = ab$. Po vyjádření $[a, b]$ z tohoto vztahu, dosazení do dané nerovnosti a ekvivalentní úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnost $d^2 + b^2 \geqq 2bd$, která platí, neboť $(d - b)^2 \geqq 0$. Rovnost nastává jen pro $d = b$, tedy pokud $b \mid a$.

C – I – 6

a) Přímky AB, CD a KL jsou rovnoběžné, proto v dané situaci dovedeme najít vícero dvojic trojúhelníků podobných vždy podle věty *uu*. Tyto podobnosti lze výhodně zapsat pomocí poměrů vzdáleností, což využijeme v důkazu toho, že úsečky KL a MN mají stejnou délku.

Označme x vzdálenost přímek AB a KL a y vzdálenost přímek KL a CD. Pomocí těchto vzdáleností nyní vyjádříme koeficienty podobnosti odpovídajících trojúhelníků.

Trojúhelníky APD a KLD jsou podobné, proto

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x + y}.$$

Trojúhelníky BPC a NMC jsou podobné, proto

$$\frac{|MN|}{|PB|} = \frac{y}{x + y}.$$

Spojením obou rovností dostáváme

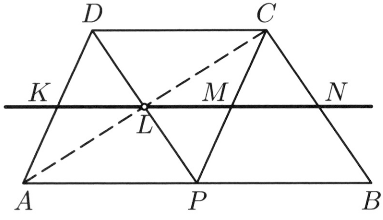
$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x + y} = \frac{|MN|}{|PB|},$$

a protože $|AP| = |PB|$, plyne odtud $|KL| = |MN|$.

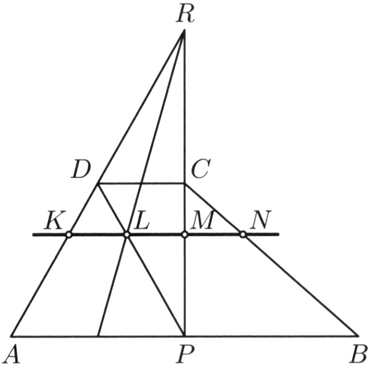
b) Chceme sestrojit bod L úsečky PD takový, že $|KL| = |LM|$. Rozebereme dva případy podle toho, zda je či není přímka PC rovnoběžná s přímkou AD.

Jestliže je přímka PC rovnoběžná s AD, je $APCD$ rovnoběžník a jediný vyhovující bod L je střed úsečky PD neboli průsečík úhlopříček rovnoběžníku $APCD$ (podmínka $|KL| = |LM|$ tu vyjadřuje shodnost trojúhelníků KLD a MLP, která nastane, právě když $|LD| = |LP|$, obr. 4).

Jestliže se přímky PC a AD protínají v nějakém bodě R (obr. 5), bude bod L průsečíkem úsečky DP s přímkou, na níž leží těžnice trojúhelníku APR z vrcholu R. Plyne to z poznatku, že s úsečkou AP jsou podle



Obr. 4



Obr. 5

středu R stejnolehlé všechny v úvahu připadající úsečky KM, a proto středy všech těchto úseček leží na přímce jdoucí bodem R a středem úsečky AP.

Z uvedených konstrukcí plyne, že vyhovující bod L je vždy jediný, existuje tudíž právě jedna rovnoběžka s přímkou AB s požadovanými vlastnostmi.

Poznámka. Jak jsme uvedli v řešení, pokud jsou přímky PC a AD rovnoběžné, je hledaným bodem L, pro který platí $|KL| = |LM|$, průsečík úhlopříček rovnoběžníku $APCD$. Pokud přímky PC a AD rovnoběžné nejsou, tj. $APCD$ je lichoběžník, je i v tomto případě průsečík jeho úhlopříček výborným kandidátem pro takový bod L. Výpočtem s využitím podobnosti se dá ukázat, že tomu tak vskutku je, takže hledaným bodem L je v každém případě průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $APCD$.

C – S – 1

Označme rychlosti běžců v_1 a v_2 tak, že $v_1 > v_2$ (rychlosti udáváme v okruzích za minutu). Představme si, že atleti vystartují ze stejného místa, ale opačným směrem. V okamžiku jejich dalšího setkání po 10 minutách bude součet délek obou proběhnutých úseků odpovídat přesně délce jednoho okruhu, tedy $10v_1 + 10v_2 = 1$.

Jestliže běží atleti ze stejného místa stejným směrem, dojde k dalšímu setkání, jakmile rychlejší atlet zaběhne o jeden okruh víc než ten pomalejší. Proto $40v_1 - 40v_2 = 1$.

Dostali jsme soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými v_1, v_2:

$$10v_1 + 10v_2 = 1,$$
$$40v_1 - 40v_2 = 1,$$

kterou vyřešíme například tak, že ke čtyřnásobku první rovnice přičteme druhou, čímž dostaneme $80v_1 = 5$ neboli $v_1 = \frac{1}{16}$. Zajímá nás, jak dlouho trvá rychlejšímu běžci proběhnout jeden okruh, tedy hodnota podílu $1/v_1$. Po dosazení vypočtené hodnoty v_1 dostaneme *odpověď*: 16 minut.

Poznámka. Úlohu lze rovněž řešit úvahou: za 40 minut uběhnou atleti dohromady 4 okruhy (to plyne z první podmínky), přitom rychlejší o 1 okruh více než pomalejší (to plyne z druhé podmínky). To tedy znamená, že první za uvedenou dobu uběhne 2,5 okruhu a druhý 1,5 okruhu, takže rychlejší uběhne jeden okruh za 40/2,5 neboli 16 minut.

C – S – 2

Jestliže příčka dělí čtverec na dva čtyřúhelníky, musejí její koncové body ležet na protilehlých stranách čtverce. V takovém případě jsou oba čtyřúhelníky lichoběžníky nebo pravoúhelníky (pro potřeby tohoto řešení budeme pravoúhelník považovat za speciální lichoběžník). Označme daný čtverec $ABCD$, koncové body příčky označme K a L. Předpokládejme, že bod K leží na straně AD, potom bod L leží na straně BC. Jeden ze čtyřúhelníků $KABL$ a $KDCL$ má podle zadání obsah $12\,\mathrm{cm}^2$; nechť je to např. lichoběžník $KABL$.

Obsah lichoběžníku vypočteme jako součin jeho výšky s délkou střední příčky. Výška je v našem případě rovna délce strany čtverce, tedy 6 cm. Jeho střední příčka má tudíž délku 2 cm. Z toho plyne, že střed úsečky KL musí ležet na ose strany AB ve vzdálenosti 2 cm od středu strany AB. Platí to i naopak: jestliže střed úsečky KL leží v popsané poloze, bude čtyřúhelník $KABL$ lichoběžník s obsahem $12\,\mathrm{cm}^2$.

Budeme-li místo lichoběžníku $KABL$ uvažovat lichoběžník $KDCL$, vyjde střed příčky KL na osu úsečky CD ve vzdálenosti 2 cm od středu strany CD.

Pokud příčka KL spojuje body na stranách AB a CD, dostaneme další dva možné body ležící na spojnici středů úseček AD a BC. Hledanou množinu tedy tvoří čtyři body, které leží na příčkách spojujících středy protilehlých stran čtverce ve vzdálenosti 1 cm od jeho středu.

C – S – 3

Na základě předpokladu ze zadání víme, že existují kladná celá čísla m a n, pro která platí

$$3x + 5y = 60m,$$
$$5x + 2y = 60n.$$

Na tyto vztahy se můžeme dívat jako na soustavu lineárních rovnic s neznámými x a y a parametry m a n. Vyřešit ji umíme libovolnou standardní metodou, například od dvojnásobku první rovnice odečteme pětinásobek druhé a vyjádříme x, potom dopočítáme y. Dostaneme

$$x = \frac{60(5n - 2m)}{19}, \quad y = \frac{60(5m - 3n)}{19}.$$

Protože čísla 19 a 60 jsou nesoudělná, jsou obě čísla x a y dělitelná 60. Proto i součet $2x + 3y$ je dělitelný 60.

Jiné řešení. Víme, že $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$. Přitom čísla 3, 4, 5 jsou po dvou nesoudělná, proto na důkaz dělitelnosti 60 stačí dokázat dělitelnost jednotlivými čísly.

Protože číslo $3x + 5y$ je dělitelné 5, je i x dělitelné 5. Podobně z relace $5 \mid 5x + 2y$ plyne $5 \mid y$. Proto 5 dělí i $2x + 3y$.

Protože číslo $3x+5y$ je dělitelné 3, je y dělitelné 3. A protože $3 \mid 5x+2y$, je také $3 \mid 5x$, a tedy $3 \mid x$. Proto 3 dělí i $2x + 3y$.

Protože $4 \mid 3x+5y$ a $4 \mid 5x+2y$, je $4 \mid (3x+5y)+(5x+2y) = 8x+7y$, takže $4 \mid y$. A protože například $4 \mid 3x + 5y$, je také $4 \mid 3x$ neboli $4 \mid x$. Proto 4 dělí i $2x + 3y$.

Jiné řešení. Vyjádříme výraz $2x+3y$ pomocí $3x+5y$ a $5x+2y$. Budeme hledat čísla p a q taková, že $2x+3y = p(3x+5y)+q(5x+2y)$ pro každou dvojici celých čísel x, y. Jednoduchou úpravou dostaneme rovnici

$$(2 - 3p - 5q)x + (3 - 5p - 2q)y = 0. \qquad (*)$$

Budou-li hledaná čísla p a q splňovat soustavu

$$3p + 5q = 2,$$
$$5p + 2q = 3,$$

bude zřejmě rovnost $(*)$ splněna pro každou dvojici x, y. Vyřešením soustavy dostaneme $p = 11/19$, $q = 1/19$. Dosazením do $(*)$ dostáváme vyjádření

$$19(2x + 3y) = 11(3x + 5y) + (5x + 2y),$$

z něhož plyne, že spolu s čísly $3x + 5y$ i $5x + 2y$ je současně dělitelné 60 i číslo $2x + 3y$, protože čísla 19 a 60 jsou nesoudělná.

C – II – 1

Označme čísla napsaná na tabuli a, b, c. Součet $a + b$ se též nalézá na tabuli, je tedy roven jednomu z čísel a, b, c. Kdyby $a + b$ bylo rovno a nebo b, byla by na tabuli aspoň jedna nula. Rozebereme proto tři případy podle počtu nul napsaných na tabuli.

Jsou-li na tabuli aspoň dvě nuly, snadno se přesvědčíme, že součet každých dvou čísel z tabule je tam rovněž. Dostáváme, že trojice $t, 0, 0$ je pro libovolné reálné číslo t řešením úlohy.

Je-li na tabuli právě jedna nula, je tam trojice $a, b, 0$, kde a i b jsou nenulová čísla. Součet $a + b$ tudíž není roven ani a, ani b, musí tedy být roven 0. Dostáváme tak další trojici $t, -t, 0$, která je řešením úlohy pro libovolné reálné číslo t.

Jestliže na tabuli není ani jedna nula, součet $a + b$ není roven ani a, ani b, proto $a + b = c$. Ze stejných důvodů je $b + c = a$ a $c + a = b$. Dostali jsme soustavu tří lineárních rovnic s neznámými a, b, c, kterou můžeme vyřešit. Ovšem hned z prvních dvou rovnic po dosazení vyjde $b + (a + b) = a$ neboli $b = 0$. To je ve sporu s tím, že na tabuli žádná nula není.

Závěr. Úloze vyhovují trojice $t, 0, 0$ a $t, -t, 0$ pro libovolné reálné číslo t a žádné jiné.

C – II – 2

Zřejmě $n^2 + 6n > n^2$ a zároveň $n^2 + 6n < n^2 + 6n + 9 = (n + 3)^2$. V uvedeném rozmezí leží jen dvě druhé mocniny celých čísel: $(n + 1)^2$ a $(n + 2)^2$.

V prvním případě máme $n^2 + 6n = n^2 + 2n + 1$, tedy $4n = 1$, tomu však žádné celé číslo n nevyhovuje.

V druhém případě máme $n^2 + 6n = n^2 + 4n + 4$, tedy $2n = 4$. Dostáváme tak jediné řešení $n = 2$.

Jiné řešení. Budeme zkoumat rozklad $n^2 + 6n = n(n + 6)$. Společný dělitel obou čísel n a $n + 6$ musí dělit i jejich rozdíl, proto jejich největším společným dělitelem mohou být jen čísla 1, 2, 3 nebo 6. Tyto čtyři možnosti rozebereme.

Kdyby byla čísla n a $n+6$ nesoudělná, muselo by být každé z nich druhou mocninou. Rozdíl dvou druhých mocnin přirozených čísel však nikdy není 6. Pro malá čísla se o tom snadno přesvědčíme, a pro $k \geqq 4$ už je rozdíl byť i jen sousedních čtverců k^2 a $(k-1)^2$ aspoň 7. Vlastnost, že 1, 3, 5 a 7 jsou čtyři nejmenší rozdíly dvou druhých mocnin, využijeme i dále.

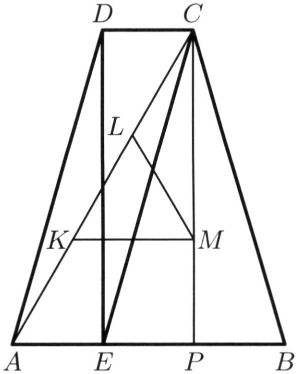
Je-li největším společným dělitelem čísel n a $n+6$ číslo 2, je $n = 2m$ pro vhodné m, které navíc není dělitelné třemi. Jestliže $n(n+6) = 4m(m+3)$ je čtverec, musí být i $m(m+3)$ čtverec. Čísla m a $m+3$ jsou však nesoudělná, musí proto být každé z nich druhou mocninou přirozeného čísla. To nastane jen pro $m=1$ neboli $n=2$. Snadno ověříme, že $n(n+6)$ je pak vskutku druhou mocninou celého čísla.

Je-li největším společným dělitelem čísel n a $n+6$ číslo 3, je $n=3m$ pro vhodné liché m. Jestliže $n(n+6) = 9m(m+2)$ je čtverec, musejí být nesoudělná čísla m a $m+2$ rovněž čtverce. Takové dva čtverce však neexistují.

Je-li největším společným dělitelem čísel n a $n+6$ číslo 6, je $n=6m$ pro vhodné m. Jestliže $n(n+6) = 36m(m+1)$ je čtverec, musejí být čtverce i obě nesoudělná čísla m a $m+1$, což nastane jen pro $m=0$, my však hledáme jen kladná čísla n.

Úloze vyhovuje jedině $n=2$.

C – II – 3



Obr. 6

Čtyřúhelník $AECD$ je rovnoběžník, protože jeho strany AE a CD jsou rovnoběžné a stejně dlouhé (obě měří 6 cm). Na jeho úhlopříčce AC tak leží těžnice trojúhelníku ADE z vrcholu A i těžnice trojúhelníku CDE z vrcholu C, a proto na této přímce leží i body K a L (obr. 6). Navíc víme, že těžiště trojúhelníku dělí jeho těžnice v poměru $2:1$, proto jsou úsečky AK, KL a LC stejně dlouhé.

Bod L je středem úsečky KC, proto na ose souměrnosti úsečky KM leží nejen výška rovnostranného trojúhelníku KLM, ale i střední příčka trojúhelníku KMC. Proto je přímka CM kolmá na KM.

Zbývá vypočítat délky ramen lichoběžníku $ABCD$. Označme P střed úsečky EB. Protože CM je kolmá na KM, je těžnice CP kolmá na

EB, takže trojúhelník EBC je rovnoramenný, a tudíž i daný lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný. Délku ramene BC nyní vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku PBC, v němž známe délku odvěsny PB. Pro druhou odvěsnu CP zřejmě platí

$$|CP| = \frac{3}{2}|CM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,|KM|,$$

jak snadno plyne z vlastností trojúhelníku KMC. A protože $|KM| = \frac{2}{3}|AP|$ z podobnosti trojúhelníků KMC a APC, je (počítáno v centimetrech)

$$|CP| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,|KM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}|AP| = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}|AB| = 12\sqrt{3}.$$

Potom

$$|BC| = \sqrt{|PB|^2 + |PC|^2} = \sqrt{36 + 12^2 \cdot 3} = 6\sqrt{1 + 12} = 6\sqrt{13}.$$

Ramena daného lichoběžníku mají délku $6\sqrt{13}$ cm.

Alternativní důkaz kolmosti přímek KM a CM: Protože bod L je středem úsečky KC a zároveň $|LK| = |LM|$, neboť trojúhelník KLM je rovnostranný, leží bod M na Thaletově kružnici nad průměrem KC, takže trojúhelník KMC je pravoúhlý.

C – II – 4

Ukážeme, že je-li číslo $xy + yz + zx - 3$ záporné, je číslo $x + y + z - xyz$ kladné.

Jestliže $xy+yz+zx < 3$, je aspoň jedno z čísel xy, yz, zx menší než 1, např. xy. Pak $x + y + z - xyz = x + y + z(1 - xy)$ je zjevně součet tří kladných čísel.

Jiné řešení. Ukážeme, že je-li číslo $x + y + z - xyz$ záporné, pak číslo $xy + yz + zx - 3$ je kladné.

Předpokládejme, že $x + y + z < xyz$. Tím spíš $x < xyz$. Po zkrácení kladného čísla x dostaneme $yz > 1$. Podobně odvodíme odhady $xy > 1$ a $zx > 1$. Nyní je stačí sečíst a máme $xy + yz + zx > 3$.

Jiné řešení. Tvrzení úlohy dokážeme sporem. Předpokládejme, že $x + y + z < xyz$ a zároveň $xy + yz + zx < 3$. Obě tyto nerovnosti jsou symetrické, proto můžeme předpokládat, že čísla x, y, z jsou označena tak, že z je nejmenší. Z druhé nerovnosti dostaneme, že $xy < 3$. Potom však $x + y + z < xyz < 3z$, tedy $x + y < 2z$. To je však spor s tím, že číslo z je nejmenší.

Jiné řešení. Jsou-li oba výrazy záporné, je $x + y + z$ menší než 3 a $xy + yz + zx$ menší než xyz. To jsou nerovnosti mezi kladnými čísly, jejich vynásobením dostaneme, že $3xyz$ spolu se šesti dalšími kladnými členy je menší než $3xyz$, což je spor.

Poznámka. Dá se dokázat dokonce víc: jestliže $x + y + z < xyz$, pak $xy + yz + zx > 9$. Při důkazu využijeme nerovnost

$$t + \frac{1}{t} \geqq 2,$$

která platí pro všechna kladná reálná čísla t, neboť pro taková t je ekvivalentní s nerovností $(t - 1)^2 \geqq 0$.

Když si povšimneme, že platí

$$x + y + z - xyz = xyz\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} - 1\right),$$

seznáme, že uvedené tvrzení plyne z obecně platné nerovnosti

$$\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)(xy + yz + zx) \geqq 9.$$

Poslední nerovnost dokážeme roznásobením levé strany:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)(xy + yz + zx) &= 3 + \frac{x + y}{z} + \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} = \\ &= 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geqq \\ &\geqq 3 + 3 \cdot 2 = 9.\end{aligned}$$