60. ročník Matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Zdeněk Dvořák (editor); Zbyněk Falt (editor); Karel Horák (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 60. ročník Matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2010/2011. 52. Mezinárodní matematická olympiáda. 5. Středoevropská matematická olympiáda. 23. Mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. pp. 44–57.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405213

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

V oboru reálných čísel vyřešte soustavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= z+1,\\ \sqrt{y^2+z^2} &= x+1,\\ \sqrt{z^2+x^2} &= y+1.\end{aligned}$$

(*Tomáš Jurík*)

B – I – 2

Uvažujme vnitřní bod P daného obdélníku $ABCD$ a označme po řadě Q, R obrazy bodu P v souměrnostech podle středů A, C. Předpokládejme, že přímka QR protne strany AB a BC ve vnitřních bodech M a N. Sestrojte množinu všech bodů P, pro něž platí $|MN| = |AB|$.

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Nechť a, b, c jsou reálná čísla, jejichž součet je 6. Dokažte, že aspoň jedno z čísel

$$ab+bc, \quad bc+ca, \quad ca+ab$$

není větší než 8. (*Ján Mazák*)

B – I – 4

Najděte všechna celá čísla n, pro něž je zlomek

$$\frac{n^3+2\,010}{n^2+2\,010}$$

roven celému číslu. (*Pavel Novotný*)

B – I – 5

Zabývejme se otázkou, které trojúhelníky ABC s ostrými úhly při vrcholech A a B mají následující vlastnost: Vedeme-li středem výšky z vrcholu C tři přímky rovnoběžné se stranami trojúhelníku ABC, protnou je tyto přímky v šesti bodech ležících na jedné kružnici.

a) Ukažte, že vyhovuje každý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C.

b) Vysvětlete, proč žádný jiný trojúhelník ABC nevyhovuje.

(*Jaromír Šimša*)

B – I – 6

Určete počet desetimístných čísel, v nichž lze škrtnout dvě sousední číslice, a dostat tak číslo 99krát menší. (*Ján Mazák*)

B – S – 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=p$$

s neznámou x a reálným parametrem p. (*Vojtech Bálint*)

B – S – 2

Podél kružnice je rozmístěno 16 reálných čísel se součtem 7.

a) Dokažte, že existuje úsek pěti sousedních čísel se součtem aspoň 2.

b) Určete nejmenší k takové, že v popsané situaci lze vždy nalézt úsek k sousedních čísel se součtem aspoň 3. (*Ján Mazák*)

B – S – 3

Vně daného trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $ACDE$, $BCGF$. Dokažte, že $|AG| = |BD|$. Dále ukažte, že středy obou čtverců spolu se středy úseček AB a DG jsou vrcholy čtverce. (*Pavel Leischner*)

B – II – 1

Součin kladných reálných čísel a, b, c je 60 a jejich součet je 15. Dokažte nerovnost

$$(a+b)(a+c) \geqq 60$$

a zjistěte, pro která taková čísla a, b, c nastane rovnost.

(*Jaromír Šimša*)

B – II – 2

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel a, b, pro něž číslo b je dělitelné číslem a a současně číslo $3a+4$ je dělitelné číslem $b+1$.

(*Pavel Novotný*)

B – II – 3

Nechť M, N jsou po řadě vnitřní body stran AB, BC rovnostranného trojúhelníku ABC, pro něž platí $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 2 : 1$. Označme P průsečík přímek AN a CM. Dokažte, že přímky BP a AN jsou navzájem kolmé. (*Jaroslav Švrček*)

B – II – 4

Zapíšeme všechna pětimístná čísla, v nichž se každá z číslic 4, 5, 6, 7, 8 vyskytuje právě jednou. Pak jedno (libovolné z nich) škrtneme a všechna zbývající sečteme. Jaké jsou možné hodnoty ciferného součtu takového výsledku? (*Šárka Gergelitsová*)

B – I – 1

Umocněním a odečtením prvních dvou rovností dostaneme $x^2 - z^2 = (z+1)^2 - (x+1)^2$, což upravíme na $2(x^2 - z^2) + 2(x - z) = 0$ neboli

$$(x - z)(x + z + 1) = 0. \tag{1}$$

Analogicky bychom dostali další dvě rovnice, jež vzniknou z (1) cyklickou záměnou neznámých $x \to y \to z$. Vzhledem k této symetrii (daná soustava se nezmění dokonce při libovolné permutaci neznámých) stačí rozebrat jen následující dvě možnosti:

Pokud $x = y = z$, přejde původní soustava v jedinou rovnici $\sqrt{2x^2} = x + 1$, jež má dvě řešení $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Každá z trojic $\big(1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}\big)$ je zřejmě řešením i původní soustavy.

Pokud jsou naopak některá dvě z čísel x, y, z různá, například $x \neq z$, plyne z (1) rovnost $x + z = -1$. Dosazením $x + 1 = -z$ do druhé rovnice soustavy dostáváme $y = 0$ a poté ze třetí rovnice vyjde $x^2 + (x+1)^2 = 1$ neboli $x(x + 1) = 0$. Poslední rovnice tak má dvě řešení $x = 0$ a $x = -1$, jimž odpovídají $z = -1$ a $z = 0$. Snadno ověříme, že obě nalezené trojice $(0, 0, -1)$ a $(-1, 0, 0)$ jsou řešením dané soustavy stejně jako trojice $(0, -1, 0)$, kterou dostaneme jejich permutací.

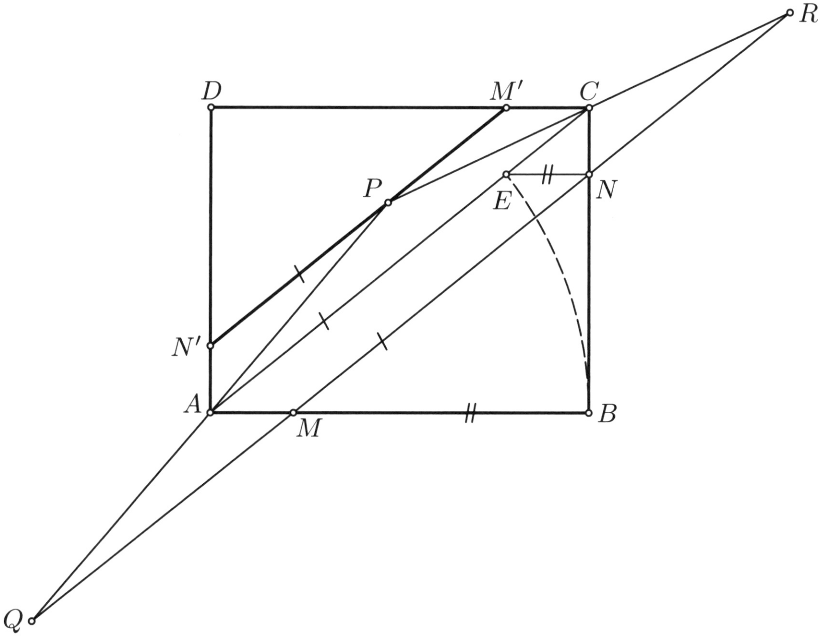
Daná soustava má celkem pět řešení:

$$(0, 0, -1),\ (0, -1, 0),\ (-1, 0, 0),$$
$$\big(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\big) \quad \text{a} \quad \big(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\big).$$

B – I – 2

Úhlopříčka AC daného obdélníku $ABCD$ je ze zadání střední příčkou v trojúhelníku PQR, a tedy $AC \parallel QR$, jinak řečeno $AC \parallel MN$. Úsečka MN je tak jednoznačně určena tím, že je rovnoběžná s AC, leží v opačné polorovině určené přímkou AC než bod P a pro její délku platí $|MN| = |AB|$. Konstrukci bodů M a N lze provést několika způsoby. Lze k tomu například využít rovnoběžník $AMNE$ (obr. 7), v němž platí $|AE| = |MN| = |AB|$.

Protože úsečka MN zároveň určuje přímku, na níž leží strana QR trojúhelníku PQR, je zřejmé, že vrchol P musí ležet na přímce p, jež je



Obr. 7

obrazem přímky MN v osové souměrnosti podle přímky AC (obsahující střední příčku trojúhelníku PQR). Přímka p má s vnitřkem daného obdélníku společný vnitřek úsečky $M'N'$ (jež je navíc obrazem nalezené úsečky MN ve středové souměrnosti podle středu daného obdélníku).

Snadno vidíme, že i naopak ke každému vnitřnímu bodu P úsečky $M'N'$ leží odpovídající body Q, R na přímce MN a body M, N jsou tak průsečíky přímky QR se stranami AB, BC, takže vyhovují podmínkám úlohy.

Závěr. Hledanou množinou všech bodů P dané vlastnosti je tedy vnitřek výše popsané úsečky $M'N'$.

B – I – 3

Jistě stačí ukázat, že součet zkoumaných tří čísel nepřevyšuje 24:

$$(ab + bc) + (bc + ca) + (ca + ab) = 2(ab + bc + ca) \leqq \frac{2}{3}(a + b + c)^2 = 24,$$

kde nerovnost je důsledkem nerovnosti

$$3(ab + bc + ca) \leqq (a + b + c)^2 = 36,$$

která je ekvivalentní nerovnosti $0 \leqq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, jež je splněna pro každá tři reálná a, b, c.

Jiné řešení. S ohledem na symetrii předpokládejme, že platí $a = \min\{a,b,c\}$. Z rovnosti $a+b+c=6$ pak plyne $a \leqq 2$ a $b+c \geqq 4$. Proto třetí zkoumané číslo, rovné $a(b+c)$, má stejné znaménko jako číslo a, takže je zaručeně menší než 8, platí-li $a \leqq 0$. Je-li naopak $0 < a \leqq 2$, všimneme si, že ze zřejmé nerovnosti $0 \leqq (u-v)^2$, platné pro libovolná reálná u, v, plyne úpravou odhad $4uv \leqq (u+v)^2$; dosadíme-li sem $u = 2a$ a $v = b+c$, dostaneme

$$8a(b+c) \leqq (2a+b+c)^2 = (a+6)^2 \leqq 8^2 = 64,$$

odkud po dělení osmi vychází kýžená nerovnost $a(b+c) \leqq 8$.

B – I – 4

Zlomek

$$\frac{n^3 + 2\,010}{n^2 + 2\,010} = n - \frac{2\,010(n-1)}{n^2 + 2\,010}$$

je celé číslo, právě když $n^2 + 2\,010$ je dělitel čísla $2\,010(n-1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67(n-1)$.

Není-li n násobek prvočísla 67, jsou čísla $n^2 + 2\,010$ a 67 nesoudělná, proto $n^2 + 2\,010$ musí být dělitelem čísla $30(n-1)$. Protože $|30(n-1)| < n^2 + 2\,010$, vyhovuje jenom $n = 1$.

Nechť $n = 67m$, kde m je celé. Potom

$$\frac{2\,010(n-1)}{n^2 + 2\,010} = \frac{30(67m-1)}{67m^2 + 30}.$$

Není-li m násobkem pěti, musí být číslo $67m^2 + 30$ dělitelem čísla $6(67m-1)$. Pro $|m| \leqq 4$ tomu tak ale není, zatímco pro $|m| \geqq 6$ je už $|6(67m-1)| < 67m^2 + 30$. Je tedy $m = 5k$, kde k je celé. Potom

$$\frac{30(67m-1)}{67m^2 + 30} = \frac{6(335k-1)}{335k^2 + 6}.$$

Pro $|k| \geqq 7$ je absolutní hodnota tohoto zlomku nenulová a menší než 1. Ze zbylých čísel vyhovují $k = 0$ a $k = -6$.

Číslo

$$\frac{n^3 + 2\,010}{n^2 + 2\,010}$$

je tedy celé, právě když je celé n některé z čísel $0, 1$ nebo $-2\,010$.

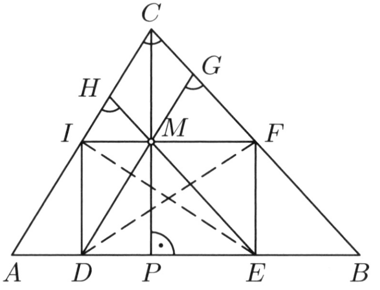
B – I – 5

I když doporučujeme řešit obě části úlohy odděleně (tj. nejprve analyzovat situaci v pravoúhlém trojúhelníku), popíšeme rovnou jejich společné řešení. Celou úlohu lze totiž formulovat jako důkaz tvrzení, že sestrojených šest bodů leží na kružnici, právě když je úhel ACB pravý.

Uvažujme tedy libovolný trojúhelník ABC s ostrými úhly α, β a označme M střed výšky CP a D, E, F, G, H, I uvažované průsečíky tak, aby s vrcholy A, B, C a patou výšky P ležely na hranici trojúhelníku v pořadí

$$A,\ D,\ P,\ E,\ B,\ F,\ G,\ C,\ H,\ I.$$

Z konstrukce plyne, že body M, D, I jsou středy stran pravoúhlého trojúhelníku ACP a body M, E, F jsou středy stran pravoúhlého trojúhelníku BCP. Oba čtyřúhelníky $PMID$ a $PMFE$ jsou tedy pravoúhelníky, takže i $DEFI$ je pravoúhelník (obr. 8). Jeho vrcholy D, E, F, I proto *vždy* leží na jedné kružnici a úsečky DF a EI jsou její průměry. Naší úlohou je proto zjistit, kdy na této kružnici leží i body G a H. To lze podle Thaletovy věty vyjádřit podmínkou, že úhly DGF a EHI jsou pravé. Protože $DG \parallel AC$ a $EH \parallel BC$, jsou oba úhly DGF a EHI shodné s úhlem ACB a ekvivalence s podmínkou pravého úhlu ACB je tak dokázána.



Obr. 8

B – I – 6

Nechť n je číslo splňující podmínky zadání. Škrtnutím dvou posledních číslic zmenšíme n alespoň stokrát, proto se můžeme omezit na škrtání číslic, které nejsou poslední. Po škrtnutí dvou sousedních číslic zůstanou z čísla n dvě části, přitom první část může být prázdná, pokud jsme škrtli jeho první dvě číslice.

Nechť a je číslo určené první částí čísla n (nula v případě, že první část je prázdná), b je číslo určené vyškrtnutými dvěma číslicemi a c je určeno poslední částí čísla n (počet číslic této části označme k). Podle zadání platí

$$99(a \cdot 10^k + c) = a \cdot 10^{k+2} + b \cdot 10^k + c,$$

po úpravě $98c = 10^k(a+b)$. Protože $c < 10^k$, musí být $98 > a+b$. Navíc číslo 49 dělí $a+b$, neboť je samo nesoudělné s 10^k. Kladný celočíselný podíl $(a+b)/49$ je menší než 2, musí tedy být roven 1, takže $a+b = 49$. Odtud vyplývá rovnost

$$c = \frac{10^k}{2} = 5 \cdot 10^{k-1},$$

kde číslo k je zároveň určeno počtem číslic čísla a (označíme-li l počet číslic čísla a, je $k = 10-l-2$, přičemž v případě $a = 0$ klademe přirozeně $l = 0$).

Z uvedeného postupu plyne, že pro každé $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 49\}$ a $b = 49 - a$ existuje právě jedno číslo c, pro něž popsané číslo n splňuje podmínky zadání, a že jiná vyhovující n neexistují. Ukážeme, že všech 50 takových n (končících sedmi, šesti, nebo pěti nulami) je navzájem různých.

Sestrojené n končící sedmi nulami je jediné ($a = 0$). Šesti nulami končí 9 sestrojených čísel ($a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$) a jsou navzájem různá, neboť začínají různými číslicemi. Pěti nulami končí 40 sestrojených čísel ($a \in \{10, 11, \ldots, 49\}$) a jsou navzájem různá, neboť začínají různými dvojčíslími.

Pro názornost vypišme ještě několik čísel vyhovujících zadání tak, jak je dostaneme pomocí našich úvah: pro $a = 0$ máme $b = 49$, $c = 50\,000\,000$ a $n = 4\,950\,000\,000$, pro $a = 1$ je $b = 48$, $c = 5\,000\,000$ a $n = 1\,485\,000\,000$, pro $a = 2$ je $n = 2\,475\,000\,000$, …, pro $a = 9$ je $n = 9\,405\,000\,000$, pro $a = 10$ je $b = 39$, $c = 500\,000$ a $n = 1\,039\,500\,000$, …, pro $a = 49$ je $b = 0$, $c = 500\,000$ a $n = 4\,900\,500\,000$.

Závěr. Existuje 50 čísel, jež vyhovují zadání.

B – S – 1

Aby byla levá strana rovnice definována, musejí být oba výrazy pod odmocninami nezáporné, což je splněno právě pro všechna $x \geqq 0$. Pro nezáporná x je pak $p = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \geqq \sqrt{3}$, rovnice může tedy mít řešení pouze pro $p \geqq \sqrt{3}$.

Upravme nyní danou rovnici:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{x+3} &= p, \\
2x + 3 + 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2, \\
2\sqrt{x(x+3)} &= p^2 - 2x - 3, \\
4x(x+3) &= (p^2 - 2x - 3)^2, \\
4x^2 + 12x &= p^4 + 4x^2 + 9 - 4p^2x - 6p^2 + 12x, \\
x &= \frac{(p^2-3)^2}{4p^2}.
\end{aligned}
$$

Protože jsme danou rovnici umocňovali na druhou, je nutno se přesvědčit zkouškou, že vypočtené x je pro hodnotu parametru $p \geqq \sqrt{3}$ řešením původní rovnice:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2} + 3} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} = \\
&\quad = \sqrt{\frac{p^4 - 6p^2 + 9 + 12p^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} = \\
&\quad = \sqrt{\frac{(p^2+3)^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} = \frac{p^2+3}{2p} + \frac{p^2-3}{2p} = p.
\end{aligned}
$$

Při předposlední úpravě jsme využili podmínku $p \geqq \sqrt{3}$ (a tedy i $p^2 - 3 \geqq 0$ a $p > 0$), takže $\sqrt{(p^2-3)^2} = p^2 - 3$ a $\sqrt{4p^2} = 2p$.

Poznámka. Místo zkoušky stačí ověřit, že pro nalezené x jsou všechny umocňované výrazy nezáporné, tedy vlastně jen že

$$
p^2 - 2x - 3 = \frac{(p^2-3)(p^2+3)}{2p^2} \geqq 0.
$$

Pro $p \geqq \sqrt{3}$ tomu tak opravdu je.

B – S – 2

a) Mezi 16 čísly napsanými podél kružnice se nachází právě 16 úseků pěti sousedních čísel (vybereme-li libovolně jedno z napsaných čísel a od něj označíme čísla podél kružnice postupně jako první, druhé, ..., šestnácté, bude první úsek tvořen prvním až pátým číslem, druhý úsek pak druhým až šestým číslem, ... a poslední šestnáctý úsek bude tvořen šestnáctým, prvním, druhým, třetím a čtvrtým číslem).

Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že uvažované tvrzení neplatí, tedy že čísla v každém z 16 úseků mají součet menší než 2. Celkový součet S_5 všech 16 součtů čísel v jednotlivých pěticích je tak menší než $16 \cdot 2 = 32$. Ovšem každé číslo na kružnici je součástí právě pěti úseků pěti sousedních čísel, tudíž každé z 16 čísel je v uvedeném součtu započteno právě pětkrát. Proto je součet S_5 zároveň roven pětinásobku součtu všech čísel na kružnici, což je 35. To je ve sporu s odvozenou nerovností $S_5 < 32$. Na kružnici tedy musí existovat pět po sobě jdoucích čísel, jejichž součet je alespoň 2 (dokonce více než 2).

b) Nejprve ukažme, že nemůže být $k \leqq 6$. K tomu stačí podél kružnice rozmístit 16 shodných čísel se součtem 7. Součet čísel v libovolném úseku k čísel tak bude

$$k \cdot \frac{7}{16} \leqq \frac{42}{16} < 3.$$

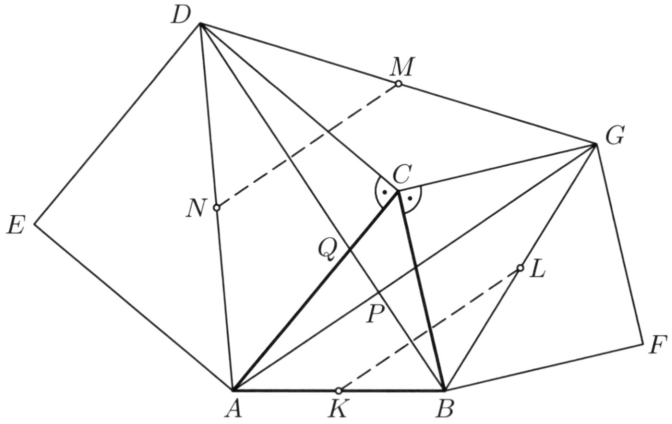
Nechť nyní $k = 7$. Zopakováním úvahy z části a) dokážeme, že vhodný úsek už existuje: Předpokládejme naopak, že součet libovolných sedmi po sobě jdoucích čísel (z daných šestnácti) je menší než tři. Takových úseků je podél kružnice šestnáct (jejich počet na čísle k nezávisí!), takže součet S_7 všech 16 součtů čísel v jednotlivých sedmicích je menší než $16 \cdot 3 = 48$. Každé z daných 16 čísel je v součtu S_7 započteno sedmkrát, tedy $S_7 = 7 \cdot 7 = 49$, což odporuje předchozímu odhadu $S_7 < 48$.

Hledaným číslem k je číslo 7.

B – S – 3

Protože oba úhly BCG a DCA jsou pravé, uvažujme otočení kolem vrcholu C daného trojúhelníku, v němž bod B přejde do bodu G. V něm je zřejmě obrazem bodu D bod A a obrazem úsečky BD úsečka GA (obr. 9). Odtud plyne, že $|AG| = |BD|$, a také, že úsečky AG a BD jsou navzájem kolmé.

Označme po řadě K, L, M, N středy stran čtyřúhelníku $ABGD$. (Body N a L jsou tedy středy uvažovaných čtverců.) Vzhledem k tomu, že úsečka KL je střední příčkou trojúhelníku AGB a úsečka MN střední příčkou trojúhelníku AGD, je $|KL| = \frac{1}{2}|AG| = |KL|$ a zároveň $MN \parallel$ $\parallel AG \parallel KL$. Podobně $|KN| = \frac{1}{2}|BD| = |LM|$ a zároveň $KN \parallel BD \parallel$



Obr. 9

$\parallel LM$. To znamená, že $KLMN$ je rovnoběžník. Protože však víme, že $|AG| = |BD|$ a navíc $AG \perp BD$, je $KLMN$ čtverec. Tím jsou všechna tvrzení úlohy dokázána.

Jiné řešení. Úlohu vyřešíme bez úvahy o otočení. Pro důkaz rovnosti $|AG| = |BD|$ ukážeme, že trojúhelníky ACG a DCB jsou shodné podle věty *sus*. Skutečně, $|AC| = |DC|$, $|CG| = |CB|$ a $|\sphericalangle ACG| = |\sphericalangle ACB| +$ $+ |\sphericalangle BCG| = |\sphericalangle ACB| + 90° = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB|$.

Úsečky AG a BD jako strany shodných trojúhelníků tedy mají stejnou délku. Abychom ověřili, že jsou navíc navzájem kolmé, označíme P jejich průsečík a porovnáme vnitřní úhly v trojúhelnících APQ a DCQ, kde Q je průsečík úseček AC a BD. Při vrcholech A a D jsou úhly shodné díky ověřené shodnosti trojúhelníků ACG a DCB, úhly při vrcholu Q se rovněž shodují (jakožto úhly vrcholové), takže se shodují i jejich úhly při vrcholech P a C, jsou tedy oba pravé.

Z dokázané shodnosti i kolmosti úseček AG a BD odvodíme, že $KLMN$ je čtverec stejně jako v původním řešení.

Poznámka. Poznamenejme ještě, že jsme vlastně ukázali, že středy stran libovolného konvexního čtyřúhelníku tvoří vrcholy rovnoběžníku, jehož strany jsou rovnoběžné s úhlopříčkami daného čtyřúhelníku. Tomuto rovnoběžníku se říká Varignonův rovnoběžník. Je tedy čtyřúhelník $KLMN$ Varignonův rovnoběžník čtyřúhelníku $ABGD$.

B – II – 1

Pomocí rovností $abc=60$, $a+b+c=15$ daný výraz $(a+b)(a+c)$ upravíme a pak odhadneme na základě AG-nerovnosti pro dvojici hodnot a a $4/a$:

$$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc=a^2+(15-a)\cdot a+\frac{60}{a}=$$
$$=15a+\frac{60}{a}=15\Big(a+\frac{4}{a}\Big)\geqq 15\cdot 2\cdot\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=60.$$

Nerovnost je dokázána. Rovnost nastane, právě když $a=4/a$ neboli $a=2$. Ze vztahů $b+c=15-a=13$ a $bc=60/a=30$ máme $\{b,c\}=\{3,10\}$. Rovnost proto splňují právě dvě vyhovující trojice (a,b,c), a to $(2,3,10)$ a $(2,10,3)$.

Jiné řešení. Kromě rovností $abc=60$, $a+b+c=15$ využijeme AG-nerovnost pro dvojici hodnot bc a $a(a+b+c)$:

$$(a+b)(a+c)=bc+a(a+b+c)\geqq$$
$$\geqq 2\cdot\sqrt{bc\cdot a(a+b+c)}=2\sqrt{60\cdot 15}=60.$$

Rovnost nastane, právě když $bc=a(a+b+c)$ neboli $60/a=15a$, odkud $a=2$, takže závěr je stejný jako v prvním řešení.

B – II – 2

Protože číslo a dělí číslo b, lze psát $b=ka$, kde k je kladné celé číslo. Stačí tedy najít kladná celá čísla a, pro která existuje kladné celé číslo k takové, že číslo $3a+4$ je (kladným) násobkem čísla $ka+1$ $(=b+1)$. Z této podmínky dostáváme nerovnost $ka+1\leqq 3a+4$, z níž plyne $k-3\leqq(k-3)a\leqq 3$, a tedy $k\leqq 6$. Navíc pro $k\geqq 3$ je už $2(ka+1)>3a+4$ pro libovolné $a\geqq 1$, takže může být jedině $ka+1=3a+4$. Probereme všech šest možností pro číslo k:

$k=1$: $a+1\mid 3a+4$, a protože $a+1\mid 3a+3$, muselo by platit $a+1\mid 1$, což není možné, neboť $a+1>1$.

$k=2$: $2a+1\mid 3a+4=(2a+1)+(a+3)$, tedy $2a+1\mid a+3$. Protože však pro libovolné přirozené a platí $2\cdot(2a+1)>a+3$, musí být $2a+1=a+3$ neboli $a=2$ a odtud $b=ka=4$.

$k=3$: $3a+1=3a+4$, což není možné.

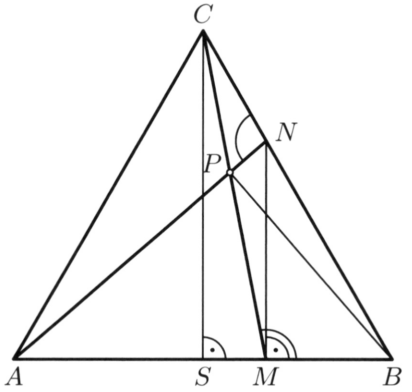
$k=4$: $4a+1=3a+4$, tedy $a=3$, $b=12$.

$k = 5$: $5a + 1 = 3a + 4$, což nesplňuje žádné celé a.
$k = 6$: $6a + 1 = 3a + 4$, tedy $a = 1$, $b = 6$.

Řešením jsou dvojice $(1, 6)$, $(2, 4)$ a $(3, 12)$.

B – II – 3

Ze zadání plyne, že $|BM| = |CN|$, $|AC| = |BC|$ a $|\sphericalangle ACN| = |\sphericalangle CBM| = 60^\circ$, takže trojúhelníky ACN a CBM jsou shodné podle věty *sus*. Proto platí i $|\sphericalangle ANC| = |\sphericalangle CMB|$, takže čtyřúhelník $BNPM$ je tětivový (úhel ANC je doplňkovým úhlem k úhlu ANB, který je protějším úhlem k úhlu CMB ve zmíněném čtyřúhelníku, obr. 10).



Obr. 10

Označme S střed strany AB daného rovnostranného trojúhelníku ABC. Protože $|SB| = \frac{1}{2}|AB|$, je $|SB| : |MB| = 3 : 2$, a protože je i $|CB| : |NB| = 3 : 2$, jsou trojúhelníky SBC a MBN podobné podle věty *sus*. Protože úhel CSB je pravý, musí být pravý i úhel NMB. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $BNPM$ je tak Thaletovou kružnicí nad průměrem BN, a tudíž je pravý i úhel BPN, což jsme chtěli dokázat.

B – II – 4

Výsledný ciferný součet je určen jednoznačně a je jím číslo 33.

Pro vyřešení úlohy bude výhodné nejprve zjistit součet S všech pětimístných čísel obsahujících každou z číslic 4, 5, 6, 7, 8. Těchto čísel je zřejmě právě tolik, kolik je různých pořadí uvedených pěti číslic, tedy $5! = 120$. Navíc každá z daných číslic se mezi těmito 120 čísly objevuje rovnoměrně v každém řádu, tedy 24krát. Součet S tak můžeme rozepsat po jednotlivých řádech jako

$$\begin{aligned} S &= 10^4 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \\ &\quad + 10^3 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \ldots = \\ &= 24 \cdot (4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = \\ &= 24 \cdot 30 \cdot 11\,111. \end{aligned}$$

Obraťme nyní pozornost k možným hodnotám ciferného součtu čísla $S - a$, kde a je pětimístné číslo zmíněného tvaru, tedy $a = 33\,333 + b$, přičemž b je pětimístné číslo obsahující každou z číslic 1, 2, 3, 4, 5. Je tedy

$$S - a = 11\,111 \cdot 24 \cdot 30 - a = 7\,999\,920 - 33\,333 - b = 7\,966\,587 - b.$$

Při odečítání čísla b však nedochází v jednotlivých řádech k přechodu přes desítku, proto je ciferný součet čísla $S - a$ roven $(7+9+6+6+5+ + 8 + 7) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 48 - 15 = 33$ pro libovolné pětimístné číslo a obsahující každou z číslic 4, 5, 6, 7, 8.