60. ročník Matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Zdeněk Dvořák (editor); Zbyněk Falt (editor); Karel Horák (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 60. ročník Matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2010/2011. 52. Mezinárodní matematická olympiáda. 5. Středoevropská matematická olympiáda. 23. Mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. pp. 58–99.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405214

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Kořeny rovnice $ax^4 + bx^2 + a = 1$ v oboru reálných čísel jsou čtyři po sobě jdoucí členy rostoucí aritmetické posloupnosti. Přitom jeden z těchto členů je zároveň řešením rovnice $bx^2 + ax + a = 1$. Určete všechny možné hodnoty reálných parametrů a, b. (*Peter Novotný*)

A – I – 2

Nechť k, n jsou přirozená čísla. Z platnosti tvrzení „číslo $(n-1)(n+1)$ je dělitelné číslem k" Adam usoudil, že buď číslo $n-1$, nebo číslo $n+1$ je dělitelné k. Určete všechna přirozená čísla k, pro něž je Adamova úvaha správná pro každé přirozené n. (*Ján Mazák*)

A – I – 3

Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL. (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Mějme $6n$ žetonů až na barvu shodných, po třech od každé z $2n$ barev. Pro každé přirozené číslo $n > 1$ určete počet p_n všech rozdělení takových $6n$ žetonů na dvě hromádky po $3n$ žetonech, kdy žádné tři žetony téže barvy nejsou ve stejné hromádce. Dokažte, že p_n je liché číslo, právě když $n = 2^k$ pro vhodné přirozené k. (*Jaromír Šimša*)

A – I – 5

Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. (*Peter Novotný*)

A – I – 6

Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC s ostrým úhlem při vrcholu C (při obvyklém označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů) platí nerovnost

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \leqq 2ab.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. (*Jaromír Šimša*)

A – S – 1

Určete všechna reálná čísla c, pro která má rovnice

$$x^2 + \frac{5}{2}x + c = 0$$

dva reálné kořeny, jež lze s číslem c uspořádat do trojčlenné aritmetické posloupnosti. (*Pavel Calábek, Jaroslav Švrček*)

A – S – 2

Nechť P, Q, R jsou body přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, pro něž platí $|AP| = |PQ| = |QR| = |RB| = \frac{1}{4}|AB|$. Dokažte, že průsečík M kružnic opsaných trojúhelníkům APC a BRC, který je různý od bodu C, splývá se středem S úsečky CQ. (*Peter Novotný*)

A – S – 3

Dokažte, že pro libovolná dvě různá prvočísla p, q větší než 2 platí nerovnost

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right| > \frac{4}{\sqrt{pq}}.$$

(*Jaromír Šimša*)

A – II – 1

Rozhodněte, zda mezi všemi osmimístnými násobky čísla 4 je více těch, které ve svém desítkovém zápisu obsahují číslici 1, nebo těch, které číslici 1 neobsahují. (*Ján Mazák*)

A – II – 2

Je dán trojúhelník ABC s obsahem S. Uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC, je libovolně zvolen bod U. Označme A', B', C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U. Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

(*Pavel Leischner*)

A – II – 3

Určete všechny dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro něž je číslo $4(mn + 1)$ dělitelné číslem $(m + n)^2$. (*Tomáš Jurík*)

A – II – 4

Nechť M je množina šesti navzájem různých kladných celých čísel, jejichž součet je 60. Všechna je napíšeme na stěny krychle, na každou právě jedno z nich. V jednom kroku zvolíme libovolné tři stěny krychle, které mají společný vrchol, a každé z čísel na těchto třech stěnách zvětšíme o 1. Určete počet všech takových množin M, jejichž čísla lze napsat na stěny krychle uvedeným způsobem tak, že po konečném počtu vhodných kroků budou na všech stěnách stejná čísla. (*Peter Novotný*)

A – III – 1

Určete velikosti vnitřních úhlů všech trojúhelníků ABC s vlastností: Uvnitř stran AB, AC existují po řadě body K, M, které s průsečíkem L přímek MB a KC tvoří tětivové čtyřúhelníky $AKLM$ a $KBCM$ se shodnými opsanými kružnicemi. (*Jaroslav Švrček*)

A – III – 2

Určete všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí

$$(p + 1)(q + 2)(r + 3) = 4pqr.$$

(*Jaromír Šimša*)

A – III – 3

Reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě rovnic

$$x + y + z = 12, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že platí následující tvrzení:

a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25.

b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5.

(*Jaromír Šimša*)

A – III – 4

Uvažujme kvadratický trojčlen $P(x) = ax^2 + bx + c$ s reálnými koeficienty $a \geqq 2$, $b \geqq 2$, $c \geqq 2$. Adam a Boris hrají následující hru: Je-li na tahu Adam, vybere jeden z koeficientů trojčlenu a nahradí ho *součtem* zbylých dvou. Pokud je na tahu Boris, vybere jeden z koeficientů a nahradí ho *součinem* zbylých dvou. Adam začíná a hráči se pravidelně střídají. Hru vyhrává ten, po jehož tahu má rovnice $P(x) = 0$ dva různé reálné kořeny. Určete, který z hráčů má vítěznou strategii v závislosti na počátečním trojčlenu $P(x)$. (*Michal Rolínek*)

A – III – 5

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OV. (*Karel Horák*)

A – III – 6

Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)\, f(y) = f(y)\, f(x\, f(y)) + \frac{1}{xy}.$$

(*Pavel Calábek*)

A – I – 1

Vzhledem k tomu, že rostoucí aritmetickou posloupnost tvoří čtyři navzájem různá reálná čísla, musí mít první z daných rovnic čtyři různé reálné kořeny. Je proto $a \neq 0$.

Označme x_0 společný kořen obou rovnic. Pak je x_0 také kořenem rovnice, která vznikne odečtením druhé z daných rovnic od první, tj. rovnice $ax^4 - ax = 0$. Tu dále upravíme na tvar $ax(x^3 - 1) = 0$. Pro společný reálný kořen x_0 obou daných rovnic odtud plyne $x_0 = 0$ nebo $x_0 = 1$.

Dosazením $x_0 = 0$ do první z daných rovnic dostaneme $a = 1$, takže tato rovnice je tvaru $x^4 + bx^2 = 0$. Tato rovnice však pro žádné reálné číslo b nemá čtyři různé reálné kořeny (číslo 0 je jejím alespoň dvojnásobným kořenem), proto $x_0 \neq 0$.

Jediným společným kořenem obou rovnic je tudíž $x_0 = 1$. Dosazením této hodnoty do kterékoli z obou daných rovnic dostaneme $b = 1 - 2a$. První rovnici pak lze zapsat ve tvaru $ax^4 + (1-2a)x^2 + a - 1 = 0$, z něhož je patrné, že má i kořen -1, a po vytknutí součinu kořenových činitelů $(x-1)(x+1)$ dostaneme rovnici

$$(x-1)(x+1)(ax^2 - a + 1) = 0. \tag{1}$$

Kvadratický dvojčlen $ax^2 - (a-1)$ má mít dva různé kořeny, kterými musí být dvě navzájem opačná (nenulová) čísla ξ a $-\xi$. To je splněno, právě když $(a-1)/a > 0$, tj. právě když $a > 1$ nebo $a < 0$. Volíme-li značení tak, že $\xi > 0$, dostáváme pro aritmetickou posloupnost všech čtyř kořenů dvě možnosti podle toho, zda je $0 < \xi < 1$ nebo $\xi > 1$.

V prvním případě tvoří čtyři kořeny rovnice (1) aritmetickou posloupnost $-1, -\xi, \xi, 1$, která má zřejmě diferenci $\frac{2}{3}$, proto $\xi = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Toto číslo ξ je kořenem rovnice (1), právě když $a = 1/(1-\xi^2) = \frac{9}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = -\frac{5}{4}$.

V druhém případě tvoří čtyři kořeny rovnice (1) aritmetickou posloupnost $-\xi, -1, 1, \xi$ s diferencí 2, proto $\xi = 1 + 2 = 3$. Číslo 3 je kořenem rovnice (1), právě když $a = 1/(1-3^2) = -\frac{1}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = \frac{5}{4}$.

Závěr. Úloze vyhovují právě dvě dvojice reálných čísel (a, b), a to

$$(a,b) \in \left\{ \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{9}{8}, -\frac{5}{4}\right) \right\}.$$

A – I – 2

Ukážeme, že pro nesoudělná přirozená čísla r a s, kde $r > 2$ a $s > 2$, existuje přirozené číslo n s vlastností

$$r \mid n-1 \quad \text{a} \quad s \mid n+1.$$

Pro takové číslo n a číslo $k = rs$ není Adamova úvaha správná, protože z předpokladu, že číslo k dělí číslo $(n-1)(n+1)$, neplyne, že k dělí $n-1$ ani že k dělí $n+1$. Kdyby totiž $k = rs$ dělilo např. $n-1$, dělilo by číslo s obě čísla $n+1$ i $n-1$, což vzhledem k rovnosti $(n+1)-(n-1) = 2$ není možné, neboť $s > 2$.

Existenci čísla n z první věty řešení dokážeme tak, že uvážíme s čísel

$$2,\ r+2,\ 2r+2,\ \dots,\ (s-1)r+2.$$

Ta dávají při dělení číslem s vesměs různé zbytky. Kdyby totiž některá dvě z nich, řekněme $ir+2$ a $jr+2$ $(0 \leqq i < j \leqq s-1)$, dávala při dělení číslem s stejný zbytek, potom by číslo s dělilo i jejich rozdíl $(i-j)r$, a vzhledem k nesoudělnosti čísel r a s tudíž i rozdíl $i-j$, což není možné, protože $|i-j| < s$. Uvedených s čísel tedy dává úplnou soustavu zbytků modulo s, proto mezi nimi existuje číslo, které při dělení číslem s dává zbytek 0, nechť je to číslo $lr+2$. Potom ovšem pro číslo $n = lr+1$ platí, že r dělí $n-1$ a s dělí $n+1$.

Uvědomme si, že každé číslo k dělitelné dvěma lichými prvočísly se dá zapsat jako součin dvou nesoudělných čísel větších než 2. Adamova úvaha může být tedy správná pouze pro ta čísla k, která jsou dělitelná nejvýše jedním lichým prvočíslem. To znamená, že číslo k má jeden z následujících tří tvarů:

$$k = 2^s, \quad k = p^t, \quad k = 2p^t,$$

kde p je liché prvočíslo, s celé nezáporné a t přirozené číslo.

Nechť $k = 2^s$, kde s je celé nezáporné číslo. Pro $s = 0$ není Adamova úvaha správná, protože číslo $k = 2^0 = 1$ dělí každé přirozené číslo, tedy dělí obě čísla $n-1$ i $n+1$. Pro $s = 1$ také není Adamova úvaha správná, protože pokud $k = 2^1 = 2$ dělí číslo $(n-1)(n+1)$, je jeden z činitelů sudý, ale pak je sudý i druhý činitel. Pro číslo $s = 2$, tedy pro $k = 2^2 = 4$ Adamova úvaha správná je. Pokud totiž 4 dělí číslo $(n-1)(n+1)$, je aspoň jeden z obou činitelů sudý, takže jde o dvě po sobě jdoucí *sudá* čísla, z nichž právě jedno je dělitelné čtyřmi. Konečně pro libovolné $s \geqq 3$ Adamova úvaha správná není, stačí vzít číslo $n = 2^{s-1} - 1$.

Nechť $k = p^t$, kde p je liché prvočíslo a t přirozené číslo. Potom je Adamova úvaha správná, jelikož obě čísla $n-1$ a $n+1$ nemohou být současně dělitelná stejným lichým prvočíslem p, a proto je právě jedno z nich dělitelné číslem $p^t = k$.

Nechť $k = 2p^t$, kde p je liché prvočíslo a t přirozené číslo. Potom je Adamova úvaha také správná: obě čísla $n-1$ a $n+1$ jsou nutně sudá a přitom nemohou být současně dělitelná stejným lichým prvočíslem p, proto je právě jedno z nich dělitelné číslem $2p^t = k$.

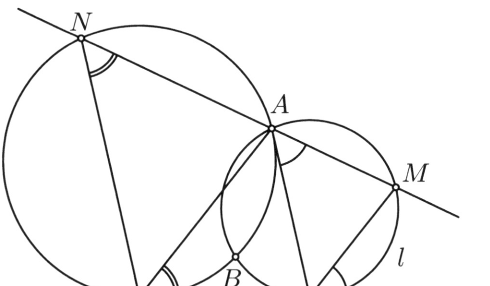
Závěr. Adamova úvaha je správná pro každé přirozené číslo n pouze pro přirozená čísla k jednoho z tvarů

$$k = 4, \quad k = p^t, \quad k = 2p^t,$$

kde p je liché prvočíslo a t přirozené číslo.

A – I – 3

Z rovnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného tětivě AK kružnice k plyne (obr. 11) $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle LKA|$ a podobně z rovnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného tětivě AL kružnice l plyne $|\sphericalangle VLM| = |\sphericalangle LAM|$, kde jsme jako V označili nějaký bod polopřímky opačné k polopřímce LK.



Obr. 11

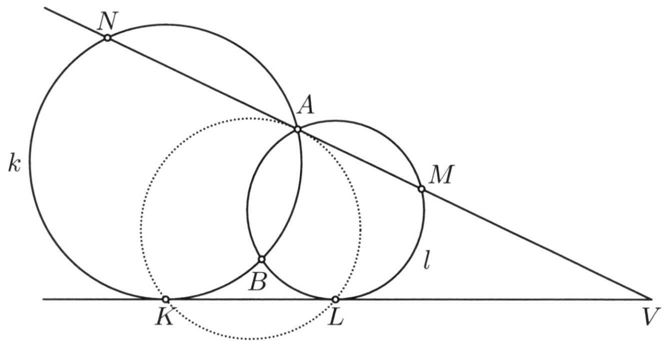
Čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle VLM|$ neboli $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LAM|$. Poslední rovnost ovšem platí, právě když je LAM úsekovým úhlem příslušným obvodovému úhlu LKA tětivy LA kružnice opsané trojúhelníku AKL, tedy právě když je přímka MN tečnou této kružnice.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Vyřešme úlohu nejprve za předpokladu, že přímky KL a MN jsou rovnoběžné. V takovém případě jsou zřejmě oba trojúhelníky ANK a MAL rovnoramenné, protože osy stran AN, resp. MA procházejí odpovídajícím vrcholem K, resp. L (jinak bodem dotyku tečny rovnoběžné s tětivou AN, resp. MA kružnice k, resp. l). Je tedy $|LA| = |LM|$ a $|KN| = |KA|$. Přitom čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když je to rovnoramenný lichoběžník, tj. $|LM| = |KN|$. To podle předchozí dvojice rovností nastane, právě když je trojúhelník KLA rovnoramenný neboli právě když MN je tečnou jeho kružnice opsané ve vrcholu proti základně KL. (Vzhledem k tomu, že pak jsou trojúhelníky ANK a MAL shodné, uvedená situace nastane, právě když jsou kružnice k, l shodné.)

Předpokládejme dále, že přímky MN a KL jsou různoběžné, a označme V jejich průsečík (obr. 12). Užitím mocnosti bodu V ke kružnicím k a l dostaneme

$$|VK|^2 = |VA| \cdot |VN| \quad \text{a} \quad |VL|^2 = |VM| \cdot |VA|.$$



Obr. 12

Vynásobením obou vztahů obdržíme

$$|VK|^2 \cdot |VL|^2 = |VN| \cdot |VA|^2 \cdot |VM|. \tag{1}$$

Čtyřúhelník $KLMN$ je ovšem tětivový, právě když platí

$$|VK| \cdot |VL| = |VN| \cdot |VM|$$

neboli — s přihlédnutím k (1) — právě když platí

$$|VK| \cdot |VL| = |VA|^2.$$

Poslední rovnost ovšem platí, právě když přímka MN (procházející bodem A) je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

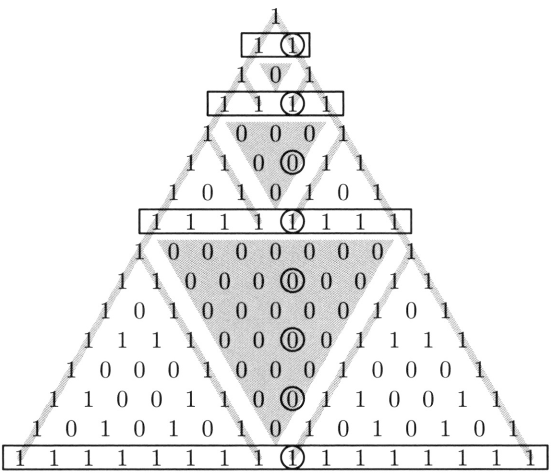
A – I – 4

Žádné tři žetony téže barvy neleží na jedné hromádce, tedy na každé z hromádek leží alespoň jeden žeton zvolené barvy. Každé vyhovující rozdělení žetonů do hromádek je pak charakterizováno tím, na které z nich leží právě jeden ze tří žetonů té které barvy.

Předpokládejme, že v jedné z hromádek je právě l barev zastoupeno jedním žetonem a zbylých $2n - l$ barev dvěma. Jednoduchým výpočtem $l + 2(2n - l) = 3n$ ovšem zjistíme, že toho lze dosáhnout jen při $l = n$. Proto je zkoumaný počet p_n roven počtu rozdělení $2n$ žetonů navzájem různých barev na dvě (neuspořádané) skupiny po n žetonech, tedy

$$p_n = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2(n!)^2} = \frac{2n \cdot (2n-1)!}{2n \cdot (n-1)!\, n!} = \binom{2n-1}{n}. \tag{1}$$

Zbývá dokázat, že poslední kombinační číslo je liché, právě když je číslo n mocninou dvou. Tento poznatek (a vlastně i metodu jeho důkazu) lze vypozorovat z dobře známého schématu všech kombinačních čísel v podobě Pascalova trojúhelníku:



V našem schématu ovšem nejsou samotná kombinační čísla, nýbrž jejich zbytky 0 či 1 při dělení dvěma. K jejich určení není nutné kombinační čísla vůbec počítat, protože z rekurentních vzorců

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ a } \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \quad (1 \leqq i \leqq n-1) \quad (2)$$

můžeme postupně po jednotlivých řádcích namísto kombinačních čísel rovnou psát jejich zbytky při dělení jakýmkoli pevným číslem, v našem případě číslem 2.

Všimněme si, co naše schéma napovídá. Některé řádky (vyznačené obdélníčky) jsou sestaveny ze samých jednotek. Díky rekurentním vzorcům (2) pod každým takovým řádkem zřejmě vznikne trojúhelník sestavený ze samých nul (tři takové trojúhelníky jsou vyznačeny šedým podtiskem) a olemovaný zleva i zprava samými jednotkami; bezprostředně pod ním opět leží řádek ze samých jedniček. Protože zbytky všech zkoumaných čísel $\binom{2n-1}{n}$ (v našem schématu vyznačených kroužky) leží v popsaných obdélníčcích nebo trojúhelnících, bude takové kombinační číslo liché, právě když bude mít pozici v některém obdélníčku.

Naše pozorování nyní popíšeme přesněji a rovnou je ověříme matematickou indukcí.

Řádky ze samých jedniček jsou právě řádky s kombinačními čísly $\binom{n-1}{i}$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$, *kde* n *je tvaru* $n = 2^k$. Tvrzení triviálně platí pro $k = 1$. Předpokládejme tedy, že platí pro nějaké $k \geqq 1$, a označme P_n prvních $n = 2^k$ řádků schématu. Dalších n řádků si můžeme představit jako tři rovnostranné trojúhelníky čísel: první a třetí s n řádky jsou téže velikosti jako P_n, mezi nimi je pak $(n-1)$-řádkový trojúhelník (vrcholem dolů), který je díky jednotkám v základně trojúhelníku P_n a rekurentním vzorcům (2) sestaven ze samých nul. Proto mají první a třetí trojúhelník jednotky nejen v horních vrcholech a na stranách ležících na hranici celého schématu, ale i na stranách, kterými se přimykají k druhému trojúhelníku, tedy na začátku i konci každého ze svých n řádků. Plyne to opět ze vzorců (2), které pak ovšem vedou k dalšímu, pro nás hlavnímu závěru: První a třetí trojúhelník jsou totožné s trojúhelníkem P_n. Můžeme tedy shrnout, že každý z $n-1$ přidaných řádků obsahuje aspoň jednu nulu, zatímco n-tý řádek (složený ze dvou n-tých řádků trojúhelníku P_n) obsahuje samé jedničky. Tvrzení tudíž platí i pro $2n = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ řádků Pascalova trojúhelníku modulo 2, tj. i pro číslo $k+1$.

Vzhledem k tomu, že zkoumané číslo $p_n = \binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ leží vždy uprostřed sudých řádků Pascalova trojúhelníku, je zřejmé, že leží buď v některém obdélníčku, anebo v některém šedém trojúhelníku, jež se postupně střídají. Číslo p_n je tedy skutečně liché, právě když n je mocnina dvou.

Jiné řešení. Počet p_n požadovaných rozdělení žetonů určíme stejně jako v původním řešení vzorcem

$$p_n = \frac{(2n)!}{2(n!)^2},$$

který dále upravíme na tvar

$$\begin{aligned} p_n &= 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)(2n)}{2(n!)^2} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^n n!}{2(n!)^2} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^{n-1}}{n!}. \end{aligned} \tag{3}$$

Pro nejvyšší mocninu 2^a, která dělí $n!$, platí

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor,$$

kde $2^m \leqq n < 2^{m+1}$ a $\lfloor x \rfloor$ značí *dolní celou část čísla* x, tedy největší celé číslo, které není větší než x. Odtud pro exponent a plyne odhad

$$a \leqq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^m} = n\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = n - \frac{n}{2^m} \leqq n - 1.$$

Z vyjádření (3) tedy vidíme, že číslo p_n je liché, právě když $a = n - 1$ neboli n je tvaru 2^m.

A – I – 5

V každém kroku se součet všech čísel na stěnách krychle zvětší o 2, jeho parita se tedy nezmění. Jsou-li na všech stěnách krychle stejná čísla, je jejich součet násobkem šesti, a je tudíž dělitelný dvěma. Nutnou podmínkou k tomu, abychom tohoto stavu dosáhli, tedy je, aby i na počátku byl součet všech čísel na stěnách krychle dělitelný dvěma.

Tato podmínka je zároveň postačující. Předpokládejme, že součet všech šesti celých čísel na stěnách krychle je na počátku dělitelný dvěma. Ukážeme, jak po určitém počtu kroků dosáhnout toho, že na všech stěnách krychle budou stejná čísla.

Označme stěny krychle $S_1, S_2, \ldots, S_6$, přičemž stěna S_1 je proti stěně S_6, stěna S_2 proti S_5 a S_3 proti S_4.[1] Krok, v němž zvětšíme čísla na stěnách S_i, S_j, budeme značit k_{ij}. A protože nás zajímá jen relativní hodnota očíslování stěn, tj. zda a o kolik se liší od nejmenší hodnoty všech šesti čísel, budeme dále pracovat jen s těmito relativními hodnotami (což budou nezáporná celá čísla s nejmenší hodnotou 0).

Posloupností kroků $k_{12}, k_{23}, k_{35}, k_{54}, k_{41}$ zajistíme, že se číslo na každé stěně kromě stěny S_6 zvětší o 2, což vzhledem k naší úmluvě vlastně znamená, že jsme (relativní) hodnotu čísla na stěně S_6 o 2 zmenšili. Podobným způsobem můžeme o 2 „zmenšit“ číslo na libovolné stěně krychle. Je tedy zřejmé, že popsaným způsobem dosáhneme toho, že (relativní) hodnoty čísel na stěnách budou jen 0 nebo 1, nula mezi nimi ovšem musí být aspoň jedna (podle významu relativních hodnot). Nyní již stačí prošetřit následující možnosti (připomeňme, že součet všech šesti čísel je sudý):

a) Na stěnách krychle jsou vesměs 0; tvrzení pak platí triviálně.

b) Na stěnách krychle jsou právě dvě 1 (na ostatních 0). Bez ohledu na to, zda jsou obě jedničky na sousedních či protilehlých stěnách, vždy můžeme rozdělit zbývající čtyři stěny s nulami na dvě dvojice sousedních stěn a ve dvou krocích zvětšit jejich čísla o 1.

c) Na stěnách krychle jsou právě čtyři 1 (na zbývajících dvou stěnách jsou 0). Tento případ vyřešíme tak, že nejprve snížíme (způsobem popsaným výše) hodnotu každé stěny s jedničkou o dva, čímž ovšem (v relativních hodnotách) dostaneme přesně situaci popsanou v b).

Závěr. Dosáhnout toho, že po konečném počtu kroků budou na všech stěnách krychle napsána stejná čísla, lze, právě když je součet (celých) čísel na všech šesti stěnách krychle dělitelný dvěma.

Poznámka. Část c) předchozího řešení lze vyřešit i takto: Jsou-li obě 0 na sousedních stěnách, můžeme je jediným krokem zvětšit na 1. Jsou-li obě 0 na protilehlých stěnách (bez újmy na obecnosti nechť jsou to např. S_1 a S_6), pomocí kroků k_{12}, k_{36}, k_{15}, k_{46}, dosáhneme toho, že na všech stěnách krychle budou napsána čísla 2.

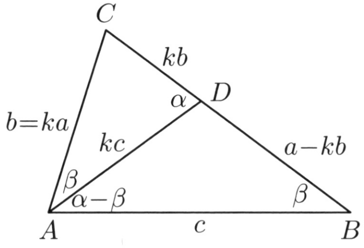
A – I – 6

Je-li $a = b$, je $\alpha = \beta$, takže $\cos(\alpha - \beta) = 1$ a dokazovaná nerovnost platí jako rovnost $a^2 + a^2 = 2a^2$ (dodejme, že bez ohledu na to, zda je

[1] Podobně jsou očíslovány i stěny běžné hrací kostky: součet bodů na protilehlých stěnách dává 7.

úhel γ ostrý či nikoli). Protože dokazovaná nerovnost je symetrická v a, b (kosinus je sudá funkce), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a > b$ neboli $\alpha > \beta$.

Je-li tedy $\alpha > \beta$, lze úhel BAC velikosti α rozdělit pomocí bodu $D \in$ $\in BC$ na dva úhly CAD a DAB velikostí β a $\alpha-\beta$ (obr. 13). Trojúhelník DAC je pak zmenšením trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti $k = b : a$, takže $|AD| = bc/a$ a $|DC| = b^2/a$, odkud $|BD| = |BC| -$ $- |DC| = (a^2 - b^2)/a$.



Obr. 13

Vyjádření $|AD|$, $|BD|$ dosadíme do rovnosti z kosinové věty pro trojúhelník ABD a upravíme:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cos(\alpha - \beta),$$
$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} = c^2 + \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{2bc^2 \cos(\alpha - \beta)}{a},$$
$$(a^2 - b^2)^2 = \delta \cdot c^2, \quad \text{kde } \delta = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta) > 0. \tag{1}$$

(Poslední nerovnost plyne z toho, že pro $\alpha \neq \beta$ je $\cos(\alpha - \beta) < 1$.) Vztah (1) spolu s rovností $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ nyní využijeme k úpravě rozdílu ¼ pravé a levé strany dokazované nerovnosti, který navíc ještě vynásobíme výrazem $2ab$:

$$\begin{aligned} 2ab¼ &= 2ab\big(2ab - (a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta)\big) = \\ &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2) \cdot 2ab\cos(\alpha - \beta) = \\ &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - \delta) = \delta(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 = \\ &= \delta(a^2 + b^2) - \delta \cdot c^2 = \delta(a^2 + b^2 - c^2) = \delta \cdot 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Po vydělení výrazem $2ab$ dostáváme vztah ¼ $= \delta\cos\gamma$, takže s ohledem na $\delta > 0$ má výraz ¼ stejné znaménko jako $\cos\gamma$ (zopakujme, že za předpokladu $a \neq b$). Odtud plyne, že v případě, kdy $\gamma < 90°$ a $a \neq b$, platí nerovnost ze zadání úlohy jako *ostrá.* Tím je úloha vyřešena a odpověď na její závěrečnou otázku zní: v dokázané nerovnosti (v zadané situaci, tj. při ostrém úhlu γ) nastane rovnost, právě když $a = b$.

Poznámka 1. Odvozený vztah ¼ $= \delta \cos \gamma$ se bez pomocných označení přepíše jako identita

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) = \bigl(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta)\bigr)\cos\gamma, \qquad (2)$$

která platí pro *libovolný* trojúhelník ABC (k našemu odvození stačí přidat triviální ověření rovnosti (2) v případě $a = b$). Výsledek (2) umožňuje snadnou diskusi o jednotlivých případech relace

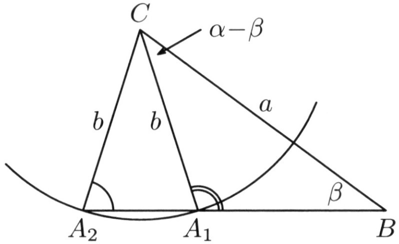
$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \lesseqqgtr 2ab,$$

neboť první činitel v pravé straně (2) je vždy nezáporný:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta) \geqq a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqq 0.$$

Relace dopadá takto: rovnost nastane, právě když $a = b$ nebo $\gamma = 90°$; v případě $a \neq b$ pak platí ostrá nerovnost $<$ či $>$ podle toho, zda je $\gamma < 90°$ nebo $\gamma > 90°$.

Jiné řešení. Původní řešení je celé založeno na vztahu (1), proto jeho odlišné odvození nyní uvedeme jako „jiné řešení". Tvar kladného výrazu δ v (1) je motivací k úvaze o pomocném trojúhelníku, jehož dvě strany mají délky a, b a svírají úhel velikosti $\alpha - \beta$ (opět předpokládáme, že $a > b$). Nás zajímá délka jeho třetí strany, kterou označíme d, takže pro výraz δ ve vztahu (1), který se chystáme dokázat, budeme mít $\delta = d^2$. Ukažme, že takový trojúhelník o stranách a, b, d je — vedle původního trojúhelníku o stranách a, b, c — druhým řešením úlohy *sestrojit trojúhelník ABC, jsou-li dány strany a, b a úhel β.* Konstrukci obou řešení A_1BC a A_2BC vidíme na obr. 14. Součet úhlů při vrcholech A_1 a A_2 (vyznačených ob-



Obr. 14

loučky) je zřejmě 180°. V jednom z trojúhelníků je to úhel α, ve druhém tedy úhel $180° - \alpha$, takže úhel při vrcholu C druhého trojúhelníku je právě $\alpha - \beta$, jak jsme si přáli.[2] Úsečky A_1B, A_2B tedy mají (v některém pořadí) délky c a d. Z mocnosti bodu B k sestrojené kružnici o středu C a poloměru b vyplývá rovnost

$$cd = a^2 - b^2, \tag{3}$$

z níž po umocnění na druhou dostáváme $c^2d^2 = (a^2-b^2)^2$. A to je kýžený klíčový vztah (1) z původního řešení, neboť jak už jsme naznačili, podle kosinové věty platí

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta). \tag{4}$$

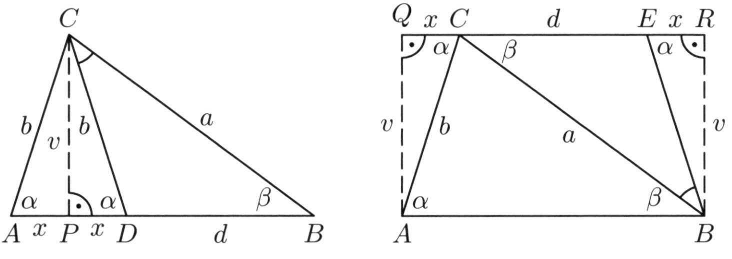
Poznámka 2. V původním řešení jsme ze vztahu (1) odvodili identitu zapsanou v Poznámce 1 jako (2). Právě uvedený alternativní důkaz (1) s využitím konstrukční úlohy (a, b, β) má zajímavý důsledek: díky „rovnoprávnosti“ obou řešení z obr. 14 musí platit i identita

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos\gamma = c^2\cos(\alpha - \beta), \tag{5}$$

získaná z (2) výměnou rolí trojúhelníků s trojicemi stran (a, b, c) a (a, b, d), kterou lze odvodit i trigonometricky.

Další řešení. Pomocný trojúhelník se stranami a, b $(a > b)$ svírajícími úhel $\alpha - \beta$ a třetí stranou d danou vztahem (4) lze využít k řešení úlohy i bez objevu „mocnostní“ rovnosti (3) následujícím postupem.

Zmíněný trojúhelník lze k trojúhelníku ABC vhodně přikreslit dvěma způsoby patrnými z obr. 15. Vlevo je to trojúhelník BCD (ten známe už z předchozího řešení), vpravo to je trojúhelník BCE; snadno pak ověříme, že oba vyznačené úhly BCD a CBE mají požadovanou velikost $\alpha - \beta$.



Obr. 15

[2] V případě $\alpha = 90°$ sice platí $A_1 = A_2$, avšak na celé naší úvaze není třeba nic měnit: tehdy totiž $\alpha - \beta = \gamma$ a $c = d$.

(Oba obrázky odpovídají případu $\alpha < 90^\circ$, v úplném řešení by neměl chybět obrázek pro případ $\alpha \geqq 90^\circ$, který zde posuzovat nebudeme, protože další postup vyžaduje jen nepatrnou obměnu.) Pomocí délky d ze vztahu (4) nyní upravíme dokazovanou (ostrou) nerovnost:

$$
\begin{aligned}
(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) &< 2ab, \\
(a^2 + b^2) \cdot 2ab\cos(\alpha - \beta) &< 4a^2b^2, \\
(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - d^2) &< 4a^2b^2, \\
(a^2 - b^2)^2 &< (a^2 + b^2)d^2. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Nakonec využijeme Pythagorovu větu pro dvojice pravoúhlých trojúhelníků z obr. 15; v obou variantách jak s trojúhelníkem BCD, tak s trojúhelníkem BCE pak platí

$$a^2 = (d + x)^2 + v^2 \quad \text{a} \quad b^2 = x^2 + v^2,$$

takže $a^2 - b^2 = d^2 + 2dx = d(d + 2x)$. Po dosazení do levé strany nerovnosti (6) a zkrácení výrazem d^2 dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$(d + 2x)^2 < a^2 + b^2 \quad \text{neboli} \quad c^2 < a^2 + b^2,$$

která (díky kosinové větě) přesně vyjadřuje podmínku $\gamma < 90^\circ$ ze zadání úlohy. Tím je celé její řešení hotovo, protože v případě $a = b$ zřejmě v dokazované nerovnosti nastane rovnost.

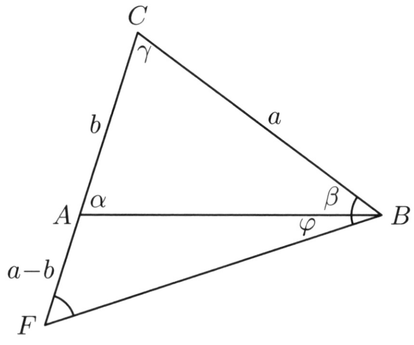
Další řešení. Ještě jedním způsobem za předpokladů $\gamma < 90^\circ$ a $a > b$ (neboli $\alpha > \beta$) dokážeme ostrou nerovnost

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) < 2ab.$$

Nejprve ji ekvivalentně upravíme, když položíme $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) > 0$ a využijeme vzorec $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$:

$$
\begin{aligned}
(a^2 + b^2)(1 - 2\sin^2\varphi) &< 2ab, \\
(a - b)^2 &< 2(a^2 + b^2)\sin^2\varphi, \\
2\left(\frac{a - b}{2\sin\varphi}\right)^2 &< a^2 + b^2.
\end{aligned}
$$

To je (podle sinové věty) nerovnost $2r^2 < a^2 + b^2$ pro poloměr r kružnice opsané libovolnému trojúhelníku se stranou $a - b$ a protilehlým vnitřním úhlem φ. Takový trojúhelník dostaneme, když jako na obr. 16 stranu CA trojúhelníku ABC prodloužíme za bod A do bodu F tak, aby platilo



Obr. 16

$|CF| = a$ $(a > b)$. Potom má trojúhelník ABF stranu AF délky $a - b$ s protilehlým úhlem ABF, jehož velikost určíme takto: rovnoramenný trojúhelník BCF má při základně BF shodné úhly $90° - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, takže

$$|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CBF| - |\sphericalangle CBA| = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \varphi.$$

Proto je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABF skutečně roven zkoumané hodnotě r. Pro ni tak získáme z předpokladu $\gamma < 90°$ odhad

$$r = \frac{|AB|}{2 \sin |\sphericalangle AFB|} = \frac{c}{2 \sin(90° - \frac{1}{2}\gamma)} < \frac{c}{2 \sin 45°} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

neboli $2r^2 < c^2$; ze stejného předpokladu $\gamma < 90°$ ovšem vyplývá (díky kosinové větě pro trojúhelník ABC) další nerovnost $c^2 < a^2 + b^2$. Dohromady dostáváme $2r^2 < c^2 < a^2 + b^2$ a kýžená nerovnost $2r^2 < a^2 + b^2$ je tak dokázána.

Dodejme ještě, že v případě $\gamma > 90°$ ze stejných důvodů platí $2r^2 > c^2 > a^2 + b^2$, což (za předpokladu $a \neq b$) dokazuje opačnou nerovnost

$$(a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) > 2ab.$$

Poslední řešení. Uvedeme ještě jedno trigonometrické řešení. Pro libovolný trojúhelník ABC platí totiž tzv. *Mollweidův vzorec*

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\gamma},$$

ze kterého plyne následující vyjádření hodnoty $\cos(\alpha - \beta)$:

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2} = 1 - \frac{2(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{c^2}.$$

Dosazením do levé strany dokazované nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}
(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) &\leqq 2ab,\\
(a^2 + b^2)\left(1 - \frac{2(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{c^2}\right) &\leqq 2ab,\\
(a-b)^2 &\leqq \frac{2(a^2+b^2)(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{c^2}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že v případě $a = b$ nastane rovnost. V případě $a \neq b$ po dělení kladným výrazem $(a-b)^2$ a další zřejmé ekvivalentní úpravě dostaneme

$$c^2 \leqq 2(a^2 + b^2)\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Dosadíme-li sem z rovností

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{a} \quad 2\cos^2\frac{\gamma}{2} = 1 + \cos\gamma,$$

dostaneme po odečtení součtu $a^2 + b^2$ od obou stran nerovnost

$$-2ab\cos\gamma \leqq (a^2 + b^2)\cos\gamma \quad \text{neboli} \quad 0 \leqq (a+b)^2\cos\gamma,$$

což díky zadanému předpokladu $\gamma < 90°$ skutečně platí jako ostrá nerovnost. Tím je nerovnost ze zadání úlohy dokázána; rovnost v ní nastane, právě když $a = b$.[3]

A – S – 1

Předpokládejme, že číslo c má požadovanou vlastnost. Diferenci příslušné aritmetické posloupnosti označme d. Rozlišíme dva případy podle toho, zda číslo c leží mezi kořeny x_1 a x_2 dané kvadratické rovnice, nebo ne:

a) Je-li c prostředním členem předpokládané aritmetické posloupnosti, platí $x_1 = c - d$ a $x_2 = c + d$. Pro součet kořenů tak podle Viètova vztahu dostáváme $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c$, odkud $c = -\frac{5}{4}$. Navíc pro záporné c

[3] I při tomto postupu lze odvodit obecnější závěry uvedené v Poznámce 1 za prvním řešením.

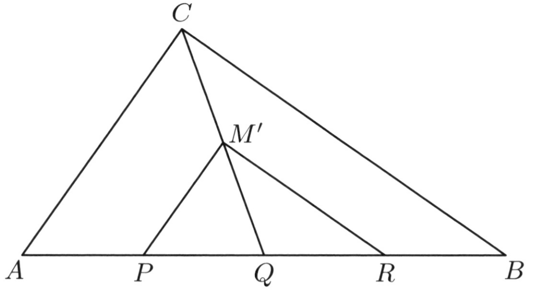
je diskriminant dané rovnice kladný, takže má dva reálné kořeny. (Pro $c = -\frac{5}{4}$ má daná rovnice kořeny $x_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{5}$.)

b) Je-li koeficient c krajním členem předpokládané aritmetické posloupnosti, označme kořeny dané rovnice tak, aby platilo $x_1 = c + d$, $x_2 = c + 2d$. Pro jejich součet tentokrát vychází $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c + 3d$. Vyjádříme-li odtud $d = -\frac{5}{6} - \frac{2}{3}c$ a dosadíme do vztahů $x_1 = c + d$ a $x_2 = c + 2d$, dostaneme $x_1 = \frac{1}{6}(2c - 5)$, $x_2 = -\frac{1}{3}(c + 5)$. Dosadíme-li oba výrazy do Viètova vztahu $x_1x_2 = c$ pro součin kořenů, obdržíme po úpravě kvadratickou rovnici $2c^2 + 23c - 25 = 0$, která má kořeny 1 a $-\frac{25}{2}$. (Podmínku na diskriminant tentokrát ověřovat nemusíme, neboť uvedeným postupem máme zaručeno, že reálná čísla $x_{1,2}$ odpovídající oběma nalezeným hodnotám c splňují oba Viètovy vztahy, takže jsou skutečně kořeny příslušné rovnice. Pro $c = 1$ má daná kvadratická rovnice kořeny $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -2$; pro $c = -\frac{25}{2}$ má rovnice kořeny $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{5}{2}$.)

Závěr. Úloze vyhovují reálná čísla c z množiny $\{-\frac{25}{2}; -\frac{5}{4}; 1\}$.

A – S – 2

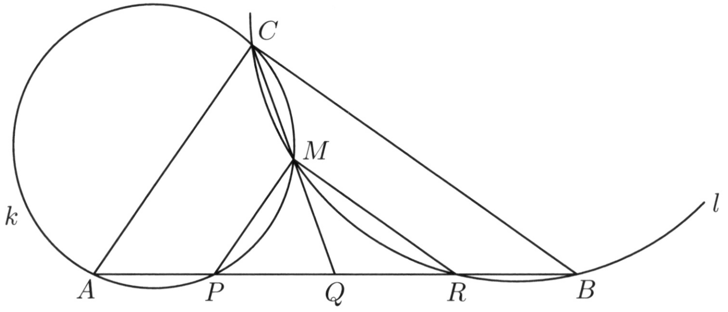
Označme M' střed úsečky CQ (obr. 17). Protože PM' a RM' jsou střední příčky trojúhelníků AQC a BQC, které jsou podle Thaletovy věty rovnoramenné se základnami AC a BC, jsou čtyřúhelníky $CAPM'$



Obr. 17

a $CBRM'$ rovnoramenné lichoběžníky a jim opsané kružnice, jež se protínají v bodech C a M', jsou zároveň i opsanými kružnicemi uvažovaných trojúhelníků APC a BRC. Je tedy $M = M'$ a tvrzení úlohy je tím dokázáno.

Jiné řešení. Označme c délku přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC. Kružnice opsané trojúhelníkům APC a BRC označme po řadě k, l (obr. 18). Vzhledem k tomu, že $|QP| \cdot |QA| = |QR| \cdot |QB| = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$, má střed Q přepony AB stejnou mocnost $m = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$ k oběma kružnicím k i l, a leží proto na jejich chordále CM. Navíc podle Thaletovy věty platí $|QC| = |QA| = \frac{1}{2}c$. Z rovnosti $|QM| \cdot |QC| = m$ tak plyne $|QM| = \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}|QC|$, takže M je středem úsečky CQ.



Obr. 18

A – S – 3

Protože p, q jsou různá *lichá* prvočísla, je $|p - q| \geqq 2$. Pro levou stranu dané nerovnosti tudíž platí

$$L = \left|\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right| = \left|\frac{p^2 - q^2}{pq}\right| = \frac{|p - q| \cdot (p + q)}{pq} \geqq \frac{2\,(p + q)}{pq}.$$

Abychom dokázali požadovanou nerovnost

$$L > \frac{4}{\sqrt{pq}},$$

stačí dokázat nerovnost $p + q > 2\sqrt{pq}$. To je ovšem nerovnost, jež je triviálním důsledkem nerovnosti $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 > 0$, která platí pro libovolná dvě různá kladná čísla p, q. Tím je daná nerovnost dokázána.

A – II – 1

Nejprve určeme počet u všech osmimístných čísel dělitelných čtyřmi. Každé takové číslo má ve svém zápisu na prvním místě zleva nenulovou číslici. Máme tak 9 možností. Na následujících pěti místech má libovolnou číslici desítkové soustavy, tj. pro každou pozici máme 10 možností, a končí dvojčíslím, které je dělitelné čtyřmi, tj. 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, ..., 96, celkově tedy 25 možností. Proto je

$$u = 9 \cdot 10^5 \cdot 25 = 22\,500\,000.$$

Podobnou úvahu lze provést i při hledání počtu v všech osmimístných čísel dělitelných čtyřmi, která ve svém desítkovém zápisu *neobsahují* číslici 1. Pro první pozici zleva máme nyní 8 možností a pro každou další z pěti následujících pozic máme 9 možností. Na posledních dvou místech zprava musí být dvojčíslí dělitelné čtyřmi, které však neobsahuje číslici 1. Jsou to všechna dvojčíslí z předchozího odstavce kromě 12 a 16, tedy 23 možností. Proto

$$v = 8 \cdot 9^5 \cdot 23 = 10\,865\,016.$$

Závěr. Protože $u > 2v$, je mezi osmimístnými násobky čísla 4 více těch, které ve svém (desítkovém) zápisu číslici 1 obsahují, než těch, které ji neobsahují.

Poznámka. Počet u všech osmimístných násobků lze také určit jednoduchou úvahou: nejmenší násobek je $A = 10\,000\,000$, největší je $B = 99\,999\,996$, takže hledaný počet je $\frac{1}{4}(B - A) + 1 = \frac{1}{4}(B + 4 - A) = 22\,500\,000$.

K důkazu nerovnosti $u > 2v$ není nutné v vyčíslit, protože podíl

$$\frac{u}{v} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot 25}{8 \cdot 9^5 \cdot 23} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23}$$

lze dobře odhadnout pomocí binomické věty

$$\left(\frac{10}{9}\right)^5 = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^5 > 1 + 5 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9^2} = \frac{136}{81} = \frac{8 \cdot 17}{9^2},$$

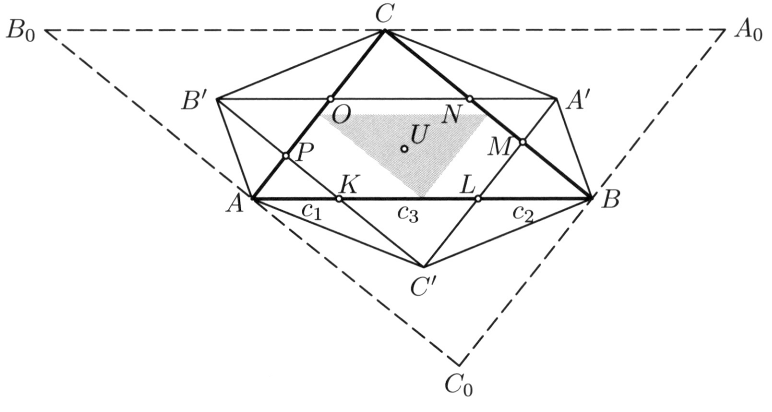
tudíž

$$\frac{u}{v} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23} > \frac{9}{8} \cdot \frac{8 \cdot 17}{9^2} \cdot \frac{25}{23} = \frac{17 \cdot 25}{9 \cdot 23} = \frac{425}{207} > 2.$$

A – II – 2

Označme T trojúhelník s vrcholy ve středech stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Obsah trojúhelníku XYZ budeme značit symbolem S_{XYZ}.

Protože body A', B', C' jsou zároveň obrazy bodu U ve stejnolehlostech se středy v odpovídajících vrcholech trojúhelníku ABC a koeficientem 2, plyne z předpokladu úlohy, že body A', B', C' leží postupně uvnitř trojúhelníků A_0CB, CB_0A a BAC_0 (to jsou obrazy trojúhelníku T v uvedených stejnolehlostech, na obr. 19 je T vyznačen šedou barvou). Hranice trojúhelníku $A'B'C'$ tudíž protne strany AB, BC, CA postupně v jejich vnitřních bodech K, L, M, N, O, P.



Obr. 19

Protože trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti podle středu U, jsou navzájem si odpovídající strany rovnoběžné a v téže souměrnosti si odpovídají dvojice bodů K a N, L a O i M a P. Proto podle věty *uu* je každý z trojúhelníků AKP, LBM, ONC podobný trojúhelníku ABC. Označme k_1, k_2, k_3 koeficienty podobností, jež zobrazí trojúhelník ABC postupně na trojúhelníky AKP, LBM, ONC. Obrazy trojúhelníků AKP, LBM, ONC ve středové souměrnosti se středem U jsou po řadě trojúhelníky $A'NM$, $OB'P$, LKC'. Ty jsou rovněž podobné trojúhelníku ABC, přičemž odpovídající koeficienty podobností, které na ně převedou trojúhelník ABC, jsou opět k_1, k_2, k_3. Označíme-li c délku strany AB, platí pro délky úseků na straně AB

$$c_1 = |AK| = k_1c, \quad c_2 = |LB| = k_2c, \quad c_3 = |KL| = k_3c,$$

takže

$$c = c_1 + c_2 + c_3 = k_1c + k_2c + k_3c = (k_1 + k_2 + k_3)c$$

neboli

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

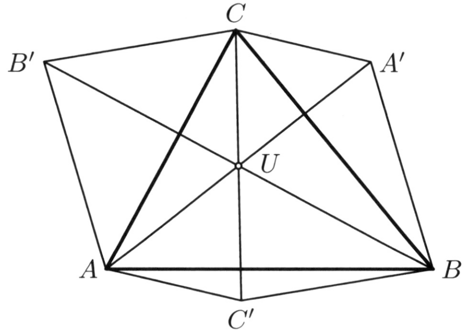
Z podobnosti trojúhelníků ABC a LKC' dále plyne, že velikost výšky z vrcholu C' ke straně AB v trojúhelníku ABC' je rovna $k_3 v_c$, kde v_c je velikost výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC. Je tudíž

$$S_{ABC'} = \frac{1}{2} c \cdot k_3 v_c = k_3 \Big(\frac{1}{2} c v_c \Big) = k_3 S.$$

Analogicky $S_{BCA'} = k_1 S$ a $S_{CAB'} = k_2 S$. Pro obsah S' šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ tak platí

$$S' = S_{ABC} + S_{BCA'} + S_{CAB'} + S_{ABC'} = (1 + k_1 + k_2 + k_3) S = 2S.$$

Jiné řešení. (*Podle Karla Beneše z Gymnázia Kojetín.*) Šestiúhelník $AC'BA'CB'$ je středově souměrný podle zvoleného bodu U (obr. 20).



Obr. 20

Každá z jeho úhlopříček AA', BB', CC' tudíž dělí tento šestiúhelník na dva shodné čtyřúhelníky, a proto například platí

$$S_{AC'BA'CB'} = 2\, S_{AC'BA'}.$$

Stačí tedy dokázat, že čtyřúhelník $AC'BA'$ má stejný obsah S jako trojúhelník ABC. Protože úsečka AU je těžnicí v trojúhelníku CAC', platí

$$S_{AUC'} = S_{AUC}. \tag{1}$$

Podobně úsečka BU je těžnicí v trojúhelnících ABA' a CBC', platí tudíž

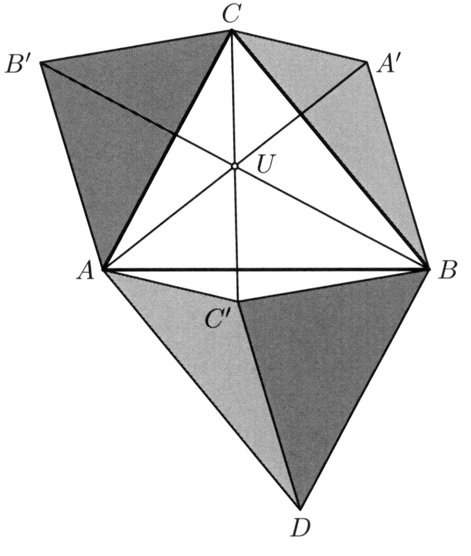
$$S_{BUC'} = S_{BUC} \quad \text{a} \quad S_{BUA'} = S_{BUA}. \tag{2}$$

Sečtením všech tří rovností ze vztahů (1) a (2) dostaneme

$$S_{AC'BA'} = S_{AUC'} + S_{BUC'} + S_{BUA'} = S_{AUC} + S_{BUC} + S_{BUA} = S,$$

což dokazuje platnost daného tvrzení.

Jiné řešení. (*Podle Pavla Polcera z G v Brně, Křenová, Kateřiny Medkové z BG Bohuslava Balbína v Hradci Králové a Zuzany Boršiové z G v Teplicích.*) Doplňme nejprve trojúhelník ABC na rovnoběžník $ADBC$ (obr. 21). Vzhledem k tomu, že také $AC'A'C$ je rovnoběžník, je v po-



Obr. 21

sunutí určeném vektorem $\boldsymbol{CA}$ obrazem trojúhelníku CBA' trojúhelník ADC'. Rovněž $BCB'C'$ je rovnoběžník, a proto v posunutí určeném vektorem $\boldsymbol{CB}$ je obrazem trojúhelníku ACB' trojúhelník DBC'. Platí tedy rovnosti

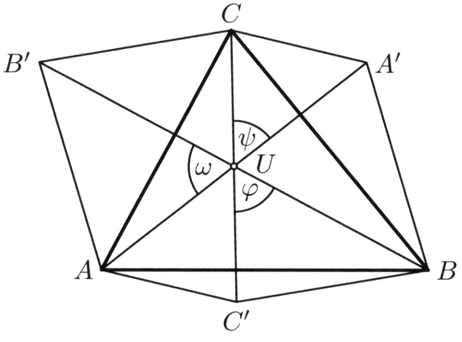
$$S_{CBA'} = S_{ADC'} \quad \text{a} \quad S_{ACB'} = S_{DBC'},$$

které zřejmě znamenají, že obsah zkoumaného šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ je roven obsahu rovnoběžníku $ADBC$, tudíž dvojnásobku obsahu S daného trojúhelníku ABC.

Jiné řešení. (*Podle Dominika Lachmana z G v Olomouci-Hejčíně.*) Ve shodě s obr. 22 označme $\varphi = |\sphericalangle BUC'|$, $\psi = |\sphericalangle CUA'|$ a $\omega = |\sphericalangle AUB'|$.

S ohledem na rovnost sinů vedlejších úhlů lze obsah S trojúhelníku ABC (rovný součtu obsahů trojúhelníků ABU, BCU a CAU) vyjádřit následujícím způsobem

$$S = \frac{1}{2}\,|AU|\cdot|BU|\sin\omega + \frac{1}{2}\,|BU|\cdot|CU|\sin\varphi + \frac{1}{2}\,|CU|\cdot|AU|\sin\psi.$$



Obr. 22

Obsah Q šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ je roven (díky souměrnosti podle středu U) dvojnásobku obsahu čtyřúhelníku $AC'BA'$, který vyjádříme jako součet obsahů trojúhelníků $AC'U$, $C'BU$ a $BA'U$. Dostaneme tak

$$Q = 2\Big(\frac{1}{2}\,|AU|\cdot|C'U|\sin\psi + \frac{1}{2}\,|C'U|\cdot|BU|\sin\varphi + \frac{1}{2}\,|BU|\cdot|A'U|\sin\omega\Big).$$

A protože $|UA| = |UA'|$, $|UB| = |UB'|$ a $|UC| = |UC'|$, dostáváme konečně

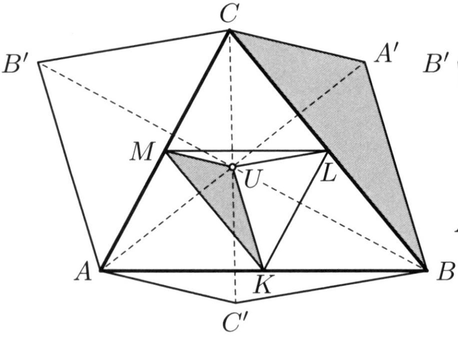
$$Q = 2\Big(\frac{1}{2}\,|AU|\cdot|BU|\sin\omega + \frac{1}{2}\,|BU|\cdot|CU|\sin\varphi + \frac{1}{2}\,|CU|\cdot|AU|\sin\psi\Big) = \\ = 2S,$$

což bylo třeba dokázat.

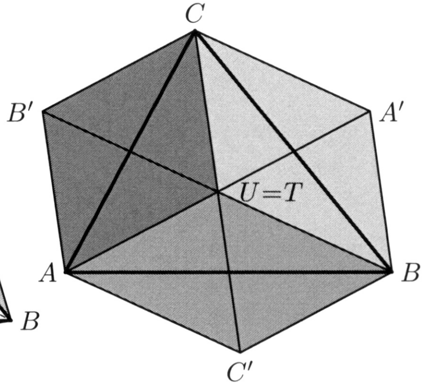
Jiné řešení. Označme K, L, M středy stran AB, BC, CA. Stejnolehlost se středem A a koeficientem 2 zobrazí trojúhelník MKU na trojúhelník CBA' (obr. 23), proto $S_{CBA'} = 4\cdot S_{MKU}$. Podobně $S_{ACB'} = 4\cdot S_{KLU}$ a $S_{BAC'} = 4\cdot S_{LMU}$. Odtud

$$S_{CBA'} + S_{ACB'} + S_{BAC'} = 4\cdot S_{KLM} = S,$$

takže šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.



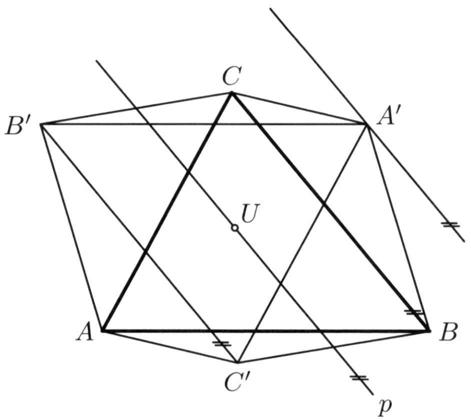
Obr. 23



Obr. 24

Jiné řešení. Je-li bod U totožný s těžištěm T trojúhelníku ABC ($U =$ $= T$), je tvrzení úlohy splněno, neboť $S_{A'BC} = S_{TBC}$, $S_{B'CA} = S_{TCA}$ a $S_{C'AB} = S_{TAB}$ (obr. 24).

Předpokládejme nyní, že se bod U pohybuje uvnitř trojúhelníku T po přímce p rovnoběžné se stranou BC, a ukažme, že se obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ nemění. Body A', B' a C' leží totiž na rovnoběžkách s přímkou p, a proto se nemění obsah trojúhelníku $A'BC$ ani obsahy rovnoběžníku $BCB'C'$ a trojúhelníku $B'C'A$ (obr. 25). Obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ tedy na poloze bodu U na přímce p nezávisí. Podobně lze ukázat, že se obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ nemění, pohybuje-li se bod U po rovnoběžce se stranou AC.



Obr. 25

Libovolný vnitřní bod U trojúhelníku T přitom získáme jako obraz těžiště T trojúhelníku ABC v zobrazení složeném ze dvou posunutí, a to z posunutí ve směru rovnoběžném se stranou BC a z posunutí ve směru rovnoběžném se stranou AC. Proto pro každý bod U uvnitř trojúhelníku T má šestiúhelník $AC'BA'CB'$ stejný obsah jako šestiúhelník odpovídající bodu $U = T$, tedy obsah $2S$, jak jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme U' libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Protože obsah zkoumaného šestiúhelníku je roven součtu obsahů tří čtyřúhelníků $AC'BU'$, $BA'CU'$ a $CB'AU'$, bude tvrzení úlohy zřejmě platit, dokážeme-li bod U' vybrat tak, aby všechny tři zmíněné čtyřúhelníky byly rovnoběžníky. Protože

$$U = \frac{A + A'}{2} = \frac{B + B'}{2} = \frac{C + C'}{2},$$

mají body A', B', C' vyjádření

$$A' = 2U - A, \quad B' = 2U - B, \quad C' = 2U - C,$$

takže potřebné rovnosti

$$\frac{A + B}{2} = \frac{C' + U'}{2}, \quad \frac{B + C}{2} = \frac{A' + U'}{2}, \quad \frac{C + A}{2} = \frac{B' + U'}{2}$$

budou splněny, právě když bod U' bude mít vyjádření $U' = A+B+C-2U$ neboli $U' = 3T - 2U$, kde $T = \frac{1}{3}(A+B+C)$ je těžiště trojúhelníku ABC. Odvozená rovnost zapsaná ve tvaru $U' - T = 2(T - U)$ znamená, že kýžený bod U' je určen jako obraz bodu U ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2. V ní je ovšem obrazem trojúhelníku T výchozí trojúhelník ABC, takže vnitřní bod U trojúhelníku T se skutečně zobrazí na vnitřní bod U' trojúhelníku ABC, jak jsme potřebovali dokázat.

A – II – 3

Předně si uvědomme, že s každou dvojicí (m, n) kladných celých čísel, která úloze vyhovuje, jí vyhovuje i dvojice (n, m). Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $m \geqq n$.

Pokud kladné celé číslo $A = (m + n)^2$ dělí kladné celé číslo $B = 4(mn + 1)$, nutně platí

$$(m + n)^2 \leqq 4(mn + 1) \quad \text{neboli} \quad (m - n)^2 \leqq 4.$$

Proto $0 \leqq m - n \leqq 2$. Nastane tedy právě jedna ze tří následujících možností:

- ▷ $m = n$, pak $A = 4n^2$, $B = 4n^2 + 4$ a A dělí B, právě když $4n^2$ dělí 4, tedy $n = 1$. Dostáváme jedno řešení $(m, n) = (1, 1)$.
- ▷ $m = n + 1$, pak $A = 4n^2 + 4n + 1$, $B = 4n^2 + 4n + 4 = A + 3$. Číslo A dělí B, právě když $4n^2 + 4n + 1$ dělí 3. Ovšem pro kladná celá čísla n platí $4n^2 + 4n + 1 \geqq 4 + 4 + 1 = 9$, proto v tomto případě nemá úloha řešení.
- ▷ $m = n + 2$, pak $A = 4n^2 + 8n + 4$, $B = 4n^2 + 8n + 4$. Vidíme, že $A = B$, tedy každá dvojice $(m, n) = (n + 2, n)$ kladných celých čísel je řešením zadané úlohy.

Závěr. Úloze vyhovuje dvojice $(1, 1)$ a dále (s ohledem na symetrii neznámých m, n) rovněž každá z dvojic $(n + 2, n)$ a $(m, m + 2)$, kde m a n jsou libovolná kladná celá čísla.

A – II – 4

Označme stěny krychle $S_1, S_2, \ldots, S_6$ tak, že stěna S_1 je protilehlá stěně S_6, stěna S_2 je proti S_5 a S_3 je proti S_4. Číslo na stěně S_i označme c_i. Zřejmě libovolný vrchol krychle patří vždy právě jedné z dvojic protilehlých stěn. To znamená, že se v každém kroku zvětší o 1 i hodnota součtů $c_1 + c_6$, $c_2 + c_5$ a $c_3 + c_4$ čísel na protilehlých stěnách. Má-li tedy na konci platit $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6$, a tedy také

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4, \tag{1}$$

musejí být součty čísel na protilehlých stěnách krychle stejné už na počátku (a zůstanou stejné i po každém kroku).

Ukážeme, že podmínka (1) je zároveň postačující. Nechť tedy čísla na stěnách krychle splňují (1). Popíšeme posloupnost kroků, po nichž budou na všech stěnách krychle stejná čísla. Krok, v němž zvětšíme čísla na stěnách S_i, S_j, S_m, označme k_{ijm}. Bez újmy na obecnosti nechť $c_1 = p$ je největší ze šesti čísel na krychli. Nyní provedeme $(p - c_2)$-krát krok k_{246} a $(p - c_3)$-krát krok k_{356}. Dosáhneme tak toho, že na stěnách S_1, S_2, S_3 budou stejná čísla p. Díky podmínce (1) je teď i na stěnách S_4, S_5, S_6 totéž číslo, jehož hodnotu označme q. Pokud ještě není $p = q$, stačí nyní jen $(p - q)$-krát provést krok k_{456}, je-li $p > q$, resp. $(q - p)$-krát krok k_{123}, je-li $q > p$.

Naší úlohou je tedy určit počet takových množin $\mathsf{M} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ navzájem různých přirozených čísel, pro něž platí

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 60 \quad \text{a} \quad c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4.$$

Odtud plyne $3(c_1 + c_6) = 60$, tedy

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4 = 20. \tag{2}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme zřejmě předpokládat, že $c_1 < c_2 < c_3 < < c_4 < c_5 < c_6$ neboli (vzhledem k rovnostem (2))

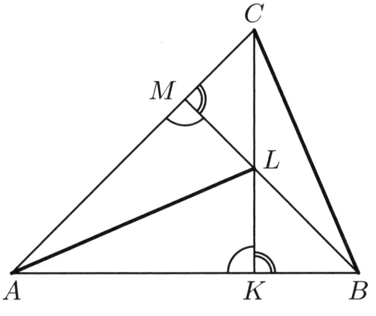
$$c_1 < c_2 < c_3 < 10 < c_4 < c_5 < c_6.$$

Přitom ke každé trojici (c_1, c_2, c_3) splňující $c_1 < c_2 < c_3 < 10$ zbylá čísla c_4, c_5, c_6 dopočteme z (2). Počet všech vyhovujících množin M je tedy roven počtu různých trojic přirozených čísel (c_1, c_2, c_3), jež vyhovují podmínce $c_1 < c_2 < c_3 < 10$, což je

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

A – III – 1

Čtyřúhelník $KBCM$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle CMB| = |\sphericalangle CKB|$ neboli $|\sphericalangle AKL| = |\sphericalangle AML|$ (obr. 26). Přitom čtyřúhelník $AKLM$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle AKL| + |\sphericalangle AML| = 180°$. Ve zkoumaném případě proto musí být všechny čtyři zmíněné úhly pravé, K a M jsou tak paty výšek v trojúhelníku ABC, který je tudíž ostroúhlý, a bod L je průsečíkem jeho výšek. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $KBCM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem BC a kružnice opsaná čtyřúhelníku $AKLM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem AL.



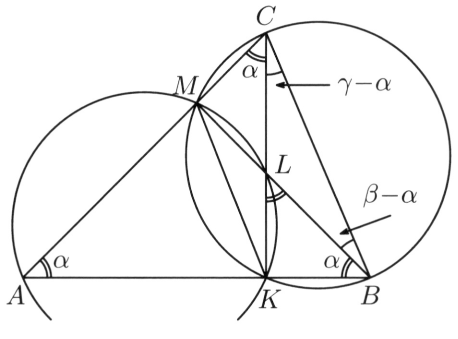
Obr. 26

Kružnice opsané uvedeným čtyřúhelníkům jsou shodné, právě když jsou shodné jejich průměry BC a AL. Označme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ. Pravoúhlé trojúhelníky CKB a AKL jsou podobné, protože pro jejich úhly při odpovídajících vrcholech C a A platí $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle BCK| = 90° - \beta$. Zřejmě proto platí $|BC| = |AL|$, právě když $|AK| = |CK|$, tedy AKC je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

Vidíme, že trojúhelník ABC vyhovuje podmínkám úlohy, právě když je ostroúhlý s úhlem $\alpha = 45°$. Pro *ostré* úhly β a γ pak platí $\beta+\gamma = 135°$.

Závěr. Řešením jsou právě všechny trojice úhlů $(\alpha, \beta, \gamma) = (45°, 45° + \varphi, 90° - \varphi)$, kde $\varphi \in (0°, 45°)$.

Jiné řešení. Nechť K, M jsou vnitřní body stran AB, AC trojúhelníku ABC, jež vyhovují podmínkám úlohy. Vzhledem k tomu, že kružnice opsané čtyřúhelníkům $AKLM$, $KBCM$ jsou shodné, shodují se i příslušné obvodové úhly nad společnou tětivou KM obou kružnic[4] (obr. 27).



Obr. 27

Odtud $|\sphericalangle MBC| = \beta - \alpha$ a $|\sphericalangle KCB| = \gamma - \alpha$, tudíž α je nejmenším vnitřním úhlem uvažovaného trojúhelníku.

Protože čtyřúhelník $AKLM$ je tětivový, je vnitřní úhel při vrcholu A shodný s vnějším úhlem u protějšího vrcholu L, což je zároveň vnější úhel trojúhelníku BCL, takže platí

$$\alpha = (\beta - \alpha) + (\gamma - \alpha) \quad \text{neboli} \quad 3\alpha = \beta + \gamma = 180° - \alpha.$$

Odtud vychází $\alpha = 45°$. Trojúhelník ABM je tedy stejně jako trojúhelník ACK rovnoramenný pravoúhlý, takže CK a BM jsou výšky trojúhelníku

---

[4] Dvě shodné kružnice se společnou tětivou mohou být buď totožné, anebo souměrně sdružené podle společné tětivy; první možnost zde nepřichází v úvahu.

ABC a bod L je jeho průsečíkem výšek. A protože bod L leží uvnitř trojúhelníku ABC, je trojúhelník ABC ostroúhlý.

Vzhledem k tomu, že $\alpha = 45°$ je nejmenším z vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, snadno nahlédneme, že hledané trojice (α, β, γ) mají tvar $(45°, 45° + \varphi, 90° - \varphi)$, kde pro parametr φ platí $0° < \varphi < 45°$.

Naopak v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC s úhlem $45°$ při vrcholu A, pro jehož další úhly platí $\beta+\gamma = 135°$, mají zřejmě paty výšek K, M z vrcholů C a B požadované vlastnosti, protože oba čtyřúhelníky $AKLM$, $KBCM$ jsou tětivové podle Thaletovy věty a z rovnosti úhlů $|\sphericalangle KCM| = |\sphericalangle KAM| = 45°$ nad společnou tětivou KM plyne, že jim opsané kružnice jsou shodné.

A – III – 2

Ukážeme, že dané rovnici vyhovují právě tři trojice prvočísel (p, q, r), a to $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$.

Danou rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{q}\right)\left(1 + \frac{3}{r}\right) = 4.$$

Protože $3^3 < 4 \cdot 2^3$, musí být aspoň jeden ze tří činitelů na levé straně upravené rovnice větší než $\frac{3}{2}$. Pro prvočísla p, q, r tak nutně platí $p < 2$ nebo $q < 4$ nebo $r < 6$. Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné prvočíslo menší než 2, zbývá vyšetřit následujících pět možností: $q \in \{2, 3\}$ a $r \in \in \{2, 3, 5\}$. Ty nyní rozebereme jednotlivě, přitom uvažovanou hodnotu q či r vždy dosadíme do dané rovnice, kterou pak (v oboru prvočísel) vyřešíme pro zbývající dvě neznámé.

- ▷ Pro $q = 2$ dostaneme $(p + 1)(r + 3) = 2pr$, odkud plyne $r = 3 + + 6/(p - 1)$, což je celé číslo pouze pro prvočísla $p \in \{2, 3, 7\}$. Jim však odpovídají $r \in \{9, 6, 4\}$, která nejsou prvočísly.
- ▷ Pro $q = 3$ dostaneme $5(p + 1)(r + 3) = 12pr$, odkud plyne, že $p = 5$ nebo $r = 5$. Pro $p = 5$ dostaneme řešení $(5, 3, 3)$ a pro $r = 5$ řešení $(2, 3, 5)$.
- ▷ Pro $r = 2$ dostaneme $5(p + 1)(q + 2) = 8pq$, odkud plyne, že $p = 5$ nebo $q = 5$. Pro $p = 5$ nedostaneme žádné řešení v oboru prvočísel, zatímco pro $q = 5$ dostáváme třetí řešení dané rovnice, kterým je trojice $(7, 5, 2)$.
- ▷ Pro $r = 3$ dostaneme $(p + 1)(q + 2) = 2pq$, odkud $q = 2 + 4/(p - 1)$, což je celé číslo pouze pro prvočísla $p \in \{2, 3, 5\}$. Mezi odpovídajícími

hodnotami $q \in \{6, 4, 3\}$ je jediné prvočíslo, pro něž dostáváme řešení $(p, q, r) = (5, 3, 3)$, které již známe.

- $\triangleright$ Pro $r = 5$ dostaneme $2(p + 1)(q + 2) = 5pq$, odkud plyne, že $p = 2$ nebo $q = 2$. Pro $p = 2$ dostáváme už známé řešení $(2, 3, 5)$, zatímco pro $q = 2$ vychází $p = 4$.

Jiné řešení. Pro každé prvočíslo q platí nerovnost $q + 2 \leqq 2q$. Pro prvočísla p a r tak dostaneme nerovnici $2(p + 1)(r + 3) \geqq 4pr$, kterou upravíme na tvar $(p - 1)(r - 3) \leqq 6$. Protože $p-1 \geqq 1$, musí být $r-3 \leqq 6$ neboli $r \leqq 9$. Odtud plyne, že nutně $r \in \{2, 3, 5, 7\}$. Postupným rozborem každé z těchto čtyř možností dospějeme (analogicky jako v předchozím řešení) ke třem trojicím prvočísel (p, q, r): $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$, které jsou jedinými řešeními úlohy.

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $(1+1/p)(1+2/q)(1+3/r) = 4$. Kdyby bylo $p \geqq 5$, $q \geqq 5$, $r \geqq 5$, platilo by

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{q}\right)\left(1 + \frac{3}{r}\right) \leqq \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{5} < 4.$$

Proto aspoň jedno z čísel p, q, r je z množiny $\{2, 3\}$. Stačí tedy prozkoumat šest možností:

- $\triangleright$ $p = 2$: Rovnici $3(q+2)(r+3) = 8qr$ upravíme na $(5q-6)(5r-9) = 144$, v oboru prvočísel je řešením $q = 3$, $r = 5$.
- $\triangleright$ $p = 3$: Rovnici $4(q + 2)(r + 3) = 12qr$ upravíme na tvar $(q - 1) \cdot \cdot (2r - 3) = 9$, v oboru prvočísel nemá řešení.
- $\triangleright$ $q = 2$: Rovnici $4(p+1)(r+3) = 8pr$ upravíme na tvar $(p-1)(r-3) = 6$, v oboru prvočísel nemá řešení.
- $\triangleright$ $q = 3$: Rovnici $5(p + 1)(r + 3) = 12pr$ upravíme na tvar $(7p - 5) \cdot \cdot (7r - 15) = 180$, v oboru prvočísel jsou řešeními $p = 5$, $r = 3$ a $p = 2$, $r = 5$.
- $\triangleright$ $r = 2$: Rovnici $5(p + 1)(q + 2) = 8pq$ upravíme na tvar $(3p - 5) \cdot \cdot (3q - 10) = 80$, v oboru prvočísel je řešením $p = 7$, $q = 5$.
- $\triangleright$ $r = 3$: Rovnici $6(p + 1)(q + 2) = 12pq$ upravíme na tvar $(p - 1) \cdot \cdot (q - 2) = 4$, v oboru prvočísel je řešením $p = 5$, $q = 3$.

Závěr. V oboru prvočísel jsou řešením dané rovnice následující trojice (p, q, r): $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$.

Poznámka. V oboru kladných celých čísel má rovnice až 28 řešení, z toho 13 v oboru celých čísel větších než 1: $(2, 2, 9)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 6, 3)$, $(2, 30, 2)$, $(3, 2, 6)$, $(3, 4, 3)$, $(3, 10, 2)$, $(4, 2, 5)$, $(5, 3, 3)$, $(5, 6, 2)$, $(7, 2, 4)$, $(7, 5, 2)$, $(15, 4, 2)$.

A – III – 3

a) Dle zadání platí $(x+y)^2 = (12-z)^2$ a $x^2+y^2 = 54-z^2$, tedy

$$2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = (12-z)^2 - (54-z^2) = 2\big((z-6)^2+9\big), \quad (1)$$

a tudíž

$$\begin{aligned} 0 \leqq (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = 54-z^2-2\big((z-6)^2+9\big) = \\ = -3\big((z-4)^2-4\big). \qquad (2) \end{aligned}$$

Z (1) plyne $xy = (z-6)^2+9 \geqq 9$, z (2) nerovnost $(z-4)^2 \leqq 4$ neboli $2 \leqq z \leqq 6$. Proto $(z-6)^2 \leqq (2-6)^2 = 16$, což spolu s (1) dává $xy = (z-6)^2+9 \leqq 25$. S ohledem na symetrii platí odvozené nerovnosti $9 \leqq xy \leqq 25$ i pro součiny yz, zx na místě xy.

b) Z dané soustavy rovnic dostáváme

$$xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2} = \frac{12^2-54}{2} = 45.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} (x-3)(y-3)+(y-3)(z-3)+(z-3)(x-3) = \\ = xy+yz+zx-6(x+y+z)+27 = 45-6\cdot 12+27 = 0. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že čísla $x-3$, $y-3$, $z-3$ nemohou být současně všechna kladná, alespoň jedno z čísel x, y, z je tedy nejvýše 3. Podobně ze vztahu

$$\begin{aligned} (x-5)(y-5)+(y-5)(z-5)+(z-5)(x-5) = \\ = xy+yz+zx-10(x+y+z)+75 = 45-10\cdot 12+75 = 0 \end{aligned}$$

vidíme, že čísla $x-5$, $y-5$, $z-5$ nemohou být současně všechna záporná, proto alespoň jedno z čísel x, y, z je nejméně 5.

Jiné řešení. Obtížnější obrat v části b) předchozího řešení můžeme nahradit důkazem implikací

$$(x>3)\wedge(y>3) \Rightarrow z<3 \quad \text{a} \quad (x<5)\wedge(y<5) \Rightarrow z>5.$$

Uvažujme kvadratický trojčlen $F(t) = (t-x)(t-y)$. Jsou-li oba jeho kořeny x a y větší než 3, platí $F(3) > 0$. Ovšem podle zadání a (1) platí

$$0 < F(3) = 3^2-3(x+y)+xy = 9-3(12-z)+(z-6)^2+9 = (z-3)(z-6).$$

Z této nerovnosti a z odhadu $z \leqq 6$ dokázaného v části a) předchozího řešení tak dostáváme požadovaný odhad $z < 3$. Podobně, jsou-li obě čísla x a y menší než 5, potom platí $F(5) > 0$. Ovšem podle zadání a (1) platí

$$0 < F(5) = 5^2 - 5(x+y) + xy = 25 - 5(12-z) + (z-6)^2 + 9 = (z-2)(z-5).$$

Z této nerovnosti a odhadu $z \geqq 2$ dokázaného v části a) předchozího řešení tak dostáváme požadovaný odhad $z > 5$.

Jiné řešení. a) Dosazením z první rovnice do druhé dostaneme

$$x^2 + y^2 + xy - 12x - 12y + 45 = 0$$

a odtud

$$x = \frac{12 - y \pm \sqrt{-3y^2 + 24y - 36}}{2}.$$

Proto $-3y^2 + 24y - 36 \geqq 0$, takže $2 \leqq y \leqq 6$. Dále máme

$$2xy = 12y - y^2 \pm y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36}.$$

Připusťme, že $2xy < 18$. Potom $12y - y^2 - y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} < 18$ neboli

$$0 < 12y - y^2 - 18 < y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36},$$

odkud po umocnění a úpravě dostaneme $(y-3)^4 < 0$, což není možné.

Podobně z nerovnosti $2xy > 50$ by vyplývalo

$$\begin{aligned} 12y - y^2 + y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} &> 50, \\ y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} &> y^2 - 12y + 50 > 0, \end{aligned}$$

a po umocnění a úpravě $(y^2 - 2y + 25)(y - 5)^2 < 0$, což rovněž neplatí.

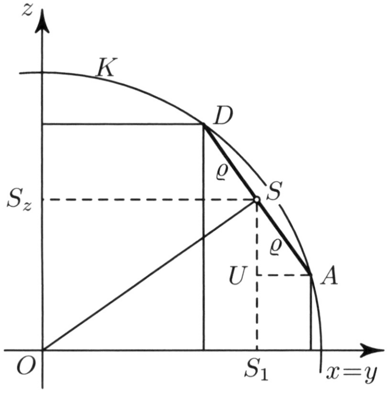
Je proto $9 \leqq xy \leqq 25$ a vzhledem na symetrii i $9 \leqq yz \leqq 25$ a $9 \leqq$ $\leqq zx \leqq 25$.

b) Položme $x = 4 + a$, $y = 4 + b$, $z = 4 + c$. Potom $a + b + c =$ $= 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|a| \geqq |b| \geqq |c|$. Čísla a a b mají pak opačná znaménka a $a^2 \geqq 2$, proto $|a| \geqq \sqrt{2}$ (dokonce lze dokázat $|a| \geqq \sqrt{3}$), a tedy $x \leqq 4 - \sqrt{2} < 3$ nebo $x \geqq 4 + \sqrt{2} > 5$. Z nerovnosti $|b| < 1$ by vyplývalo $|c| < 1$, ale potom $|a| \leqq |b| + |c| < 2$ a $a^2 + b^2 + c^2 < 6$; proto $|b| \geqq 1$. Mohou tedy nastat dva případy:

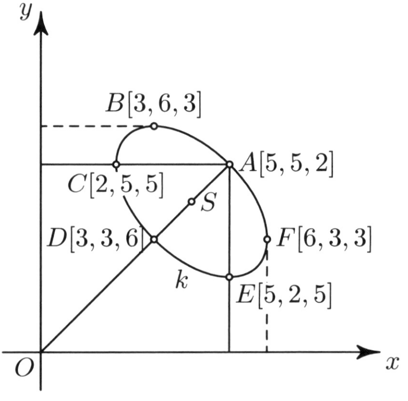
▷ Pokud $a > 0$, je $b < 0$, tedy $b \leqq -1$; proto $x > 5$ a $y \leqq 3$.
▷ Pokud $a < 0$, je $b > 0$, tedy $b \geqq 1$; proto $x < 3$ a $y \geqq 5$.

Jiné řešení. Vyřešíme část b) geometricky. V kartézské soustavě souřadnic s počátkem O a osami x, y, z určuje první rovnice rovinu σ, která prochází bodem $S = [4,4,4]$ a je kolmá k úsečce OS, zatímco druhá rovnice je rovnicí kulové plochy $K(O, r = \sqrt{54})$. Průnikem obou útvarů je kružnice $k(S, \varrho)$. Určíme nejprve její poloměr a průsečíky kružnice s rovinou, podle níž jsou osy x a y souměrně sdruženy.

Označme S_x, S_y a S_z kolmé průměty bodu S do souřadnicových os x, y a z. Na obr. 28 je řez rovinou OSS_z. Platí $|OS_1| = 4\sqrt{2}$, $|OS| = 4\sqrt{3}$ (stěnová a tělesová úhlopříčka krychle o hraně délky 4) a $|OA| = \sqrt{54}$. Z pravoúhlého trojúhelníku OAS pomocí Pythagorovy věty určíme $\varrho = |SA| = \sqrt{6}$ a z podobnosti trojúhelníků $SAU \sim OSS_1$ dostaneme $|US| = 2$ a $|AU| = \sqrt{2}$. Odtud $A = [5,5,2]$ a (díky symetrii podle S) $D = [3,3,6]$.



Obr. 28



Obr. 29

Analogickým rozborem pro roviny OSS_y a OSS_x (nebo jen cyklickou záměnou, kterou lze vzhledem k symetrii uplatnit) nalezneme jejich průsečíky s kružnicí k:

$$B = [3,6,3], \quad E = [5,2,5] \quad \text{a} \quad C = [2,5,5], \quad F = [6,3,3].$$

Nalezené body A, B, C, D, E, F rozdělují kružnici k na šest oblouků (obr. 29 znázorňuje pohled na kružnici k ve směru osy z), pro jejichž body zřejmě platí:

$$
\begin{aligned}
[x,y,z] \in \widehat{AB} \quad &\Rightarrow \quad 2 \leqq z \leqq 3,\ \ 5 \leqq y \leqq 6,\ \ 3 \leqq x \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{BC} \quad &\Rightarrow \quad 2 \leqq x \leqq 3,\ \ 5 \leqq y \leqq 6,\ \ 3 \leqq z \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{CD} \quad &\Rightarrow \quad 2 \leqq x \leqq 3,\ \ 5 \leqq z \leqq 6,\ \ 3 \leqq y \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{DE} \quad &\Rightarrow \quad 2 \leqq y \leqq 3,\ \ 5 \leqq z \leqq 6,\ \ 3 \leqq x \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{EF} \quad &\Rightarrow \quad 2 \leqq y \leqq 3,\ \ 5 \leqq x \leqq 6,\ \ 3 \leqq z \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{FA} \quad &\Rightarrow \quad 2 \leqq z \leqq 3,\ \ 5 \leqq x \leqq 6,\ \ 3 \leqq y \leqq 5.
\end{aligned}
$$

Tím je ovšem tvrzení b) dokázáno.

A – III – 4

Pokud Adam nahradí koeficient u lineárního členu, získá trojčlen $ax^2 + (a+c)x + c$, který má dva různé reálné kořeny, právě když je jeho diskriminant $(a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2$ kladný. To nastane, právě když $a \neq c$. V tomto případě výše popsaným tahem vítězí Adam. Pokud Adam nahradí koeficient u absolutního členu, získá trojčlen $ax^2 + bx + (a+b)$ se dvěma různými reálnými kořeny, právě když je jeho diskriminant $b^2 - 4a(a+b) = \big(b(1+\sqrt{2}) + 2a\big)\big(b(\sqrt{2}-1) - 2a\big)$ kladný. Vzhledem k podmínkám úlohy to nastane, právě když $b(\sqrt{2}-1) > 2a$. Jelikož diskriminant kvadratického trojčlenu je symetrická funkce koeficientů u kvadratického a absolutního členu, nastane stejná situace i v případě, kdy Adam nahradí koeficient u kvadratického členu.

Shrňme úvahy z předchozího odstavce. Pokud $a \neq c$ nebo $b > 2a/(\sqrt{2}-1) = 2(\sqrt{2}+1)a$, může Adam prvním tahem vyhrát.

Předpokládejme, že $a = c$ a současně $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$. Po Adamovi je na tahu Boris, který bude nahrazovat koeficienty u jednoho z trojčlenů

a) $ax^2 + bx + (a+b)$ nebo $(a+b)x^2 + bx + a$, b) $ax^2 + 2ax + a$.

a) Pokud v tomto případě nahradí Boris koeficient u lineárního členu, dostane jeden z trojčlenů $ax^2 + a(a+b)x + (a+b)$ nebo $(a+b)x^2 + a(a+b)x + a$, jež mají oba diskriminant $a^2(a+b)^2 - 4a(a+b) = a(a+b)\big(a(a+b) - 4\big)$, který je vzhledem k podmínkám $a \geqq 2$, $b \geqq 2$ kladný. Proto Boris tímto tahem zvítězí.

b) Pokud Boris nahradí koeficient u lineárního členu, dostane kvadratický trojčlen $ax^2 + a^2x + a$, který má dva reálné kořeny, právě když je jeho diskriminant $a^4 - 4a^2 = a^2(a+2)(a-2)$ kladný. Vzhledem k podmínkám úlohy to nastane, právě když $a > 2$. Kdyby Boris v případě $a = 2$

nahradil koeficient u kvadratického nebo absolutního členu, zanechal by Adamovi jeden z trojčlenů $8x^2+4x+2$ nebo $2x^2+4x+8$. Z úvah v prvním odstavci plyne, že v takovém případě by zvítězil Adam. Proto v případě $a = 2$ musí Boris, aby neprohrál, nahradit koeficient u lineárního členu, a zanechá tak Adamovi trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Z odstavců a) a b) plyne: Pokud Adam nemůže zvítězit prvním tahem, může svým tahem zvítězit Boris, právě když $a \neq 2$. V případě $a = 2$ svým prvním tahem Boris neprohraje, jen když zanechá soupeři trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Zatím tedy neznáme vítěznou strategii některého z hráčů, pokud po prvním Borisově tahu zůstane trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. Z úvah v prvním odstavci vyplývá, že Adam neprohraje, pokud nahradí koeficient u lineárního členu, takže zanechá soupeři stejný trojčlen. Na tento trojčlen musí Boris, aby neprohrál, reagovat náhradou koeficientu u lineárního členu, tudíž i on zanechá stejný trojčlen a hra v tomto případě nemá při správné hře obou hráčů vítěze.

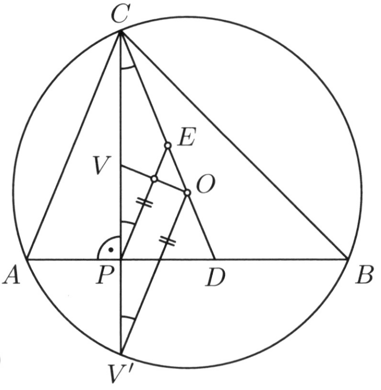
Závěr. Pro trojčlen $ax^2 + bx + c$ platí:

- ▷ Pokud $a \neq c$ nebo $b > 2(\sqrt{2}+1)a$, má vítěznou strategii Adam a může prvním tahem vyhrát.
- ▷ Pokud $a = c > 2$ a $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$, má vítěznou strategii Boris a může prvním tahem vyhrát.
- ▷ Pokud $a = c = 2$ a $b \leqq 2(\sqrt{2} + 1)a$, musejí oba hráči, aby neprohráli, v každém tahu zanechávat trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. V tomto případě žádný z hráčů nemá vítěznou strategii.

A – III – 5

Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, leží celá úsečka OV na přímce EP a tvrzení platí triviálně. Můžeme tedy předpokládat, že $|AC| \neq |BC|$, takže přímky CV, CO jsou různé.

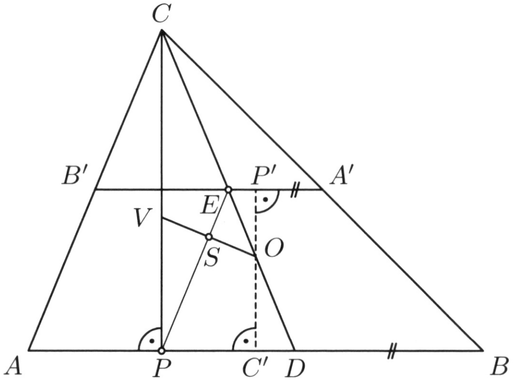
Jak známo, bod V' souměrně sdružený s průsečíkem výšek V podle strany AB uvažovaného trojúhelníku ABC leží na kružnici tomuto trojúhelníku opsané, proto je bod P středem úsečky VV' (obr. 30). Trojúhelník $CV'O$ je rovnoramenný s hlavním vrcholem O, a protože střed E úsečky CD je současně středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku CPD s přeponou CD, je i trojúhelník CPE rovnoramenný. Oba rovnoramenné trojúhelníky $CV'O$ a CPE jsou přitom stejnolehlé (se středem stejnolehlosti v bodě C) — shodují se totiž ve společném úhlu při základně a body C, P, V' leží v přímce stejně jako body C, E, O. Je tudíž $PE \parallel V'O$.



Obr. 30

Protože P je středem strany VV' trojúhelníku $V'OV$, leží na přímce PE střední příčka tohoto trojúhelníku, která je rovnoběžná s jeho stranou $V'O$. Přímka PE tedy protíná úsečku OV v jejím středu, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme S střed úsečky OV a A', B', C' postupně středy stran BC, CA, AB. Bod O je zřejmě průsečíkem výšek ostroúhlého trojúhelníku $A'B'C'$, který je podobný trojúhelníku ABC. Proto O leží uvnitř trojúhelníku $A'B'C'$ a bod E leží uvnitř úsečky OC (na jejím průsečíku s příčkou $A'B'$). Protože S leží uvnitř úsečky OV a P leží mimo úsečku CV (obr. 31), k důkazu toho, že body P, S, E leží v jedné



Obr. 31

přímce, stačí podle Menelaovy věty použité na trojúhelník VOC ukázat, že součin
$$s = \frac{|VS|}{|SO|} \cdot \frac{|OE|}{|EC|} \cdot \frac{|CP|}{|PV|} \tag{1}$$
je roven 1. Avšak $|VS| = |SO|$, a pokud označíme P' patu kolmice spuštěné z bodu O na příčku $A'B'$, plyne z podobnosti trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ rovnost $|CP| : |VP| = |C'P'| : |OP'|$ (neboť O je průsečíkem výšek trojúhelníku $A'B'C'$). Navíc $|EC| = |DE|$, takže po dosazení do (1) dostáváme
$$s = 1 \cdot \frac{|OE|}{|DE|} \cdot \frac{|C'P'|}{|OP'|} = 1.$$
Poslední rovnost platí díky tomu, že bod O dělí každou úsečku s jedním krajním bodem na straně AB a druhým na příčce $A'B'$ (rovnoběžné s AB) ve stejném poměru, tj. $|OE| : |DE| = |OP'| : |C'P'|$.

Jiné řešení. Použijme označení bodů zavedené v předešlém řešení. Odlišným způsobem ukážeme, že součin (1) je roven 1. Označíme-li velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC obvyklým způsobem, bude $|\sphericalangle COA'| = \alpha$, $|\sphericalangle OA'E| = 90° - \beta$, $|\sphericalangle EA'C| = \beta$, $|\sphericalangle OCA'| = 90° - \alpha$, takže ze sinových vět v trojúhelnících EOA' a ECA' máme
$$\frac{|OE|}{|EC|} = \frac{\dfrac{|EA'|}{\sin\alpha} \cdot \sin(90° - \beta)}{\dfrac{|EA'|}{\sin(90° - \alpha)} \cdot \sin\beta} = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta.$$
Avšak $|\sphericalangle AVP| = \beta$, odkud $|VP| = |AP| / \operatorname{tg}\beta$; a zároveň $|CP| = |AP| \cdot \operatorname{tg}\alpha$, tedy $|CP| : |VP| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$. Dohromady dostáváme
$$s = 1 \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1.$$

Jiné řešení. Zvolme v rovině kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě P, a s x-ovou osou na přímce AB. Je tedy $P = [0,0]$ a pro vhodná $a < 0$, $b > 0$ a $c > 0$ platí $A = [a,0]$, $B = [b,0]$, $C = [0,c]$. Postupně vypočítáme souřadnice bodů V, O, D, E a středu S úsečky VO (zřejmě žádný ze jmenovatelů není nulový):
$$V = \left[0, -\frac{ab}{c}\right], \quad O = \left[\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right], \quad D = \left[\frac{c^2(a+b)}{c^2-ab}, 0\right],$$
$$E = \left[\frac{c^2(a+b)}{2(c^2-ab)}, \frac{c}{2}\right], \quad S = \left[\frac{a+b}{4}, \frac{c^2-ab}{4c}\right].$$

Ověření, že bod S leží na přímce PE, se tak redukuje na ověření triviální identity
$$\frac{c^2(a+b)}{2(c^2-ab)} : \frac{c}{2} = \frac{a+b}{4} : \frac{c^2-ab}{4c}.$$

Jiné řešení. Zvolme v rovině kartézskou soustavu souřadnic tak, že $A=[0,0]$, $B=[1,0]$, $C=[c_1,c_2]$, přičemž $c_2>0$, $0<c_1<1$. Potom
$$O=\left[\frac{1}{2},\frac{c_1^2-c_1+c_2^2}{2c_2}\right],\ V=\left[c_1,\frac{c_1-c_1^2}{c_2}\right],\ S=\left[\frac{c_1}{2}+\frac{1}{4},\frac{c_2^2+c_1-c_1^2}{4c_2}\right],$$
$$P=[c_1,0],\ D=\left[\frac{c_1^2+c_2^2-c_1^3-c_1c_2^2}{c_2^2+c_1-c_1^2},0\right],\ E=\left[\frac{2c_1^2-2c_1^3+c_2^2}{2\left(c_1-c_1^2+c_2^2\right)},\frac{c_2}{2}\right].$$
Stačí už jen ověřit lineární závislost vektorů $S-P$ a $E-P$, tedy rovnost
$$\frac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{c_1}{2}}{\dfrac{c_2^2+c_1-c_1^2}{4c_2}}=\frac{\dfrac{2c_1^2-2c_1^3+c_2^2}{2\left(c_1-c_1^2+c_2^2\right)}-c_1}{\dfrac{c_2}{2}}.$$

Jiné řešení. Je-li $b=|AC|=|BC|=a$, leží všechny čtyři body P, E, O, V na jedné přímce a na ní leží i střed úsečky OV.

Nechť tedy například $b>a$. Platí $|\sphericalangle ACO|=|\sphericalangle PCB|=90^\circ-\beta$, a tedy $|\sphericalangle DCP|=\beta-\alpha$. Bod E je střed přepony CD pravoúhlého trojúhelníku CDP, proto $|\sphericalangle DPE|=|\sphericalangle PDE|=90^\circ+\alpha-\beta$.

Označme r poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, S střed úsečky OV a F, G paty kolmic z bodů O, S na přímku AB. Potom $|OF|=r\cos\gamma=\frac{1}{2}c\operatorname{cotg}\gamma$, $|PB|=a\cos\beta$, $|PV|=a\cos\beta\operatorname{cotg}\alpha$, $|SG|=\frac{1}{2}(|OF|+|PV|)=\frac{1}{4}c\operatorname{cotg}\gamma+\frac{1}{2}a\cos\beta\operatorname{cotg}\alpha$, $|GP|=\frac{1}{2}(|FB|-|PB|)=\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}a\cos\beta$,
$$\operatorname{tg}|\sphericalangle GPS|=\frac{|SG|}{|GP|}=\frac{\frac{1}{4}c\operatorname{cotg}\gamma+\frac{1}{2}a\cos\beta\operatorname{cotg}\alpha}{\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}a\cos\beta}=$$
$$=\frac{\dfrac{1}{4}c\operatorname{cotg}\gamma+\dfrac{1}{2}\dfrac{c}{\sin\gamma}\cos\beta\cos\alpha}{\dfrac{1}{4}c-\dfrac{1}{2}\dfrac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}\cos\beta}=\frac{\cos\gamma+2\cos\alpha\cos\beta}{\sin\gamma-2\sin\alpha\cos\beta}=$$
$$=\frac{-\cos(\alpha+\beta)+2\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}=\operatorname{cotg}(\beta-\alpha)=\operatorname{tg}|\sphericalangle DPE|;$$
odtud $|\sphericalangle GPS|=|\sphericalangle DPE|$, a tudíž body S, P a E leží na jedné přímce.

A – III – 6

Ukážeme, že jediná funkce f, která splňuje podmínky úlohy, je

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Ze zadání plyne, že $f(y) \neq 0$ pro libovolné $y > 0$, tudíž

$$f\bigl(x\,f(y)\bigr) = f(x) - \frac{1}{xy\,f(y)}. \tag{1}$$

Označme $f(1) = a > 0$. Volbou $x = 1$, resp. $y = 1$ v rovnici (1) postupně dostaneme

$$f\bigl(f(y)\bigr) = f(1) - \frac{1}{y\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} \quad (y \in \mathbb{R}^+), \tag{2}$$

$$f(ax) = f(x) - \frac{1}{ax} \quad (x \in \mathbb{R}^+). \tag{3}$$

Volbou $x = 1$ v rovnici (3) obdržíme

$$f(a) = f(1) - \frac{1}{a} = a - \frac{1}{a}. \tag{4}$$

Volbou $x = a$ v rovnici (1) a užitím (4) dostaneme

$$f\bigl(a\,f(y)\bigr) = f(a) - \frac{1}{ay\,f(y)} = a - \frac{1}{a} - \frac{1}{ay\,f(y)} \quad (y \in \mathbb{R}^+),$$

zatímco pomocí vztahů (3) a (2) můžeme levou stranu předchozí rovnice upravit na tvar

$$f\bigl(a\,f(y)\bigr) = f\bigl(f(y)\bigr) - \frac{1}{a\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} - \frac{1}{a\,f(y)}.$$

Porovnáním pravých stran předchozích dvou rovnic vypočítáme

$$f(y) = 1 + \frac{a-1}{y} \quad (y \in \mathbb{R}^+). \tag{4}$$

Pokud tedy existuje řešení dané rovnice, musí mít tvar (4). Dosazením do rovnice v zadání a následnou úpravou zjistíme, že pro všechna kladná reálná x a y má platit $(a-1)^2 = 1$. Vzhledem k předpokladu $a > 0$

je tato rovnice splněna, právě když $a = 2$. Tímto krokem jsme zároveň provedli zkoušku správnosti nalezeného řešení.

Jiné řešení. Vztahy (1) a (2) z předchozího řešení můžeme využít i následujícím způsobem. Pro libovolné reálné číslo t je $f(t) > 0$. Volbou $x = f(t)$ v rovnici (1) obdržíme pomocí (2)

$$f\big(f(t)\, f(y)\big) = f\big(f(t)\big) - \frac{1}{f(t)\, y\, f(y)} = a - \frac{1}{t\, f(t)} - \frac{1}{f(t)\, y\, f(y)}, \quad t, y \in \mathbb{R}^+.$$

Záměnou proměnných t a y odtud získáme

$$f\big(f(y)\, f(t)\big) = a - \frac{1}{y\, f(y)} - \frac{1}{f(y)\, t\, f(t)} \quad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Jelikož výrazy na levých stranách předchozích dvou rovnic jsou shodné, musí být shodné i výrazy na pravých stranách, takže platí

$$a - \frac{1}{t\, f(t)} - \frac{1}{f(t)\, y\, f(y)} = a - \frac{1}{y\, f(y)} - \frac{1}{f(y)\, t\, f(t)} \quad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Úpravou dostaneme

$$t\big(f(t) - 1\big) = y\big(f(y) - 1\big) \quad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Volbou $t = 1$ v předchozí rovnici získáme rovnost

$$f(y) = 1 + \frac{a-1}{y} \quad (y \in \mathbb{R}^+),$$

kterou využijeme stejně jako v předešlém řešení.