60. ročník Matematické olympiády na středních školách

Kategorie Z9

In: Zdeněk Dvořák (editor); Zbyněk Falt (editor); Karel Horák (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 60. ročník Matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2010/2011. 52. Mezinárodní matematická olympiáda. 5. Středoevropská matematická olympiáda. 23. Mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. pp. 137–141.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405220

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Kategorie Z9

Texty úloh

Z9 – I – 1

Pan Vlk čekal na zastávce před školou na autobus. Z okna slyšel slova učitele:

„Jaký povrch může mít pravidelný čtyřboký hranol, víte-li, že délky všech jeho hran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly a že jeho objem je…“

Toto důležité číslo pan Vlk neslyšel, protože zrovna projelo okolo auto. Za chvíli slyšel žáka hlásícího výsledek $918\,\mathrm{cm}^2$. Učitel na to řekl:

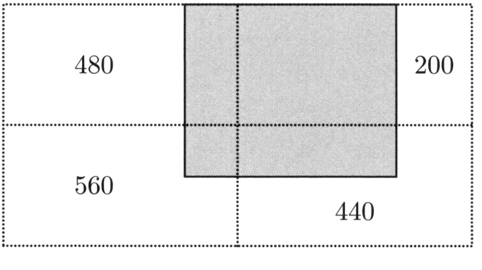
„Ano, ale úloha má celkem čtyři řešení. Hledejte dál.“

Více se pan Vlk už nedozvěděl, neboť nastoupil do svého autobusu. Protože matematika byla vždy jeho hobby, vytáhl si v autobuse tužku a papír a po čase určil i zbylá tři řešení učitelovy úlohy. Spočítejte je i vy.

(*L. Šimůnek*)

Z9 – I – 2

Na obr. 35 jsou tečkovanou čarou znázorněny hranice čtyř stejně velkých obdélníkových parcel. Šedou barvou je vyznačena zastavěná plocha. Ta má tvar obdélníku, jehož jedna strana tvoří zároveň hranice parcel. Za-



Obr. 35

psaná čísla vyjadřují obsah nezastavěné plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2. Vypočítejte obsah celkové zastavěné plochy. (*L. Šimůnek*)

Z9 – I – 3

Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu vylisovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně? (*M. Volfová*)

Z9 – I – 4

Pan Rychlý a pan Louda ve stejnou dobu vyšli na tutéž turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku na chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí? (*M. Volfová*)

Z9 – I – 5

Kružnici se středem S a poloměrem 12 cm jsme opsali pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a vepsali pravidelný šestiúhelník $TUVXYZ$ tak, aby bod T byl středem strany BC. Vypočítejte obsah a obvod čtyřúhelníku $TCUS$. (*M. Krejčová*)

Z9 – I – 6

Petr a Pavel česali v sadě jablka a hrušky. V pondělí snědl Petr o 2 hrušky více než Pavel a o 2 jablka méně než Pavel. V úterý Petr snědl o 4 hrušky méně než v pondělí. Pavel snědl v úterý o 3 hrušky více než Petr a o 3 jablka méně než Petr. Pavel snědl za oba dny 12 jablek a v úterý snědl stejný počet jablek jako hrušek. V úterý večer oba chlapci zjistili, že počet jablek, která společně za oba dny snědli, je stejně velký jako počet společně snědených hrušek. Kolik jablek snědl Petr v pondělí a kolik hrušek snědl Pavel v úterý? (*L. Hozová*)

Z9 – II – 1

Čtyřmístným palindromem nazveme každé čtyřmístné přirozené číslo, které má na místě jednotek stejnou číslici jako na místě tisíců a které zároveň má na místě desítek stejnou číslici jako na místě stovek. Kolik existuje dvojic čtyřmístných palindromů, jejichž rozdíl je 3 674?

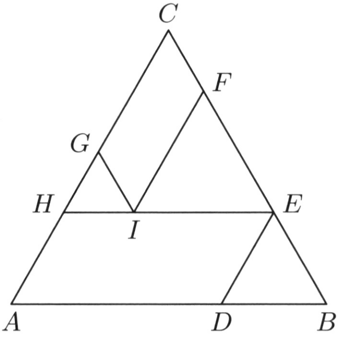
(*L. Šimůnek*)

Z9 – II – 2

Na následujícím obr. 36 jsou rovnostranné trojúhelníky ABC, DBE, IEF a HIG. Obsahy trojúhelníků DBE, IEF a HIG jsou v poměru $9:16:4$. V jakém poměru jsou

1. délky úseček HI a IE,
2. obsahy trojúhelníků ABC a HEC?

(*K. Pazourek*)



Obr. 36

Z9 – II – 3

Máme čtverce $ABCD$ a $KLMN$. Délky stran obou čtverců jsou v centimetrech vyjádřeny celým číslem. Bod K je vnitřním bodem úsečky AB, bod L leží v bodě B a bod M je vnitřním bodem úsečky BC. Obsah šestiúhelníku $AKNMCD$ je $225\,\mathrm{cm}^2$. Jaký může být obvod tohoto šestiúhelníku? Najděte všechny možnosti.

(*L. Šimůnek*)

Z9 – II – 4

Martina si vymyslela postup na výrobu číselné posloupnosti. Začala číslem 128. Z něj odvodila další člen posloupnosti takto: $8^2 + 5 = 64 + 5 = 69$. Potom pokračovala stejným způsobem dále a z čísla 69 dostala $9^2 + 5 = 81 + 5 = 86$. Vždy tedy z předchozího členu posloupnosti vezme číslici na místě jednotek, umocní ji na druhou a k této mocnině přičte konstantu 5.

1. Jaké je 2011. číslo takto vzniklé posloupnosti?
2. Martina opět začala číslem 128, ale místo čísla 5 zvolila jako konstantu jiné přirozené číslo. Tentokrát jí na 2011. místě vyšlo číslo 16. Jakou konstantu zvolila v tomto případě? (*M. Dillingerová*)

Z9 – III – 1

Pořadatelům výstavy „Na Měsíc a ještě dál" se po prvním výstavním dni zdálo, že mají malou návštěvnost, proto snížili vstupné o 12 Kč. Tím se sice druhý den zvýšil počet návštěvníků o 10 %, ale celková denní tržba se snížila o 5 %. Kolik korun stálo vstupné po slevě? (*M. Petrová*)

Z9 – III – 2

Lichoběžník $ABCD$, kde strana AB je rovnoběžná se stranou CD, je rozdělen úhlopříčkami, které se protínají v bodě M, na čtyři části. Určete jeho obsah, víte-li, že trojúhelník AMD má obsah $8\,\mathrm{cm}^2$ a trojúhelník DCM má obsah $4\,\mathrm{cm}^2$. (*M. Volfová*)

Z9 – III – 3

Ctibor a Míla počítali ze sbírky tutéž úlohu. Byly zadány tři délky hran čtyřbokého hranolu v milimetrech a úkolem bylo vypočítat jeho objem a povrch. Ctibor nejprve převedl zadané délky na centimetry. Počítalo se mu tak snáze, protože i po převodu byly všechny délky vyjádřeny celými čísly. Oběma vyšly správné výsledky, Míle v mm^3 a mm^2, Ctiborovi v cm^3 a cm^2. Mílin výsledek v mm^3 byl o 17 982 větší než Ctiborův výsledek v cm^3. Mílin výsledek v mm^2 byl o 5 742 větší než Ctiborův výsledek v cm^2. Určete délky hran hranolu. (*L. Šimůnek*)

Z9 – III – 4

Na tabuli jsou napsána pouze čísla 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{6}$. Na tabuli můžeme připsat součet nebo součin libovolných dvou čísel z tabule. Je možné takovým připisováním dosáhnout toho, aby se na tabuli objevila čísla a) $\frac{1}{60}$, b) $\frac{2011}{375}$, c) $\frac{1}{7}$? (*V. Bachratá, J. Mazák*)