60. ročník Matematické olympiády na středních školách

Přípravná soustředění před 52. MMO

In: Zdeněk Dvořák (editor); Zbyněk Falt (editor); Karel Horák (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 60. ročník Matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2010/2011. 52. Mezinárodní matematická olympiáda. 5. Středoevropská matematická olympiáda. 23. Mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. pp. 142–145.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405221

Přípravná soustředění před 52. MMO

V průběhu 60. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 4. do 8. dubna 2011 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 9 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Tomáš Zeman	8/8	G J. Keplera, Praha 6	83
Anh Dung Le	3/6	G Tachov	78,5
Michael Bílý	8/8	G J. Vrchlického, Klatovy	76
Miroslav Koblížek	8/8	G Žamberk	68,5
Štěpán Šimsa	6/8	G J. Jungmanna, Litoměřice	65
Dan Šafka	8/8	G J. Keplera, Praha 6	60
Jakub Solovský	4/4	G M. Koperníka, Bílovec	59
Jan Kuchařík	3/4	G Jihlava	57
Ondřej Bartoš	7/8	G Žďár nad Sázavou	56,5

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Jaroslav Zhouf* (4. 4.)
dr. *Pavel Calábek* (5. 4.)
dr. *Martin Panák* (6. 4.)
dr. *Jaroslav Švrček* (7. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (8. 4.)

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Dekadické zápisy přirozených čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ neobsahují nuly, jedno z druhého se získá pouze změnou pořadí cifer a je

$$a_k \equiv k \pmod{11} \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Určete nejmenší možné takové číslo a_0.

2. Vrcholy krychle máme očíslovat čísly od 1 do 8, každý vrchol jiným číslem, a pro každou hranu vypočítat součin čísel na jejích koncích. Jak mají být vrcholy očíslovány, aby součet 12 uvedených součinů byl co nejmenší?

3. Je dán trojúhelník ABC. Použitím pouze oboustranného přímého pravítka sestrojte nejvýše pomocí sedmi přímek bod D na straně AB takový, aby $|AD| : |BD| = |BC| : |AC|$.

4. Na tabuli na konci vyučovací hodiny zůstal kousek grafu funkce $y = \operatorname{tg} x$ a kousek osy x z kartézské soustavy souřadnic. Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úsečku délky 1.

5. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je funkce, pro niž $f(1) = 1$ a $f(n) = n - f\big(f(n-1)\big)$ pro libovolné přirozené $n \geqq 2$. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí $f\big(n + f(n)\big) = n$.

6. Nechť n je přirozené číslo. Najděte nejmenší hodnotu výrazu

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2,$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou navzájem různá celá čísla.

7. Mezi $n + 1$ hromádkami ($n \geqq 3$) označenými $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a O můžeme provádět následující přesuny karet:

(i) Jestliže na hromádce A_i jsou alespoň tři karty, potom z hromádky A_i tři karty odebereme a na hromádky A_{i-1}, A_{i+1} a O (při označení $A_0 = A_n$, $A_1 = A_{n+1}$) přidáme po jedné kartě.

(ii) Jestliže na hromádce O je alespoň n karet, potom z hromádky O n karet odebereme a na každou z hromádek A_i po jedné kartě přidáme.

Dokažte, že jestliže na tyto hromádky libovolně rozmístíme alespoň $n^2 + 3n + 1$ karet, můžeme popsanými operacemi dosáhnout stavu, kdy na každé z hromádek je alespoň $n + 1$ karet.

8. Nechť $\mathbb{R}^+$ je množina všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna kladná reálná čísla x a y platí

$$f(x)f\big(y\,f(x)\big) = f(x+y).$$

9. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme po řadě D, E, F paty jeho výšek v_a, v_b, v_c, dále označme P jeden z průsečíků kružnice jemu opsané s přímkou EF a poté průsečík přímek BP a FD jako Q. Dokažte, že $|AP| = |AQ|$.

10. Na koncertě bude zpívat postupně 20 zpěváků. Je možné, aby bylo právě 2 010 možností uspořádání jejich vystoupení tak, aby bylo vyhověno všem jejich přáním? Přání každého sestává z množiny kolegů (i prázdné), kteří by měli vystupovat před ním.

11. Nekonečná posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ je dána vztahy $x_1 = 1$ a $x_{2k} = -x_k$, $x_{2k-1} = (-1)^{k+1}x_k$ pro všechna $k \geqq 1$. Ukažte, že $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq 0$ pro všechna $n \geqq 1$.

12. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník a P průsečík jeho úhlopříček. Označme E, F, G, H po řadě paty kolmic z bodu P ke stranám AB, BC, CD, DA. Dokažte, že přímky EH, BD a FG jsou buď rovnoběžné, nebo se protínají v jednom společném bodě.

13. V rovině je dána kružnice a bod C v její vnější oblasti. Určete množinu průsečíků výšek (ortocenter) všech trojúhelníků ABC, kde AB je průměr dané kružnice.

14. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, kde D je středem jeho základny BC. Bod E je takovým vnějším bodem daného trojúhelníku, pro který platí $CE \perp AB$ a současně $|BE| = |BD|$. Nechť M je středem úsečky BE a F je takový bod kratšího oblouku AD kružnice opsané trojúhelníku ABD, pro nějž platí $MF \perp BE$. Dokažte, že $ED \perp FD$.

15. Napište příklad kvadratické rovnice s kořenem $\cos \frac{2}{5}\pi$, která má celočíselné koeficienty, popřípadě uveďte „neexistuje“.

16. Vypište všechna řešení $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) &= 1, \\ x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 &= xyz(x+y+z)^3. \end{aligned}$$

17. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ udejte aspoň jedno řešení $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ rovnice

$$x^3 + y^3 + 1 = 729^{2n+1}.$$

18. Určete nejmenší počet polí, které je nutné označit na čtvercové šachovnici 10×10, aby žádná čtyři z neoznačených polí nebyla rohovými poli některé podšachovnice $p \times q$, kde $1 < p \leqq 10$ a $1 < q \leqq 10$.