5. středoevropská matematická olympiáda

Pátá středoevropská matematická olympiáda (Midle European Mathematical Olympiad, zkráceně MEMO) se uskutečnila 1. 9.–7. 9. 2011 v chorvatském Varaždinu za účasti šedesáti studentů z deseti zemí středoevropského regionu, jmenovitě z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska. Soutěž je určena studentům středních škol, kteří se v daném kalendářním roce neúčastnili mezinárodní matematické olympiády (MMO). Výjimku tvoří slovinští účastníci, kteří vzhledem k relativně malému počtu obyvatel země nejsou kvůli případné účasti na MMO vylučováni.

České družstvo tvořili *Ondřej Bartoš* z Gymnázia Žďár nad Sázavou, *Lubomír Grund* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Jan Kuchařík* z Gymnázia Jana Masaryka v Jihlavě, *Dominik Steinhauser* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Jan Stopka* z Gymnázia Brno na tř. Kpt. Jaroše a *Dominik Teiml* z The English College v Praze. Vedoucím družstva byl dr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Město Varaždin je staré chorvatské město, které bývalo dokonce hlavním městem Chorvatska. Jeho populace dnes čítá na 50 tisíc obyvatel. První den olympiády měli soutěžící na programu zábavnou seznamovací hru spojenou s poznáváním památek města, zatímco vedoucí výprav vybírali příklady pro soutěž z návrhů zaslaných jednotlivými účastnickými zeměmi. Večer pak proběhlo v prostorách Fakulty informatiky, varaždinské části Univerzity Záhřeb, slavnostní zahájení soutěže.

Druhý den byla na pořadu soutěž jednotlivců v prostorách jedné z varaždinských základních škol. Každý z účastníků řešil po dobu pěti hodin čtyři příklady. Třetího dne se uskutečnila týmová soutěž, ve které mělo každé národní družstvo k dispozici jednu místnost, kde pak společně řešilo po dobu pěti hodin osm úloh. Již v sobotu večer započala koordinace oprav úloh (úlohy jsou opravovány vedoucími národních týmů a nezávisle i týmem opravovatelů zajištěným organizátory; při koordinaci se výsledky oprav porovnají a případné neshody se vyřeší) a pokračovala i během neděle. V pondělí dopoledne se jury domluvila na rozdělení medailí, které se řídí podobnými pravidly jako na mezinárodní matematické olympiádě. V úterý byl program olympiády zakončen exkurzí na známý chorvatský hrad Trakoščan a návštěvou městečka Krapina, kde se nacházejí zbytky osídlení neandertálským člověkem. Večerního slavnostního zakončení se zúčastnila řada významných hostů, z nichž jmenujme náměstkyni chorvatského ministra školství Dijanu Vicanovou a rektora Univerzity Záhřeb Aleksu Bjeliše.

Výsledky českého družstva byly následující: Ondřej Bartoš a Dominik Steinhauser získali bronzové medaile, Lubomír Grund a Jan Stopka pak získali čestné uznání za jeden bezchybně vyřešený příklad. V týmovém součtu bodů, které získali jednotliví účastníci daného týmu v individuální soutěži, jsme byli pátí nejlepší. Vlastní týmová soutěž se však českému družstvu příliš nevyvedla, když skončilo osmé. Z vítězství se radoval polský tým, který jako jediný získal maximální možný počet bodů. Plného bodového zisku dosáhl i vítěz soutěže jednotlivců, *Wojciech Nadara*, rovněž z Polska.

Umístění v soutěži jednotlivců		**Body za úlohu** 1	2	3	4	**Body**	**Cena**
1.	Wojciech Nadara (POL)	8	8	8	8	32	zlato
2.	Attila Szabó (HUN)	8	8	7	8	31	zlato
	⋮						
27.–30.	Ondřej Bartoš	3	3	0	8	14	bronz
	Dominik Steinhauser	6	6	2	0	14	bronz
32.–33.	Jan Kuchařík	5	0	7	0	12	
38.–40.	Jan Stopka	1	0	8	0	9	H.M.
41.–43.	Dominik Grund	8	0	0	0	8	H.M.
44.–46.	Dominik Teiml	3	0	2	2	7	
	Celkem ČR	26	9	19	10	64	

Detailní výsledky českých studentů včetně bodových zisků za jednotlivé úlohy lze vyčíst z předchozí tabulky, přehled výsledků všech zemí v soutěži jednotlivců je v druhé tabulce. Země jsou v ní seřazeny podle součtu bodů celého družstva podobně jako při neoficiálním pořadí zemí na MMO. Výsledky národních družstev v týmové soutěži pak najdete v tabulce následující.

	I	II	III	HM	body
Polsko	3	2	1	–	150
Maďarsko	2	3	1	–	147
Německo	1	3	1	1	125
Chorvatsko	–	2	2	–	95
Česká republika	–	–	2	2	64
Slovensko	–	–	2	2	61
Rakousko	–	–	2	–	55
Litva	–	–	1	–	50
Slovinsko	–	–	1	1	41
Švýcarsko	–	–	1	–	31

	Body za úlohu								**Body**
Umístění v týmové soutěži	1	2	3	4	5	6	7	8	
1. Polsko	8	8	8	8	8	8	8	8	64
2. Maďarsko	8	0	8	3	8	8	8	8	51
3. Německo	8	0	8	0	8	8	8	8	48
4. Chorvatsko	2	8	8	0	3	8	8	0	37
5. Slovensko	1	0	8	0	8	6	8	0	31
6. Litva	6	0	8	0	8	0	8	0	30
7. Slovinsko	2	0	8	0	4	3	8	0	25
8. *Česká republika*	2	1	4	0	0	5	8	3	23
9. Rakousko	1	0	6	0	5	2	8	0	22
10. Švýcarsko	2	0	6	0	0	0	8	0	16

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Soutěž jednotlivců

1. Na tabuli je napsáno číslo 44. Celé číslo a napsané na tabuli můžeme nahradit čtyřmi různými celými čísly a_1, a_2, a_3, a_4, jejichž aritmetický průměr $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je roven číslu a. V jednom kroku současně nahradíme všechna čísla na tabuli výše popsaným způsobem. Po 30 krocích dostaneme na tabuli $n = 4^{30}$ celých čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Dokažte, že

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geqq 2\,011.$$

(*Chorvatsko*)

2. Je dáno přirozené číslo $n \geqq 3$. Jeníček a Mařenka hrají následující hru: Nejdříve Jeníček očísluje strany pravidelného n-úhelníku čísly od 1 do n (v libovolném pořadí; každé číslo použije právě jednou). Potom Mařenka zvolí $n - 3$ neprotínajících se úhlopříček rozdělujících daný n-úhelník na trojúhelníky. Všechny zvolené úhlopříčky pak označí číslem 1 a dovnitř každého z trojúhelníků napíše součin čísel na jeho stranách. Součet těchto

$n-2$ součinů označme S. Jaká bude hodnota součtu S, jestliže snahou Jeníčka je, aby byl součet co největší, a Mařenka se snaží, aby součet byl co nejmenší, přičemž oba dělají nejlepší možné volby? (*Chorvatsko*)

3. V rovině jsou dány kružnice k_1 a k_2 o středech I_1 a I_2, jež se protínají ve dvou bodech A a B. Předpokládejme, že úhel I_1AI_2 je tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D. Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Označme E střed toho oblouku CD kružnice k_3, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou na sebe kolmé. (*Slovinsko*)

4. Nechť k a m $(k > m)$ jsou kladná celá čísla taková, že číslo $km(k^2-m^2)$ je dělitelné číslem $k^3 - m^3$. Dokažte, že $(k-m)^3 > 3km$. (*Polsko*)

Soutěž družstev

5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že rovnost

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x+y) + x^2 + y^2$$

platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. (*Chorvatsko*)

6. Nechť kladná reálná čísla a, b, c vyhovují vztahu

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Dokažte, že pak

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

(*Chorvatsko*)

7. Pro přirozené číslo $n \geqq 3$ označme M množinu

$$\{(x,y)\colon x,y \in \mathbb{Z},\ 1 \leqq x \leqq n,\ 1 \leqq y \leqq n\}$$

bodů roviny ($\mathbb{Z}$ značí množinu všech celých čísel). Určete největší možný počet prvků podmnožiny $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{M}$, ve které žádné tři body netvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. (*Maďarsko*)

8. Nechť $n \geqq 3$ je přirozené číslo. Na soutěž podobnou MEMO přijelo $3n$ účastníků, kteří hovoří n různými jazyky, každý účastník mluví právě třemi různými jazyky. Dokažte, že z nich lze vybrat aspoň $\lceil \frac{2}{9}n \rceil$ jazyků tak, že žádný účastník nehovoří více než dvěma z nich. (Zápis $\lceil x \rceil$ označuje nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x.) (*Chorvatsko*)

9. Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má shodné strany. Úhlopříčky AD a EC se protínají v bodě S, přičemž $|\sphericalangle ASE| = 60°$. Dokažte, že pětiúhelník $ABCDE$ má dvě rovnoběžné strany. (*Slovensko*)

10. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme po řadě B_0 a C_0 paty výšek z vrcholů B a C. Nechť pro vnitřní bod X trojúhelníku ABC je přímka BX tečnou kružnice opsané trojúhelníku AXC_0 a přímka CX tečnou kružnice opsané trojúhelníku AXB_0. Dokažte, že přímky AX a BC jsou na sebe kolmé. (*Česká republika*)

11. Nechť pro neprázdné navzájem disjunktní množiny A a B platí $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Ukažte, že existují čísla $a \in \mathsf{A}$ a $b \in \mathsf{B}$ tak, že číslo $a^3 + ab^2 + b^3$ je dělitelné 11. (*Polsko*)

12. Kladné celé číslo n nazveme *úžasným*, jestliže existují kladná celá čísla a, b, c, pro která

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Dokažte, že existuje 2 011 po sobě jdoucích úžasných čísel. (Zápis (m, n) značí největší společný dělitel přirozených čísel m a n.) (*Litva*)

Řešení úloh

1. Nahrazením jednoho z čísel na tabuli čtveřicí popsanou v zadání se zvětší aritmetický průměr druhých mocnin čísel na tabuli. Dokážeme, že toto zvětšení je dostatečně velké. Začneme pomocným tvrzením.

Lemma. Pokud a_1, a_2, a_3, a_4 jsou čtyři navzájem různá celá čísla taková, že jejich aritmetický průměr $a = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je také celé číslo, tak platí

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4} - a^2 \geqq \frac{5}{2}.$$

Důkaz. Levá strana dokazované nerovnosti se dá přepsat takto:

$$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{4}-a^2=$$
$$=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-2a(a_1+a_2+a_3+a_4)+4a^2}{4}=$$
$$=\frac{(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+(a_3-a)^2+(a_4-a)^2}{4}.$$

Čísla a_1-a, a_2-a, a_3-a, a_4-a jsou navzájem různá celá čísla se součtem 0. Pokud žádné z nich není nulové, bude součet jejich čtverců alespoň $1^2+(-1)^2+2^2+(-2)^2=10$. Pokud jedno z nich je nula, musí jiné z nich mít absolutní hodnotu nejméně 3; v tomto případě bude součet čtverců alespoň $3^2+1^2+(-1)^2=11$. V obou případech je platnost lemmatu evidentní.

Vraťme se k dokazovanému tvrzení. Označme S_k aritmetický průměr druhých mocnin čísel na tabuli po provedení k kroků. Použijeme-li dokázané lemma na čtveřice čísel vzniklé nahrazením každého ze 4^k čísel, která jsou na tabuli po k krocích, dostaneme, že $S_{k+1}-S_k \geqq 5/2$ pro každé $k \geqq 0$. Proto

$$S_{30} \geqq S_0+30\cdot\frac{5}{2}=44^2+75=2\,011.$$

2. Ukážeme, že $S=\frac{1}{2}(n^2+3n-6)$ pro všechna $n \geqq 3$. Pro $n=3$ je to zjevně pravda, dále budeme uvažovat $n>3$.

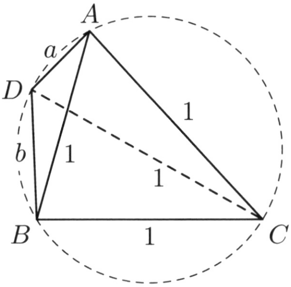
Podívejme se na situaci nejprve z pohledu Mařenky. V každé provedené triangluaci bude přesně $n-2$ trojúhelníků. Každý z nich bude mít nejvýše dvě strany na obvodu původního mnohoúhelníku a trojúhelníky obsahující dvě strany původního mnohoúhelníku musejí být alespoň dva. Ukážeme, že pro Mařenku je nejlepší zvolit triangulaci, ve které jsou zmiňované trojúhelníky právě dva.

Nazvěme trojúhelník *špatný*, jestliže všechny jeho strany jsou diagonálami původního trojúhelníku. Ukážeme, že Mařenka musí zvolit triangulaci bez špatných trojúhelníků. Předpokládejme, že tomu tak není, tj. že pro Mařenku existuje optimální triangulace, která obsahuje špatný trojúhelník (takové triangulace budeme nazývat *špatné*). Pro každou špatnou triangulaci T označme $d(T)$ délku nejkratší možné strany špatného trojúhelníku v T. Ze všech špatných vícestranných operací s nejmenším možným počtem špatných trojúhelníků vezměme triangulaci T_0, pro kterou je hodnota $d(T)$ minimální.

Nechť ABC je špatný trojúhelník v T_0 takový, že $|AB| = d(T_0)$. V T_0 máme také trojúhelník ABD pro $D \neq C$. Strana AB je v trojúhelníku ABC nejkratší, tj. úhel ACB je jeho nejmenší, a tedy ostrý. Body A, C, B, D leží na kružnici v tomto pořadí, proto úhel ADB je tupý, a tedy AD i BD jsou kratší než AB. Změňme triangulaci T_0 na T_1 tak, že trojúhelníky ABC a ABD nahradíme trojúhelníky ACD a BCD (obr. 44). Ohodnocení úseček AD a BD nechť jsou a a b. Změnu hodnoty S umíme vyjádřit jako

$$S(T_1) - S(T_0) = a + b - ab - 1 = -(a-1)(b-1) \leqq 0.$$

Triangulace T_0 však byla optimální, proto i T_1 musí být optimální. Přitom počet špatných trojúhelníků v T_0 byl nejmenší možný, a tedy alespoň jedna z úseček AD a BD je diagonálou. Jelikož jsou obě tyto úsečky kratší než AB, dostáváme spor s volbou T_0.



Obr. 44

V triangulaci bez špatných trojúhelníků jsou právě dva trojúhelníky obsahující dvě sousední strany původního mnohoúhelníku; všechny ostatní trojúhelníky obsahují přesně jednu stranu původního mnohoúhelníku. Vzhledem k nerovnosti $ab > a + b$, platnou pro každou dvojici přirozených čísel a, b větších než 1, se Mařenka už snadno rozhodne, které dva trojúhelníky budou obsahovat dvě strany původního mnohoúhelníku: jeden z nich bude obsahovat stranu ohodnocenou 1 a sousední stranu různou od 2, druhý zase naopak stranu ohodnocenou 2 a sousední stranu různou od 1. Tímto způsobem Mařenka dovede zaručit, že hodnota S nikdy nebude větší než $3+4+\ldots+(n-2)+1\cdot(n-1)+2n = \frac{1}{2}(n^2+3n-6)$.

Na druhé straně může Jeníček donutit Mařenku k volbě alespoň takové hodnoty S tím, že ve svém tahu označí strany mnohoúhelníku postupně čísly

$$1,\ n-1,\ 4,\ n-3,\ 5,\ n-4,\ \ldots,\ n-2,\ 3,\ n,\ 2.$$

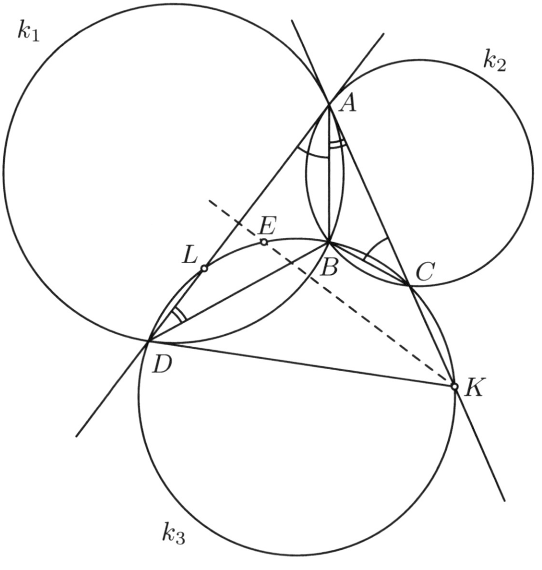
3. Přímka AD je tečnou kružnice k_2, proto úsekový úhel DAB má stejnou velikost jako úhel BCA. Podobně $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle BDA|$. Proto

$$\begin{aligned} |\sphericalangle DBC| &= 360^\circ - |\sphericalangle DBA| - |\sphericalangle CBA| = \\ &= 2|\sphericalangle DAB| + 2|\sphericalangle CAB| = 2|\sphericalangle DAC|. \end{aligned} \tag{1}$$

Body D, L, E, B, C, K leží na kružnici k_3. Abychom se vyhnuli diskusi více případů možného pořadí těchto bodů na kružnici, budeme používat orientované úhly. Symbolem $\widehat{XY}$ označíme velikost úhlu XZY takového, že bod Z leží na kružnici k_3 a body X, Z, Y jsou podél kružnice k_3 uspořádány proti směru otáčení hodinových ručiček. Jelikož bod E je středem oblouku CD, platí

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AKE| = \widehat{EC} = \frac{1}{2}\widehat{DC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{CD}) = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle DBC|) &= \\ = 90^\circ - |\sphericalangle DAC|&. \end{aligned}$$

Proto přímka KE je kolmá na AD (obr. 45). Podobně přímka LE je kolmá na AC, bod E je tudíž průsečíkem výšek trojúhelníku KLA, a přímka AE je tedy kolmá na přímku KL, což bylo třeba dokázat.



Obr. 45

Jiné řešení. Úhel BCA je shodný nejen s úhlem BAD, ale také s úhlem KDB (díky tětivovému čtyřúhelníku $DKCB$). Z rovnosti $|\sphericalangle KDB| = |\sphericalangle BAD|$ ovšem plyne, že KD je tečnou kružnice k_1 stejně jako KA. Trojúhelník ADK je tedy rovnoramenný, přičemž KE je jeho osou, neboť půlí jeho vnitřní úhel AKD, když bod E půlí oblouk CD, což dohromady znamená, že bod E leží na osách obou úseček AD a CD. Jinými slovy bod E je středem kružnice opsané trojúhelníku ADC, takže bod E leží i na ose strany AC. Podobně zjistíme, že přímka LC je tečnou kružnice k_2 neboli že bod L leží na ose strany AC. To dohromady znamená, že přímky LE a KE jsou výškami v trojúhelníku ALK, a tudíž je i $AE \perp KL$, což jsme chtěli dokázat.

4. Označme d největšího společného dělitele čísel k a m. Pro vhodná celá čísla a a b platí $k = da$, $m = db$, přičemž a a b jsou nesoudělná a $a > b$. Číslo

$$\frac{km(k^2 - m^2)}{k^3 - m^3} = \frac{d^4ab(a^2 - b^2)}{d^3(a^3 - b^3)} = \frac{dab(a + b)}{a^2 + ab + b^2}$$

je podle předpokladu ze zadání celé, proto $a^2 + ab + b^2 \mid dab(a + b)$. Z nesoudělnosti čísel a, b vyplývá, že $a^2 + ab + b^2$ je nesoudělné s a, b i $a + b$; první dvě nesoudělnosti jsou evidentní, třetí dostaneme pomocí Eukleidova algoritmu:

$$(a + b, a^2 + ab + b^2) = (a + b, a(a + b) + b^2) = (a + b, b^2) = 1.$$

Platí tedy $a^2 + ab + b^2 \mid d$, tudíž $d \geqq a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab > 3ab$. Odtud

$$(k - m)^3 = d^3(a - b)^3 \geqq d^3 > d^2 \cdot 3ab = 3km.$$

5. Po dosazení $y = 0$ dostaneme $x^2 f(0) = x^2$ pro každé reálné číslo x, proto $f(0) = 1$.

Zaveďme novou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $g(x) = f(x) - 1$, a přepišme danou rovnici s g namísto f:

$$y^2 g(x) + x^2 g(y) = xy\, g(x + y), \tag{1}$$

přičemž už víme, že $g(0) = 0$.

Každá funkce tvaru $g(x) = cx$ je pro libovolnou reálnou konstantu c řešením rovnice (1). Označme $h(x) = g(x) - g(1)x$. Ukážeme, že $h(x) = 0$ pro každé reálné číslo x.

Funkce h splňuje pro každou dvojici reálných čísel x, y rovnost

$$y^2 h(x) + x^2 h(y) = xy\, h(x + y); \tag{2}$$

navíc víme, že $h(0) = h(1) = 0$. Po dosazení $x = y = 1$ do (2) dostaneme $h(2) = 0$, po dosazení $x = -1$, $y = 1$ vyjde $h(-1) = 0$.

Připusťme, že existuje reálné číslo a takové, že $h(a) \neq 0$ (zjevně $a \neq 0$). Dosazením $x = 1$, $y = a+1$ do (2) dostaneme $h(a+1) = (a+1)h(a+2)$ a dosazením $x = 2$, $y = a$ do (2) dostaneme $2h(a) = ah(a+2)$. Z těchto dvou různých vyjádření hodnoty $h(a+2)$ vychází

$$\frac{h(a+1)}{a+1} = \frac{2h(a)}{a}. \tag{3}$$

Přitom z dosazení $x = 1$, $y = a$ do (2) vyplývá, že $h(a) = ah(a+1)$, což spolu se vztahem (3) dává $a = -\frac{1}{2}$. Dosazení $x = y = -\frac{1}{2}$ do (2) nám však díky $h(-1) = 0$ prozradí, že $h(-\frac{1}{2}) = 0$, a to odporuje volbě čísla a.

Jedinými řešeními jsou tedy funkce $f(x) = cx+1$ pro libovolné reálné číslo c, což snadno ověříme zkouškou.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení zavedeme funkci g a dokážeme, že $g(0) = 0$. Navíc dosazením $y = -x$ do (1) zjistíme, že $g(-x) = -g(x)$. Po dosazení $y = 1$ a $y = -1$ do rovnice (1) dostaneme

$$g(x) + x^2 g(1) = x\,g(x+1), \tag{4}$$

$$g(x) + x^2 g(-1) = -x\,g(x-1). \tag{5}$$

Přepíšeme-li vztah (5) s $x+1$ namísto x, dostaneme spolu se vztahem (4) soustavu dvou rovnic s neznámými $g(x+1)$, $g(x)$. Ze soustavy vyjádříme $g(x)$:

$$g(x)(x^2+x+1) = g(1)x(x^2+x+1).$$

Protože číslo x^2+x+1 je vždy kladné, jedinou možností je $g(x) = g(1)x$, a tedy $f(x) = cx+1$. Zkouškou ověříme, že taková funkce f dané rovnici vyhovuje pro každé reálné číslo c.

6. Zaveďme substituci $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$. Chceme dokázat nerovnost

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geqq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}},$$

přičemž platí rovnost

$$\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z} = 1, \tag{1}$$

která vyplývá z dané podmínky po trojnásobném využití rovnosti

$$\frac{2t}{1+2t} = 1 - \frac{1}{1+2t}.$$

Dokazovaná nerovnost je symetrická, proto můžeme předpokládat, že $x \geqq y \geqq z$. Snadno nahlédneme, že pak

$$\frac{x-1}{2x+1} \geqq \frac{y-1}{2y+1} \geqq \frac{z-1}{2z+1} \tag{2}$$

a také

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x}} \geqq \frac{2y+1}{\sqrt{y}} \geqq \frac{2z+1}{\sqrt{z}}. \tag{3}$$

Nerovnosti (2) jsou ekvivalentní nerovnostem $x \geqq y \geqq z$, první z nerovností (3) pak snadno převedeme na nerovnost $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(2\sqrt{xy} - 1) \geqq 0$. A kdyby bylo $2\sqrt{xy} < 1$ neboli $4xy < 1$, dostali bychom

$$\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} = \frac{2+2x+2y}{1+4xy+2x+2y} > 1,$$

což odporuje předpokladu (1). Stejně dokážeme i druhou nerovnost z (3).

Díky vztahům (2) a (3) můžeme použít Čebyševovu nerovnost:[1]

$$\sum_{\text{cykl.}} \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sum_{\text{cykl.}} \frac{x-1}{2x+1} \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x}} \geqq \frac{1}{3} \sum_{\text{cykl.}} \frac{x-1}{2x+1} \sum_{\text{cykl.}} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{1}{3} \sum_{\text{cykl.}} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\text{cykl.}} \frac{2x+1-3}{2x+1} = 0.$$

Jiné řešení (trigonometrické). Po substituci $x = 1/(a+1)$, $y = 1/(b+1)$, $z = 1/(c+1)$ je

$$\frac{a}{1+a} = 1 - x, \qquad \frac{b}{1+b} = 1 - y, \qquad \frac{c}{1+c} = 1 - z,$$

takže platí $x + y + z = 1$ a původní proměnné můžeme vyjádřit jako $a = (y+z)/x$, $b = (x+z)/y$, $c = (x+y)/z$. Chceme dokázat nerovnost

$$\sqrt{\frac{x+y}{2z}} + \sqrt{\frac{y+z}{2x}} + \sqrt{\frac{z+x}{2y}} \geqq \sqrt{\frac{2x}{y+z}} + \sqrt{\frac{2y}{z+x}} + \sqrt{\frac{2z}{y+x}}.$$

---

[1] Zkráceným zápisem $\sum_{\text{cykl.}} V(x)$ rozumíme „cyklický“ součet $V(x) + V(y) + V(z)$.

Tato nerovnost platí pro všechny trojice kladných reálných čísel x, y, z. Dokážeme to tak, že nejprve obě strany nerovnosti vynásobíme součinem tří (kladných) sčítanců z její levé strany; dostaneme tak ekvivalentní cyklickou nerovnost

$$\sum_{\text{cykl.}} \frac{x+y}{2z}\sqrt{\frac{y+z}{2x}\cdot\frac{z+x}{2y}} \geqq \sum_{\text{cykl.}} \sqrt{\frac{y+z}{2x}\cdot\frac{z+x}{2y}}. \tag{1}$$

Proveďme substituci $p = x + y$, $q = y + z$, $r = z + x$. Čísla p, q, r jsou pak délkami stran trojúhelníku a můžeme psát $p = 2R\sin\alpha$, $q = 2R\sin\beta$, $r = 2R\sin\gamma$, kde R je poloměr opsané kružnice a $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Tři analogické zlomky z poslední nerovnosti pak mají vyjádření, která odvodíme pouze pro první z nich:

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2z} &= \frac{p}{q+r-p} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha} = \\
&= \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} = \\
&= \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)-\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma},
\end{aligned}$$

kde jsme při poslední úpravě využili vzorec pro rozdíl dvou kosinů. Díky těmto třem vyjádřením platí pro odmocniny ze součinu vždy dvou z dané trojice zlomků vzorce, které odvodíme pouze pro jednu z nich:

$$\sqrt{\frac{y+z}{2x}\cdot\frac{z+x}{2y}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Po dosazení do (1) vidíme, že je naším úkolem dokázat nerovnost

$$\sum_{\text{cykl.}} \frac{1}{4\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma} \geqq \sum_{\text{cykl.}} \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

která po vynásobení výrazem $4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$ získává tvar

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \geqq 2\Big(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\Big)$$

neboli

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \geqq \\
&\qquad \geqq \Big(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\Big)^2 - \Big(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Jelikož díky Cauchyově nerovnosti platí

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geqq\frac{1}{3}\Bigl(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\Bigr)^2,$$

stačí místo nerovnosti, kterou máme dokázat, ověřit silnější nerovnost

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\geqq\frac{2}{3}\cdot\Bigl(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\Bigr)^2.$$

Tu po vydělení levou stranou ještě zjednodušíme na

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\leqq\frac{3}{2}.$$

Poslední už plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci sinus, jež je na intervalu $(0,\pi)$ konkávní:

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\leqq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}=3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}.$$

7. Množina

$$\mathsf{S}=(\{1\}\times\{2,\dots,n\})\cup(\{2,\dots,n\}\times\{1\})$$

má $2n-2$ prvků a žádné tři její body netvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Ukážeme, že každá vyhovující množina S má nejvýše $2n-2$ prvků.

Vezměme vyhovující množinu S. Označme S_1 množinu těch bodů (x,y) z S, které mají unikátní první souřadnici, tj. v S není žádný bod (x,y') pro $y'\neq y$. Podobně označme S_2 množinu bodů z S s unikátní druhou souřadnicí.

Nejprve sporem dokážeme, že $\mathsf{S}=\mathsf{S}_1\cup\mathsf{S}_2$. Kdyby totiž nějaký bod P patřil do S, ale nepatřil by ani do jedné z množin S_1 nebo S_2, našli bychom k němu bod P_x se stejnou první souřadnicí i bod P_y se stejnou druhou souřadnicí. Takové tři body P, P_x, P_y však tvoří pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu P.

Pokud $|\mathsf{S}_1|=n$, je $\mathsf{S}=\mathsf{S}_1$, potom však množina S má n prvků, a to je pro každé $n\geqq 3$ méně než $2n-2$. Podobně se vypořádáme s množinami S, pro něž $|\mathsf{S}_2|=n$. V každém jiném případě však $|\mathsf{S}_1|\leqq n-1$ a $|\mathsf{S}_2|\leqq n-1$, množina S má tedy nejvýše $2n-2$ prvků.

8. Jazyky budeme volit náhodně a ukážeme, že pravděpodobnost příznivé volby je kladná. Z toho ovšem plyne, že existuje požadovaná volba jazyků.

Nechť $p \in [0, 1]$. Každý jazyk bude zvolen s pravděpodobností p; volby pro jednotlivé jazyky jsou nezávislé. (Formálně: elementární událostí je n-tice $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde $a_i = 1$, pokud i-tý jazyk byl zvolen, jinak $a_i = 0$; je-li k počet jednotek v elementární události ω, je její pravděpodobnost rovna $p^k(1-p)^{n-k}$.)

Budeme zkoumat dvě náhodné veličiny A a B, kde A označuje počet zvolených jazyků a B počet účastníků, jejichž všechny tři jazyky byly zvoleny. Vypočítáme střední hodnoty těchto dvou veličin:

$$E(A) = \sum_{\text{jazyk } l} 1 \cdot P(\text{zvolili jsme jazyk } l) = np,$$

$$E(B) = \sum_{\text{student } s} P(\text{všechny jazyky studenta } s \text{ jsou zvoleny}) = 3n \cdot p^3.$$

Dále využijeme nerovnost

$$P(X \geqq E(X)) > 0,$$

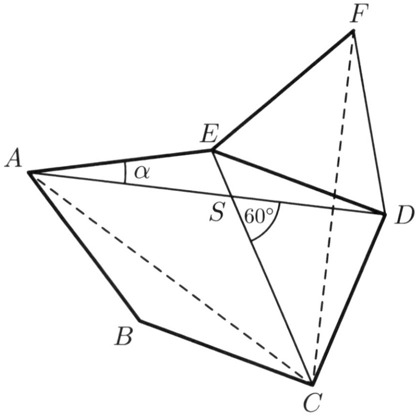
která evidentně platí pro každou náhodnou veličinu X. V našem případě pro $X = A - B$ dostáváme, že

$$P(A - B \geqq np - 3np^3) > 0.$$

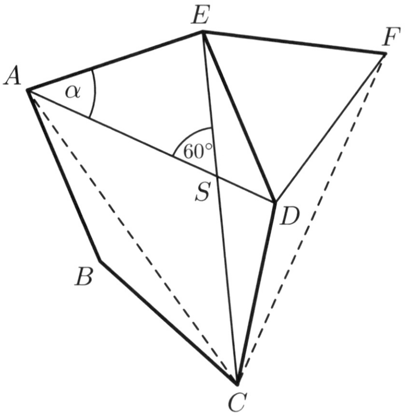
Odtud plyne, že existuje volba jazyků (tj. elementární událost ω) taková, že $A(\omega) - B(\omega) \geqq np - 3np^3$. Pro tuto volbu můžeme ze zvolených jazyků odstranit jeden jazyk za každého z účastníků, pro kterého byly zvoleny všechny tři jazyky, jimiž hovoří, a stále zůstane alespoň $A - B$ jazyků. Pro $p = \frac{1}{3}$ je však $A - B \geqq \frac{2}{9}n$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

9. Označme α velikost úhlu EAD. Stejnou velikost má i úhel EDA, a z dané velikosti $|\sphericalangle ASE| = 60°$ snadno dopočítáme $|\sphericalangle AEC| = 120° - \alpha$ a $|\sphericalangle DEC| = 60° - \alpha$. Označme F obraz bodu A v osové souměrnosti podle přímky CE. Úhel FED má velikost $(120° - \alpha) - (60° - \alpha) = 60°$, a protože $|EF| = |EA| = |ED|$, je trojúhelník DEF rovnostranný. Rovnoramenné trojúhelníky ABC a FDC jsou tedy shodné podle věty *sss*.

Pokud se bod D nachází mimo trojúhelník ACF (obr. 46), jsou body B a D souměrně sdruženy podle přímky CE, a proto $|EB| = |ED|$, takže čtyřúhelník $BCDE$ je kosočtverec a $BC \parallel DE$.



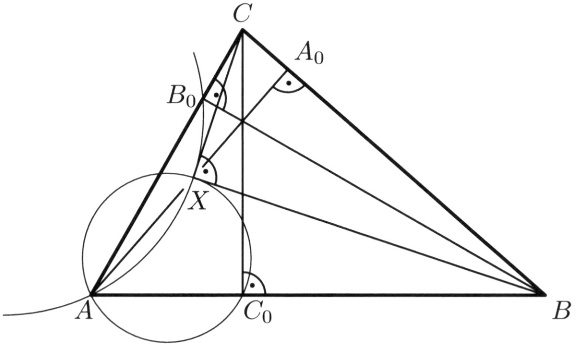
Obr. 46



Obr. 47

Pokud bod D leží v trojúhelníku ACF (obr. 47), jsou body C a F souměrně sdruženy podle osy AD, protože úhly ADC i ADF mají velikost $60° + \alpha$ (využili jsme, že $|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle CED| = 60° - \alpha$). Potom však $|AF| = |AC|$, takže trojúhelníky ABC a AEF jsou shodné. Bod E musí ležet mimo trojúhelník ACF, jinak by pětiúhelník $ABCDE$ nebyl konvexní. Ze shodnosti trojúhelníků ABC a AEF pak plyne, že body B a E jsou souměrně sdruženy podle přímky AD. Proto $|DB| = |DE|$, tudíž čtyřúhelník $ABDE$ je kosočtverec a platí $AB \parallel DE$.

10. Dotyk přímky s kružnicí můžeme popsat pomocí mocnosti bodu ke kružnici. V našem případě z mocnosti bodu B ke kružnici opsané trojúhelníku AXC_0 plyne $|BX|^2 = |BA| \cdot |BC_0|$. Podobně $|CX|^2 = |CA| \cdot |CB_0|$. Označme A_0 patu výšky z vrcholu A (obr. 48). Čtyřúhelník ACA_0C_0 je



Obr. 48

tětivový, proto pro mocnost bodu B k opsané mu kružnici platí $|BA| \cdot \cdot |BC_0| = |BA_0| \cdot |BC|$; podobně dostaneme $|CA| \cdot |CB_0| = |CA_0| \cdot |CB|$. Dohromady tak máme

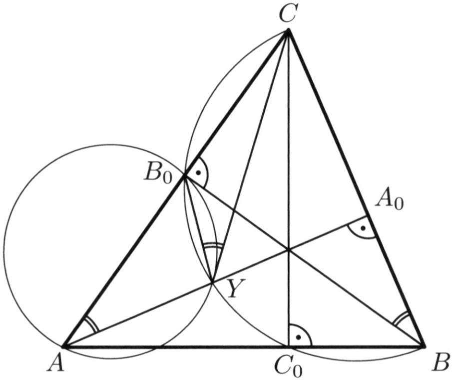
$$\begin{aligned}|BX|^2 + |CX|^2 &= |BA| \cdot |BC_0| + |CA| \cdot |CB_0| = \\ &= |BA_0| \cdot |BC| + |CA_0| \cdot |BC| = |BC|^2,\end{aligned}$$

tj. úhel BXC je pravý (obr. 48). Navíc z rovnosti $|BX|^2 = |BA_0| \cdot |BC|$ podle Eukleidovy věty o odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku BXC vyplývá, že bod A_0 je patou výšky z vrcholu X na přeponu BC. Jinak řečeno, přímky AA_0 a XA_0 jsou totožné, proto je přímka AX kolmá na přímku BC.

Jiné řešení. Z mocností bodů B a C k uvažovaným kružnicím dostáváme

$$|BX|^2 = |BA| \cdot |BC_0|, \quad |CX|^2 = |CA| \cdot |CB_0|.$$

V daném trojúhelníku ABC tyto rovnosti jednoznačně určují vzdálenosti bodu X od vrcholů B a C, a protože o bodu X předpokládáme, že je vnitřním bodem ostroúhlého trojúhelníku, je tím takový bod X jednoznačně určen. Ukážeme, že požadované vlastnosti má průsečík Y výšky trojúhelníku ABC z vrcholu A s Thaletovou kružnicí nad průměrem BC (obr. 49). Tím bude tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 49

Čtyřúhelník BCB_0Y je tětivový, proto $|\sphericalangle CBB_0| = |\sphericalangle CYB_0|$. Potom $|\sphericalangle CAY| = 90° - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CBB_0| = |\sphericalangle CYB_0|$, a podle věty o úsekovém úhlu se přímka CY dotýká kružnice opsané trojúhelníku AYB_0.

Analogicky můžeme ukázat, že se přímka BY dotýká kružnice opsané trojúhelníku AYC_0, takže bod Y má obě vlastnosti určující bod X.

11. Stačí ukázat, že existují $a \in \mathsf{A}$ a $b \in \mathsf{B}$, pro něž $a \equiv 2b \pmod{11}$, protože pro taková a, b platí

$$a^3 + ab^2 + b^3 \equiv 8b^3 + 2b^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Podle zadání je množina $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ tvořena právě všemi nenulovými zbytky modulo 11. Zvolme nějaké $c \in \mathsf{B}$. Čísla c, $2c$, 2^2c, …, 2^9c dávají vesměs různé nenulové zbytky modulo 11, z nichž aspoň jeden musí patřit do množiny A (ta je neprázdná). Je-li k nejmenší takové, že zbytek čísla 2^kc je v B a zbytek $2^{k+1}c$ je v A, bude pro $b \equiv 2^kc$ zřejmě platit $a \equiv 2^{k+1}c \equiv 2b$.

12. Zvolme nejprve čísla x_1, x_2, …, x_{2011} tak, aby čísla

$$y_1 = x_1^2(x_1 + 2), \quad y_2 = x_2^2(x_2 + 2), \quad \ldots, \quad y_{2011} = x_{2011}^2(x_{2011} + 2)$$

byla navzájem nesoudělná. Můžeme například vzít $x_1 = 1$ a pak postupně volit $x_i = y_1 y_2 \ldots y_{i-1} - 1$ pro každé $i \in \{2, 3, \ldots, 2011\}$. Takto zvolené číslo x_i zabezpečí, že y_i bude nesoudělné se všemi předchozími čísly $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$.

Důvod volby čísel x_i spočívá v tom, že každé číslo dělitelné číslem tvaru $x^2(x + 2)$ je úžasné. Opravdu, pokud $n = x^2(x + 2)m$, pak pro $a = mx^2$, $b = mx$ a $c = x$ platí požadovaná rovnost.

Jelikož čísla $y_1, y_2, \ldots, y_{2011}$ jsou navzájem nesoudělná, podle čínské zbytkové věty existuje přirozené číslo k takové, že

$$k \equiv -i \pmod{y_i} \quad \text{pro každé } i \in \{1, 2, \ldots, 2\,011\}.$$

Číslo $k + i$ je pak dělitelné číslem y_i pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, 2\,011\}$. Čísla $k+1$, $k+2$, …, $k+2\,011$ jsou podle předchozího odstavce všechna úžasná, a tvoří tak hledaných 2 011 po sobě jdoucích úžasných čísel.