[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

II. Algebra

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 44–68.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405283

26. Jsou dány výrazy

$$U = \frac{\dfrac{1}{p-3} - \dfrac{1}{p+3}}{\dfrac{1}{p-3} + \dfrac{1}{p+3}} - \frac{p+3}{p},$$

$$V = \frac{\dfrac{1}{p^2-9} - \dfrac{1}{p^2+9}}{\dfrac{1}{p^2-9} + \dfrac{1}{p^2+9}} - \frac{p^2+9}{p^2}.$$

Zjistěte, pro která p mají oba výrazy význam, a dokažte, že pro tato p je $U = V$.

Řešení. U i V má smysl právě tehdy, je-li $p \neq 0$, $p \neq \pm 3$; pak je i $p^2 \neq \pm 9$. Upravíme U i V:

$$U = \frac{p+3-(p-3)}{p+3+p-3} - \frac{p+3}{p} = \frac{6}{2p} - \frac{p+3}{p} =$$

$$= \frac{3-p-3}{p} = -1,$$

$$V = \frac{p^2 + 9 - (p^2 - 9)}{p^2 + 9 + p^2 - 9} - \frac{p^2 + 9}{p^2} = \frac{18}{2p^2} - \frac{p^2 + 9}{p^2} =$$

$$= \frac{9 - p^2 - 9}{p^2} = -1.$$

27. Dokažte tyto dvě věty:

a) Platí-li pro dvě různá čísla a, b vztah

$$a - a^2 = b - b^2, \tag{1}$$

pak pro ně platí

$$a + b = 1. \tag{2}$$

b) Platí-li pro dvě čísla a, b vztah (2), pak pro ně platí i (1). Uveďte příklad takových čísel a, b.

Řešení. a) Z (1) plyne

$$a - b = a^2 - b^2 \tag{3}$$

neboli

$$a - b = (a - b)\,(a + b). \tag{3'}$$

Protože je $a \neq b$, tj. $a - b \neq 0$, plyne z (3′) po dělení číslem $a - b$ vztah (2).

b) Rovnost (2) znásobíme číslem $a - b$ a dostaneme (3). Z (3) odvodíme (1).

Zvolme $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ (podle (2)). Pak je

$$a - a^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6-4}{9} = \frac{2}{9},$$

$$b - b^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3-1}{9} = \frac{2}{9}.$$

28. Je dán výraz

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2.$$

a) Dosadíme-li $a = 5$, $b = 7$, dostaneme zlomek, jehož čitatel i jmenovatel jsou druhé mocniny přirozených čísel. Přesvědčte se o tom.

b) Dokažte, že vlastnost z úlohy a) mají každá dvě různá celá čísla *a, b*.

Řešení. a) Pro $a = 5$, $b = 7$ vypočteme

$$74 + \left(-\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{1\,521}{4} = \frac{39^2}{2^2}.$$

b) Důkaz záleží v úpravě daného výrazu. Jakýsi »vtip« důkazu je v tom, že nebudeme provádět všechny naznačené výkony, ale že budeme stále »hlídat«, zda se nám při výpočtu neobjeví v čitateli druhá mocnina mnohočlenu.

Daný výraz můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{1}{(a-b)^2} \cdot [(a^2 + b^2)(a-b)^2 + a^2b^2].$$

Stačí upravit výraz v lomených závorkách takto:

$$(a^2 + b^2)\,(a^2 + b^2 - 2ab) + a^2b^2 =$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 2ab(a^2 + b^2) + a^2b^2.$$

Při pozorném pohledu vidíme, že poslední výraz je druhou mocninou dvojčlenu

$$(a^2 + b^2) - ab, \qquad (1)$$

o němž lze dokázat, že pro každá dvě různá celá čísla a, b je roven přirozenému číslu. Zřejmě stačí pouze dokázat, že dvojčlen (1) je pro každá dvě různá čísla kladný. Nechť $ab \leqq 0$. Pro $a \neq b$ je $a^2 + b^2 > 0$, a tedy

$$a^2 + b^2 - ab > 0. \qquad (2)$$

Nechť $ab > 0$. Z podmínky $a \neq b$ dostáváme

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab > 0.$$

Odtud již vyplývá nerovnost (2), neboť pro $ab > 0$ je $2ab > ab$.

Pro každá dvě různá celá čísla a, b tedy platí

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{ab}{a - b}\right)^2 = \frac{(a^2 + b^2 - ab)^2}{|\,a - b\,|^2},$$

kde $|\,a - b\,|$ a $a^2 + b^2 - ab$ jsou přirozená čísla.

29. Rozložte v součin dvojčlenů 1. stupně výraz

$$V = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - x + 1.$$

Výsledek ověřte pro $x = -1$.

Řešení. Vytýkáním.

$$\begin{aligned} V &= (x - 1)(x - 2)[(x - 3) + 1] - x + 1 = \\ &= (x - 1)(x - 2)(x - 2) - (x - 1) = \\ &= (x - 1)[(x - 2)^2 - 1] = \\ &= (x - 1)(x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = \\ &= (x - 1)(x - 1)(x - 3) = \\ &= (x - 1)^2 (x - 3) \end{aligned}$$

30. Součinem dvou kvadratických trojčlenů $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ je dvojčlen $x^4 + 4$. Určete koeficienty a, b, c, d.

Řešení. Podkladem řešení je věta, že dvě polynomické funkce (mnohočleny s jednou proměnnou x) jsou si rovny právě tehdy, když koeficienty při týchž mocninách x jsou si rovny.

V našem případě vypočteme

$$\begin{aligned} &(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = \\ &= x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd. \end{aligned}$$

Tento mnohočlen má být roven $x^4 + 4$. Je tedy

$$a + c = 0, \qquad (1)$$

$$d = a^2 - b, \qquad (2)$$

$$a^3 - 2ab = 0, \qquad (3)$$

$$a^2b - b^2 = 4. \qquad (4)$$

Z (4) plyne $a \neq 0$. Z (3) plyne $b = \frac{a^2}{2}$, neboť můžeme dělit číslem a. Z (2) plyne $d = \frac{a^2}{2}$. Z (1) plyne $c = -a$. Z (4) plyne $\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} = 4$, tj. $a = 2$ nebo $a = -2$. Hledané koeficienty jsou $a = 2$, $b = 2$, $c = -2$, $d = 2$, resp. $a = -2$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 2$.

Správnost ověříme zkouškou.

31. Určete všechny takové dvojice čísel a, b, pro něž je trojčlen $x^4 + ax^2 + b$ možno vyjádřit jako součin trojčlenů 2. stupně, z nichž jeden je $x^2 + ax + b$.

Řešení. Podle věty, kterou jsme užili při řešení úlohy 30, platí $x^4 + ax^2 + b = x^4 + (a + c)\,x^3 + (b + d + ac)\,x^2 + (ad + bc)\,x + bd$ a odtud

$$(1)\ a + c = 0, \qquad (2)\ b + d + ac = a,$$

$$(3)\ ad + bc = 0, \qquad (4)\ bd = b.$$

Vzhledem k (4) jsou 2 možnosti:

$$\text{I. } b = 0, \qquad \text{II. } b \neq 0,\ d = 1.$$

V případě I je podle (3) buď $a = 0$, nebo $d = 0$. Je-li $a = 0$, $b = 0$, je podle (2) $d = 0$ a podle (1) $c = 0$. Je-li $b = 0$, $d = 0$, je podle (1), (2) $-a^2 = a$, tj. buď $a = 0$, nebo $a = -1$.
V případě II je $c = -a$, $b + 1 - a^2 = a$, $a - ab = 0$. Z rovnic $ab + a - a^3 = a^2$ a $a - ab = 0$ plyne $2a - a^3 = a^2$, tj. $a(a^2 + a - 2) = 0$. Je tedy buď $a = 0$, nebo $a^2 + a - 2 = 0$, čili $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $a + \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2}$, čili $a = 1$, $a = -2$. Pro koeficient a jsou tedy možnosti $a = 0$, $a = -1$ (případ I), $a = 0$, $a = 1$, $a = -2$ (případ II).

Pomocí rovnic (1), (2), (3), (4) doplníme tabulku:

a	b	c	d	
0	0	0	0	případ I
—1	0	1	0	
0	—1	0	1	případ II
1	1	—1	1	
—2	1	2	1	

Všech 5 případů ověříme zkouškou.

32. Vyjádřete trojčlen $x^8 + x^4 + 1$ aspoň jedním způsobem jako součin

a) dvou mnohočlenů 4. stupně;
b) čtyř mnohočlenů 2. stupně.

Řešení. Daný mnohočlen rozložíme podle známých vzorců z algebry takto:

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = \\ = (x^4 + x^2 + 1)\,(x^4 - x^2 + 1)$$

Tímto rozkladem jsme úlohu a) vyřešili. V rozkladu budeme dále pokračovat a postupně dostáváme:

$$(x^4 + x^2 + 1)\,(x^4 - x^2 + 1) = \\ = (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)\,(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2) = \\ = [(x^2 + 1)^2 - x^2]\,[(x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{3})^2] = \\ = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$$

Poslední rozklad je řešením úlohy b).

33. Výraz

$$V = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

upravte na součin a pak určete všechny trojice čísel x, y, z, pro které je $V = 0$.

Řešení. Znění úlohy naznačuje, že se rozklad výrazu V v součin činitelů zdaří. Protože V je třetího stupně v x, y, z, bude v rozkladu buď jeden činitel prvního stupně a jeden druhého, nebo budou tři činitelé prvního stupně.

Bylo by možné umocnit každý z dvojčlenů na třetí podle známého vzorce, ale tak bychom dostali dosti nepřehledný výraz o 12 členech. Bude lépe užít vzorec

$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2). \qquad (1)$$

Dosadíme-li do (1) $a = x - y$, $b = y - z$, dostaneme na levé straně součet prvních dvou členů V a na pravé straně dvojčlen $a + b = x - z = -(z - x)$, který lze pak z V vytknout.

Výpočtem dostaneme

$$V = (x - z)\,(x^2 - 2xy + y^2 - xy + y^2 + xz - yz + y^2 - \\ - 2yz + z^2) + (z - x)^3,$$

tj.

$$\begin{aligned} V &= (x - z)\,(x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy - 3yz + xz) + (z - x)^3 = \\ &= (x-z).(x^2+3y^2+z^2-3xy-3yz+xz-x^2-z^2+2xz) = \\ &= 3(x - z)\,(y^2 - xy - yz + xz) = \\ &= 3(x - z)\,[y(y - z) - x(y - z)] = \\ &= 3(x - z)\,(y - z)\,(y - x). \end{aligned}$$

Je tedy $V = 0$ právě tehdy, když aspoň dvě z čísel x, y, z jsou sobě rovna.

34. a) Rozhodněte nejprve, pro která reálná čísla a, b, c má smysl výraz

$$V = \frac{(a - b)^2}{c^2 - ac - bc + ab} + \frac{(b - c)^2}{a^2 - ab - ac + bc} + \\ + \frac{(c - a)^2}{b^2 - bc - ba + ca}\,.$$

b) Dokažte, že pro každou trojici a, b, c, pro kterou má výraz V smysl, je V totéž číslo, a vypočtěte je.

Řešení. Označíme

$$a - b = z, b - c = x, c - a = y \tag{1}$$

a vypočteme

$$c^2 - ac - bc + ab = (c - a)(c - b) = -xy. \tag{2}$$

Obdobně upravíme

$$\begin{aligned} a^2 - ab - ac + bc &= (a - b)(a - c) = -yz, \\ b^2 - bc - ba + ca &= (b - a)(b - c) = -xz. \end{aligned} \tag{3}$$

Ad a) Odtud je patrno, že V má smysl právě tehdy, je-li $a \neq b \neq c \neq a$ čili $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.
Ad b) Vypočtěme podle (2), (3)

$$-Vxyz = x^3 + y^3 + z^3 \tag{4}$$

a podle (1)

$$x + y + z = 0. \tag{5}$$

Dále

$$\begin{gathered} (x + y + z)^3 + 3xyz = \\ = 3(x + y + z)xy + 3(x + y + z)xz + \\ + 3(x + y + z)xy + x^3 + y^3 + z^3 \end{gathered}$$

neboli podle (5)

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz. \tag{6}$$

Spojením (4), (6) dostaneme

$$-Vxyz = 3xyz.$$

Protože je $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, je

$$V = -3.$$

Úloha je značně obtížná, zejména je nesnadný trik se zavedením nových proměnných x, y, z.

35. Dokažte, že výraz

$$V = a^2 - ab + b^2 - a + b + 1$$

nabývá pro každá dvě čísla a, b kladné hodnoty.

Řešení. Tato úloha je příkladem na složitější úpravu algebraického výrazu, tj. celistvé racionální funkce o dvou proměnných a, b. »Nezápornost« takového výrazu se obvykle snažíme dokázat úpravou na součet, v němž každý sčítanec je buď druhá (sudá) mocnina reálného čísla, nebo součin činitelů, který je nezáporný, nebo určité kladné číslo.

Výraz V budeme postupně upravovat:

$$\begin{aligned} V &= a^2 - a(b+1) + b^2 + b + 1 = \\ &= [a^2 - 2.a.\tfrac{1}{2}(b+1) + \tfrac{1}{4}(b+1)^2] + \\ &\quad + b^2 + b + 1 - \tfrac{1}{4}(b+1)^2 = \\ &= [a - \tfrac{1}{2}(b+1)]^2 + \tfrac{1}{4}(4b^2 + 4b + 4 - b^2 - 2b - 1) = \\ &= [a - \tfrac{1}{2}(b+1)]^2 + \tfrac{3}{4}(b^2 + \tfrac{2}{3}b + 1) = \\ &= [a - \tfrac{1}{2}(b+1)]^2 + \tfrac{3}{4}(b + \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Z posledního součtu plyne, že je $V > 0$ pro všechna a, b.

Poznámky. 1. Za povšimnutí stojí, že při vytváření druhé mocniny dvojčlenu $a - \frac{1}{2}(b + 1)$ jsme užili všechny členy výrazu V, které obsahovaly proměnnou a.

2. Naši úlohu lze vyřešit trikem, který překvapuje svou krátkostí a elegancí, ale také svou smělostí. Budeme totiž zkoumat výraz $2V$. Platí:

$$\begin{gathered} 2V = 2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2a + 2b + 2 = \\ = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) = \\ = (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \end{gathered}$$

36. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla a, b nabývá výraz

$$V = a^4 + b^4 - 2ab(b^2 - ab - a^2)$$

nezáporné hodnoty.

V kterém případě je tento výraz roven nule?

Řešení. Jde o typovou úlohu úpravy algebraického výrazu, která směřuje k tomu, aby se výraz V vyjádřil jako součet druhých mocnin polynomů. Výraz V budeme postupně upravovat:

$$V = a^4 + b^4 - 2ab^3 + 2a^2b^2 + 2a^3b \tag{1}$$

$$V = (a^4 + 2a^3b + a^2b^2) + (a^2b^2 - 2ab^3 + b^4)$$

$$V = a^2(a^2 + 2ab + b^2) + b^2(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$V = a^2(a + b)^2 + b^2(a - b)^2 \tag{2}$$

Je tedy $V \geqq 0$ pro všechna a, b. V předcházejících úpravách je jeden trochu umělý obrat - rozdělení členu $2a^2b^2 = a^2b^2 + a^2b^2$ a sdružení šesti členů do dvou trojčlenů.

Zjištění nutné a postačující podmínky pro to, aby bylo $V = 0$, je stereotypní. Platí podle (2):

$V = 0$, právě když $a^2(a + b)^2 = 0$ a zároveň $b^2(a - b)^2 = 0$.

Z obou součinů dostáváme tyto čtyři možné kombinace:

I. $a^2 = 0, b^2 = 0$	III. $(a + b)^2 = 0, b^2 = 0$
II. $a^2 = 0, (a - b)^2 = 0$	IV. $(a + b)^2 = 0, (a - b)^2 = 0$

Ve všech čtyřech případech vyjde $a = b = 0$; to je skutečně jediná dvojice a, b, pro kterou je $V = 0$.

Vraťme se ještě jednou ke vztahu (1), který vznikl roznásobením daného výrazu. Při prvním pohledu nás napadne spíše jiná úprava, než je ta, kterou jsme použili. Je to sdružení

$$V = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + 2ab(a^2 - b^2)$$

neboli

$$V = (a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 - b^2). \tag{3}$$

První člen (3) je nezáporný, druhý může být záporný. Bude-li však absolutní hodnota druhého členu menší nebo rovna absolutní hodnotě prvního členu, bude určitě $V \geqq 0$. Místo porovnávání absolutních hodnot můžeme vypočítat rozdíl

$$\begin{aligned} V' &= (a^2 + b^2)^4 - 4a^2b^2(a^2 - b^2)^2 = \\ &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)^2 - 4a^2b^2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4). \end{aligned}$$

Po krátkém výpočtu dostaneme

$$V' = a^8 + 14a^4b^4 + b^8.$$

Zřejmě je vždy $V' \geqq 0$, tedy i $V \geqq 0$. Je-li $V = 0$, je $V' = 0$, tj. $(a^4 + b^4)^2 + 12a^4b^4 = 0$ a odtud plyne $a = b = 0$. Dostáváme tedy opět jedinou možnou dvojici $a = b = 0$, pro kterou je $V = 0$.

37. Jsou-li a, b, c taková nezáporná čísla, že platí

$$a + b + c = 1,$$

pak je

$$ab + ac + bc < \tfrac{1}{2}, \tag{1}$$

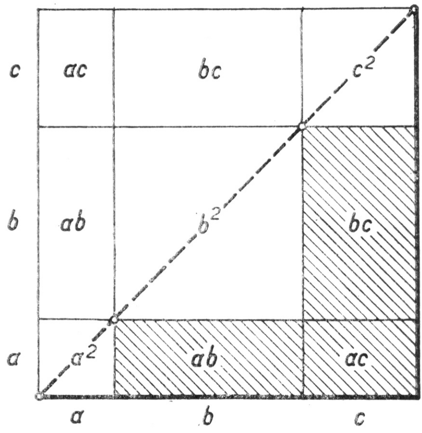
$$ab + ac + bc - abc < \tfrac{1}{3}. \tag{2}$$

Řešení. Nerovnost (1) je patrná z obr. 2.
Obsah tlustě zarámovaného pravoúhlého trojúhelníka je $\frac{1}{2}$, obsah šrafovaného obrazce je $ab + ac + bc$; platí tedy nerovnost (1).

Vypočteme $2(ab + ac + bc) + a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 = 1$, tj. $2(ab + ac + bc) < 1$, a odtud plyne (1).

Vypočteme

$$\begin{aligned}
&(a + b + c)^3 = \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + \\
&+ 3bc(b + c) + 6abc = \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b + c) + \\
&+ 3ac(a + b + c) + 3bc(a + b + c) - 3abc = 1
\end{aligned}$$



Obr. 2

Protože $a + b + c = 1$, dostaneme

$$ab + ac + bc - abc < \tfrac{1}{3},$$

což je nerovnost (2).

38. Jsou dána kladná čísla a, b, c, d, pro která platí

$$a + b + c + d = 1.$$

Dokažte, že pak platí

$$abc + abd + acd + bcd < \tfrac{1}{6},$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 1.$$

Řešení. Základní myšlenka pro tyto jednoduché odhady je vyhledat příslušný výraz v rozvedení $(a + b + c + d)^3$ a odtud odvodit příslušnou nerovnost. K tomu nepotřebujeme znát vzorce pro umocňování čtyřčlenu; mocnina se nahradí prostě součinem

$$(a + b + c + d)\,(a + b + c + d)\,(a + b + c + d). \qquad (1)$$

Násobení však nebudeme provádět, neboť bychom dostali nepřehledný sled $4^3 = 64$ členů.

Bez roznásobení určíme, kolik členů se rovná *abc*. Sestavíme tabulku, v níž bude zachyceno, z kterého z činitelů $(a + b + c + d)$ součinu (1) je vybráno *a*, z kterého *b*, z kterého *c*. Tabulka může vypadat takto:

Činitelé / Součin	*a*	*b*	*c*
abc	1	2	3
acb	1	3	2
bac	2	1	3
bca	3	1	2
cab	2	3	1
cba	3	2	1

Protože násobení je komutativní a asociativní, dostaneme součin *abc* při roznásobení součinu (1) celkem 6krát.

Stejnou úvahu jako pro součin *abc* můžeme provést i pro součiny *abd*, *acd*, *bcd*; vlastně jde jen o záměnu písmen. V součinu (1) dostaneme po roznásobení mimo členy

$$6abc + 6abd + 6acd + 6bcd$$

ještě další kladné členy (a, b, c jsou čísla kladná); jejich součet označíme k. Je tedy

$$(a + b + c + d)^3 = 6(abc + abd + acd + bcd) + k,$$

tj. vzhledem k podmínce $a + b + c + d = 1$

$$6(abc + abd + acd + bcd) = 1 - k < 1$$

a odtud

$$abc + abd + acd + bcd < \tfrac{1}{6}.$$

Obdobně, ale jednodušeji, se získá odhad $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < < 1$.

39. Rozhodněte, který ze zlomků

$$\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}, \qquad \frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$$

je větší.

Řešení. Kdybyste postupovali, jak jste se učili ve škole, uvedli byste oba zlomky na společného jmenovatele a porovnali byste pak čitatele. Bylo by to však příliš pracné. Společný jmenovatel by byl asi součin obou jmenovatelů a počítání by trvalo příliš dlouho. Proto musíme postupovat vtipněji.

Vidíme, že čitatel a jmenovatel každého zlomku jsou sice velká čísla, ale liší se jen o několik jednotek. Označíme-li

$$5\,555\,555\,557 = a, \qquad 6\,666\,666\,669 = b,$$

jsou oba dané zlomky

$$A = \frac{a-4}{a}, \quad B = \frac{b-5}{b}.$$

Víme, že je $A > B$ právě tehdy, je-li $A - B > 0$; a obdobně $A < B$ právě tehdy, je-li $A - B < 0$. Vypočteme tedy $A - B$; vyjde

$$A - B = \frac{ab - 4b - ab + 5a}{ab} = \frac{5a - 4b}{ab}. \tag{1}$$

Protože je $ab > 0$, stačí vypočítat $5a - 4b$, a to je poměrně snadné.
Dostaneme $5a - 4b = 27\,777\,777\,785 - 26\,666\,666\,676 > 0$.
Podle (1) je tedy $A - B > 0$, tj.

$$A > B.$$

Vidíte, jak nám pomohla algebra.

40. Rozhodněte, které z obou čísel

$$a = 639^9, \; b = 638^9 + 638^8$$

je větší. Své tvrzení odůvodněte.

Řešení. Bylo by jistě pracné a zdlouhavé vypočítat tak vysoké mocniny trojciferných čísel a porovnat přímo výsledky.

Víme, že $a > b$ právě tehdy, když je $a - b > 0$, a že $a < b$ právě tehdy, když je $a - b < 0$. Pomocí znalosti algebry se tedy pokusíme vypočítat výhodně rozdíl $a - b$.

$$a - b = 639^9 - (638^9 + 638^8). \tag{1}$$

Platí

$$638^9 + 638^8 = 638^8 (638 + 1) = 638^8 . 639.$$

Dosadíme-li do (1), vyjde

$$a - b = 639^9 - 638^8 . 639,$$

$$a - b = 639 (639^8 - 638^8). \tag{2}$$

Protože je $639 > 638$, je $639^8 > 638^8$, tj. $639^8 - 638^8 > 0$; z (2) tedy vyplývá $a - b > 0$ a dále $a > b$.

41. Zjistěte, který ze zlomků

$$\frac{23\,456\,798}{29\,876\,543}, \qquad \frac{23\,456\,789}{29\,876\,534}$$

je větší.

Řešení. Prohlédneme-li si pozorně oba zlomky, vidíme, že jejich čitatelé se od sebe liší jen o 9; podobně je tomu se jmenovateli. Označíme-li $23\,456\,789 = a$, $29\,876\,534 = b$, jsou dané zlomky

$$\frac{a+9}{b+9}, \quad \frac{a}{b}.$$

Dále si uvědomíme, že dvě kladná čísla x, y můžeme porovnat buď pomocí jejich rozdílu nebo pomocí jejich podílu. Platí totiž např. věta: $x > y$ (nebo $x = y$ nebo $x < y$), právě když je $\frac{x}{y} > 1$ $\left(\text{nebo } \frac{x}{y} = 1 \text{ nebo } \frac{x}{y} < 1\right)$. Vypočteme tedy

$$\frac{x}{y} = \frac{(a+9)b}{(b+9)a} = \frac{ab+9b}{ab+9a}.$$

Protože je $b > a$, je $9b > 9a$, $ab + 9b > ab + 9a$, a tedy

$$\frac{x}{y} > 1,$$

neboli první zlomek je větší než druhý.

42. Zjistěte, které z čísel

$$\frac{1}{999\,999} + \frac{1}{1\,000\,001}, \quad \frac{2}{1\,000\,000}$$

je větší.

Řešení. Položme $a = 1\,000\,000$. Pak pro daná čísla platí

$$\frac{1}{999\,999} + \frac{1}{1\,000\,001} = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} = \frac{2a}{a^2-1},$$

$$\frac{2}{1\,000\,000} = \frac{2}{a}.$$

Daná čísla lze porovnat podílem nebo rozdílem.

1. Užijeme podíl. Platí

$$\frac{2a}{a^2-1} : \frac{2}{a} = \frac{2a}{a^2-1} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{a^2-1} .$$

Zřejmě $a^2 > a^2 - 1$, takže uvažovaný podíl je větší než 1. Platí tedy

$$\frac{1}{999\,999} + \frac{1}{1\,000\,001} > \frac{2}{1\,000\,000} . \tag{1}$$

2. Užijeme rozdíl. Platí:

$$\frac{2a}{a^2-1} - \frac{2}{a} = \frac{2a^2 - 2(a^2-1)}{a(a^2-1)} = \frac{2}{a^2(a^2-1)} > 0,$$

tj. docházíme také k závěru (1).

43. Určete všecka čísla a, pro která kořen x rovnice $a(x-2) + x - 5 = 0$ vyhovuje rovnici

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0. \tag{1}$$

Řešení. Rovnice

$$a(x-2) + x - 5 = 0$$

má pro každé $a \neq -1$ kořen

$$x = \frac{2a+5}{a+1} . \tag{2}$$

Dosadíme-li číslo x do rovnice (1), požaduje se, aby byla splněna rovnice

$$\left(\frac{2a+5}{a+1}\right)^3 - 7\left(\frac{2a+5}{a+1}\right)^2 + 7\,\frac{2a+5}{a+1} + 15 = 0. \tag{3}$$

Znásobíme ji číslem $(a + 1)^3$ a upravíme; vyjde

$$a^3 - 4a = 0. \tag{4}$$

Tato rovnice se dá napsat ve tvaru

$$a(a + 2)\,(a - 2) = 0.$$

Čísla $a = 0$, $a = 2$, $a = -2$ jsou jediná čísla, která mohou být řešením úlohy. Zkouškou se přesvědčíme, že skutečně čísla 5, 3, -1, která dostaneme z (2) pro $a = 0$, $a = 2$ a $a = -2$, vyhovují úloze. Jádrem řešení je přechod od rovnice (3) k rovnici (4).

44. Je dána soustava dvou rovnic o dvou neznámých x, y

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 0, \\ 2x - y &= -3. \end{aligned} \tag{1}$$

Ke každému koeficientu u neznámé přičteme totéž číslo p; nová soustava bude mít za řešení dvě čísla x, y, jejichž rozdíl je 1. Určete všecka čísla p této vlastnosti.

Řešení. Řešení nové soustavy budou buď čísla x, $x + 1$ nebo čísla x, $x - 1$. Probereme obě možnosti:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} (3 + p)x + (2 + p)(x + 1) &= 0 \\ (2 + p)x + (p - 1)(x + 1) &= -3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Odečtením obou rovnic vyjde $x = 0$. Dosazením do první rovnice (2) vyjde $p = -2$. Pozměněná soustava (2) pak zní $x = 0$, $-3y = -3$, tj. $y = 1$, je tedy $y - x = 1$.

b) Druhá možnost:

$$\begin{aligned} (3 + p)x + (2 + p)(x - 1) &= 0 \\ (2 + p)x + (p - 1)(x - 1) &= -3 \end{aligned} \qquad (3)$$

Odečtením obou rovnic (3) dostaneme $4x - 3 = 3$, odtud $x = \frac{3}{2}$. Dosazením do první rovnice (3) vyjde $p = -\frac{11}{4}$. Pozměněná soustava pak zní

$$\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = 0,$$

$$-\frac{3}{4}x - \frac{15}{4}y = -3.$$

Tato soustava má řešení $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, takže je opět splněna podmínka textu úlohy: $x - y = 1$.

Hledaná čísla p jsou tedy $p = -2$, $p = -\frac{11}{4}$; poněvadž soustavy (2), popř. (3), mají vždy jen jediné řešení $x = 0$, $p = -2$, popř. $x = \frac{3}{2}$, $p = -\frac{11}{4}$.

45. Dokažte, že platí

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) < 2$$

pro všecka přirozená čísla $n > 1$.

Řešení. V posledních závorkách je předpis, jak se sestrojí jednotliví činitelé součinu, např. pro $n = 2$ dostaneme

$$1 + \frac{1}{2^2 - 1} = 1 + \frac{1}{3},$$

pro $n = 3$

$$1 + \frac{1}{3^2 - 1} = 1 + \frac{1}{8}$$

atd. Výraz $1 + \frac{1}{n^2 - 1}$ upravíme »uvedením na společného jmenovatele«

$$1 + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{(n^2 - 1) + 1}{n^2 - 1} = \frac{n^2}{(n + 1)(n - 1)}.$$

Užijeme-li tuto úpravu pro každého činitele, můžeme součin zapsat

$$s = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$$

neboli

$$s = \frac{2^2.3^2.4^2. \ldots .n^2}{2.3^2.4^2.5^2. \ldots .(n-1)^2.n(n+1)}.$$

Po zkrácení vyjde

$$s = 2n \frac{1}{n+1} = 2.\frac{n}{n+1} < 2.1 = 2.$$

Tím je nerovnost dokázána.